梵天塔之探討與創新

國中組數學科第二名

台北縣立重慶國民中學　　　作　　者：連淵淥、潘青岳
黃塗生、呂安序
指導教師：楊文玲、黃照維

一、研究動機

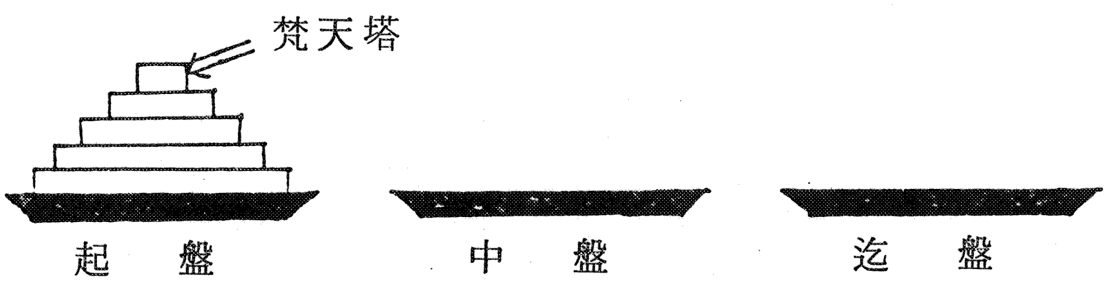
古老的印度中，有一個神秘的傳說：誰能將神壇上七十二層的梵天塔，照着一定的方式由一底盤移至另一個底盤，就能得到神的恩澤，繼而成仙。經過了數千年，成仙的夢無人達成，但奇妙的遊戲卻流傳至今，深深地吸引了我們。

二、研究目的

找出〃三個底盤，而有 n 個塔時使此 n 個塔移動次數最少的玩法，且①移動的最少次數爲何？②移動 x 次後，梵天塔的放置情形及應繼續移動那一個梵天塔。繼而討論有四個底盤…甚而有 n 個底盤時的玩法。

三、梵天塔介紹與玩法

㈠爲了敘述的方便，梵天塔簡稱「塔」，把左方的底盤稱爲起盤，右方的底盤稱爲迄盤（如圖㈠）。



圖㈠

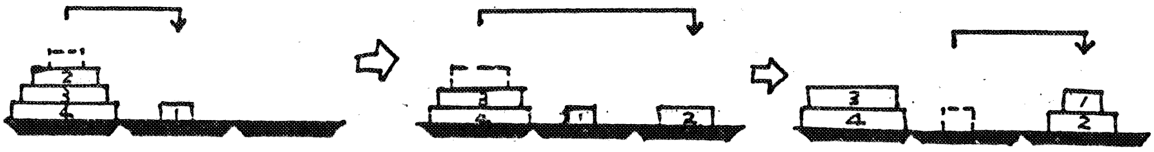
㈡玩法是將塔由起盤移至迄盤，但①每次只能移動最上方的一個塔，且②移動時，大的絕不可壓在小的塔上方。

四、研究步驟

㈠三個底盤時：

在移動的過程中，我們發現幾個規則：

1. 規則(1)：如果要將整個塔由起盤移至迄盤，則須先將最底層的塔移至迄盤。如果要將最底層的塔移至迄盤，則必先將其他的塔移至中盤，由此我們推得一個方法：塔數爲奇數時，要先將最上層塔移至目的盤（不一定是迄盤），才能以最少次數完成；而塔數爲偶數時，則必需將最上層塔移至目的盤外的另一盤。（如圖㈡）



圖㈡

2. 規則(2)：設三個底盤，n 個塔時的最少玩法次數爲 a_n 次，則

塔數 $n \longrightarrow$ 次數 a_n

$1 \longrightarrow a_1 = 1 = 2^0$

$2 \longrightarrow a_2 = 1 \times 2 + 1 = 2 \times 2^0 + 2^0 = 2^1 + 2^0$

$3 \longrightarrow a_3 = 2(2 \times 1 + 1) + 1 = 2(2^1 + 2^0) + 2^0$

$= 2^2 + 2^1 + 2^0$

…

$n \longrightarrow a_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1}$

$= 2^n - 1$（由等比級數求和）

理由是：因當你要將整個塔由起盤移至迄盤時，必先將最下方以外的塔移至中盤，再將最下方的塔移至迄盤，而後再將中盤的其他塔移至迄盤，$\therefore a_n = 2a_{n-1} + 1$，且 $a_0 = 0$ 以此列出上式。

3. 規則(3)：將塔由上而下（即由小而大）依序編號為 1 ，2 ，3 ，…，n 。底下是以 n ＝ 4 ，5 為例列出塔移動的順序。

(1) n ＝ 4 時，121312141213121

(2) n ＝ 5 時，1213121412131215121312141213121

（如圖㊂）

移動塔的號數

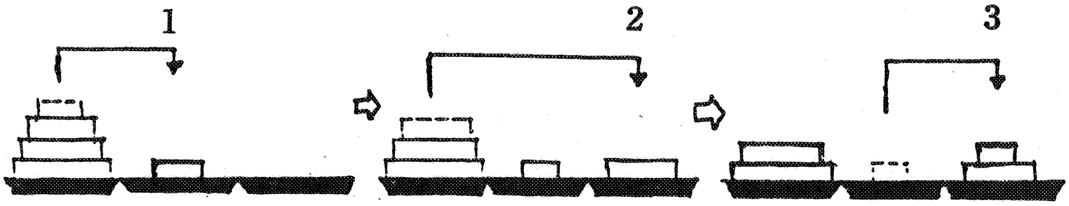


圖 ㊂

由此規律知在第 n 個塔第一次被搬動之前，已經搬動了 n － 1 個塔至某一盤，亦是移動了 $2^{n-1}-1$ 次，因此第 n 個塔第一次被搬動就是在移動第（ $2^{n-1}-1$ ）＋ 1 ＝ 2^{n-1} 次時，∴第 n 個塔第二次被搬動與第一次被搬動，便差了 $2(2^{n-1}-1)+1+1=2^n$ 次。（底下是 n ＝ 5 ，而討論第 4 個塔的情形）

$\underbrace{1213121}_{2^{4-1}次}\boxed{4}\ \underbrace{121312151213121}_{2^{4}次}\boxed{4}\ 1213121$

2^{4-1} 次　第一次被搬動　2^4 次　　第二次被搬動

* 此時已移動 $2^{4-1}+2^4=\boxed{3\cdot 2^{4-1}}$ 次

∴設第 n 個塔在第 x 次被搬動，x 以 2 的次方來除的話，則 x 最多只能被 2^{n-1} 整除。倒推回去，可知移動第 x 次時，x 最多可被 2^{n-1} 整除，則移動第 x 次的塔是第 n 個塔。

4. 規則(4)：開始移動時，第一號塔可有二種情形的放法（放中盤或迄盤），但為了使所有的塔全部由起盤移動到迄盤，第一號塔的放法必須依總塔數的個數是否為奇數或偶數。由實際操作知：

(1) 總塔數為偶數時，第一號塔必先放到中盤，最後所有塔才會歸位於迄盤。

(2) 而總塔數為奇數時，第一號塔必先放到迄盤，最後所有塔才

會歸位於迄盤。底下是依 n ＝ 4 和 5 的實際搬動情形：

ㄅ：n ＝ 4 時是

1 2 1 3 1 2 1 4 1 2 1 3 1 2 1

中迄迄中起中中迄迄起起迄中迄迄←此時所有塔都已在迄盤上

ㄆ：n ＝ 5 時是

1 2 1 3 1 2 1 4 1 2 1 3 1 2 1 5 1 2 1 3 1 2 1 4 1

迄中中迄起迄迄中中起起中迄中中迄起迄迄起中起起迄迄

2 1 3 1 2 1

中中迄起迄迄

由上得規則如下表㈠：

（表一）

總塔數是偶數時 （第一號塔首先移到中盤）	總塔數是奇數時 （第一號塔首先移到迄盤）
(1)第奇個塔的移動順序依次爲中盤→迄盤→起盤→中→迄→起…週而復始	(1)第奇個塔的移動順序依次爲迄盤→中盤→起盤→迄→中→起…週而復始
(2)第偶個塔的移動順序依次爲迄盤→中盤→起盤→迄→中→起…週而復始	(2)第偶個塔的移動順序依次爲中盤→迄盤→起盤→中→迄→起…週而復始

（ㄅ）：由上表看出，移動奇數個塔與移動偶數個塔，只是中盤上的塔和迄盤上的塔互異而已。

（ㄆ）：若你本來是移動 n 個塔，移了幾次後，想改爲移動 n ＋（ 2 k ＋ 1 ）（ k ∈ z ）個塔，只要將塔加入或取走，再將中盤上的塔和迄盤上的塔互調即可繼續玩。（注意：n 是偶數⇒ n ＋（ 2 k － 1 ）是奇數；n 是奇數⇒ n ＋（ 2 k － 1 ）是偶數）。

5. 規則(5)：在此我們提出一個問題「在移動了 x 次後，第 n 個塔

共移動了多少次？且在那一盤？

(1)由規則(3)可知，設第 n 個塔在 x 次內移動了 k 次，則 $x \geqslant 2^{n-1} + (k-1)2^{n}$, 其中 k 爲符合上式不等式的最大值（ x 爲常數（定值），n 爲變數）。

(2)另一方面，我們若想求出第 n 個塔在 x 次之內共移動了幾次（即 k 值），可由 $x \geqslant 2^{n-1} + (k-1) \cdot 2^{n}$ 得 $k \leqslant (x + 2^{n-1}) \div 2^{n}$，即 $k = \left[\dfrac{x + 2^{n-1}}{2^{n}}\right]$（高斯符號）。

(3)再由 k ÷ 3 ＝商…餘數 r （ r ＝ 0 ，1 ，或 2 ），由 r 的值與表(一)，即可知第 n 但塔在那一盤了。

(4)設總塔數是偶數時，由(1)，(2)，(3)得表(二)

表(二)

	第n個塔是奇數時		
餘　數	………0	………1	………2
	第n個塔是偶數時		
餘　數	………0	………2	………1
所放置的盤子	起　　盤	中　　盤	迄　　盤

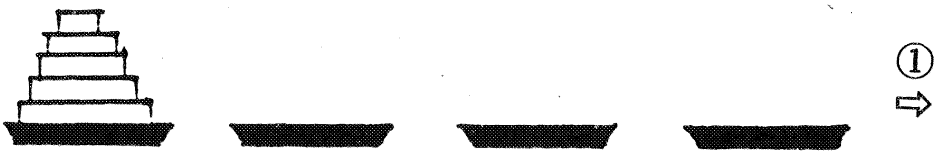
(5)我們舉一實例如下：（在此設總塔數爲偶數）

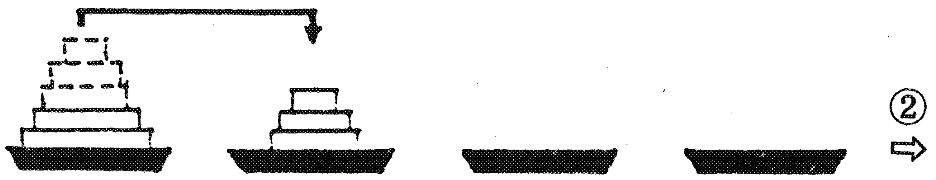
設塔移動了 135 次後，各號塔的移動次數，及其位置所在

塔號	次數 $k=\left[\dfrac{x+2^{n-1}}{2^{n}}\right]$	k ÷ 3 的餘數爲 r	第奇個塔位置	第偶個塔位置
1.	$\left[\dfrac{135+2^{1-1}}{2^{1}}\right]=68$	68÷3=22…2(=r)	迄　　盤	
2.	34	1		迄　　盤
3.	17	2	迄　　盤	
4.	8	2		中　　盤
5.	4	1	中　　盤	
6.	2	2		中　　盤
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

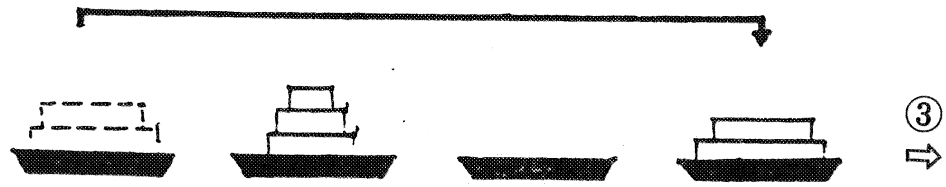
㈡四個底盤時

6. 規則(6)：由規則(2)，知若要以最少數移完塔，則必先將一部分的塔以四個底盤時的方法移至迄盤外的任一盤，再以三個底盤時的方法將其他塔移至迄盤，而後再以四個底盤時的方法將剛才移出的塔移至迄盤，就大功告成了。因此，當塔數為 n 時，只要探討先後應移出幾個塔，才能使移動的次數最少，便可以得到 n 個塔時的最少次數。如圖㈣（ n ＝ 5 ）

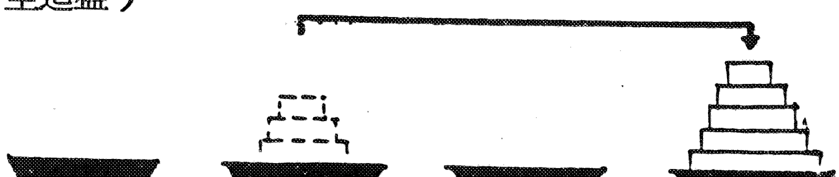




（以四個盤子的方法，移出三個塔至第二盤）



（由於第二盤已被佔據，所以使用三個盤子時的方法移動二個塔至迄盤至迄盤）



（以四個盤子的方法將三個塔由第二盤移至迄盤）

圖㈣

7. 規則(7)：設以最少次數移動 n 個塔，應以四個底盤時方法移動 x 個，次數為 x^1 次；以三個底盤時的方法移動 y 個，次數為 y^1 次，則 $x + y = n$，且 $2x^1 + y^1$ 為最少次數，由此概念，我們得表㈢。

塔數	三個底盤	差數	四個底盤	差數
〇	0		0	
一	1	>→ 2^0	1	>→ 2^0
二	3	>→ 2^1	3	>→ 2^1
三	7	>→ 2^2	5	>→ 2^1
四	15	>→ 2^3	9	>→ 2^2
五	31	>→ 2^4	13	>→ 2^2
六	63	>→ 2^5	17	>→ 2^2
七	127	>→ 2^6	25	>→ 2^3
八	255	>→ 2^7	33	>→ 2^3
九	511	>→ 2^8	41	>→ 2^3
十	1023	>→ 2^9	49	>→ 2^3
十一	2047	>→ 2^{10}	65	>→ 2^4
十二	4095	>→ 2^{11}	81	>→ 2^4
十三	8191	>→ 2^{12}	97	>→ 2^4
十四	16383	>→ 2^{13}	113	>→ 2^4
十五	32767	>→ 2^{14}	129	>→ 2^4
十六	65535	>→ 2^{15}	161	>→ 2^5
十七	131071	>→ 2^{16}	193	>→ 2^5
十八	262143	>→ 2^{17}	225	>→ 2^5

由表㈢發現差數有一定的規律

差數＝ 2^0 的有1個，差數＝ 2^1 的有2個，…差數＝ 2^n 的有 $n+1$ 個。例 $n=13$ 時，$2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots$

$\therefore n=13=1+2+3+4+3 \Rightarrow a_n=2^0\times1+2^1\times2+2^2\times3+2^3\times4+2^4\times3=97$（與表㈢符合）

8. 規則(8)：由表㈢我們可導出四個底盤時的一般公式：

(1)差數 $\underbrace{2^0}_{\text{一個}};\underbrace{2^1,2^1}_{\text{二個}};\underbrace{2^2,2^2,2^2}_{\text{三個}};\cdots;\underbrace{2^{x-1},2^{x-1},\cdots2^{x-1}}_{x\text{個}};\underbrace{2^x,2^x,\cdots2^x}_{(x+1)\text{個}};\cdots$

(2)設 n 爲塔數，且共移動了 a_n 次，求出 n 從 0 開始增加了幾個 $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \cdots$ 但因爲 $\sum_{a=1}^{x} a$ 並不一定等於 n，所以我們要求出 x 的最大值及餘數 q，即 $\sum_{a=1}^{x} a + q = n \Rightarrow \frac{x(x+1)}{2} + q = n$ 〔$\frac{x(x+1)}{2} \leqslant n$〕，∴

9. 規則(9)：利用規則(7)與規則(8)，可帶出一個公式：

$a_n = 2^0 \times 1 + 2^1 \times 2 + 2^2 \times 3 + 2^3 \times 4 + \cdots + 2^{x-1} \times x + q \times 2^x$ ……①

$2a_n = 2^1 \times 1 + 2^2 \times 2 + 2^3 \times 3 + \cdots + 2^{x-1} \times (x-1) + x \times 2^x + q \times 2^{x+1}$ ……②

②－①得 $a_n = (-2^0 - 2^1 - 2^2 - 2^3 - \cdots - 2^{x-n}) + (x-q) \times 2^x + q \times 2^{x+1} = (x+q-1) \times 2^x + 1$

例：n = 12 時，由 $\frac{x(x+1)}{2} \leqslant 12$，估計得 x 的最大整數值爲 4

$\therefore q = 12 - \frac{4 \cdot 5}{2} = 2 \Rightarrow$ 由 $a_n = (x+q-1) \times 2^x + 1$

得 $a_{12} = 5 \times 2^4 + 1 = 81$（與表㈢符合）

10. 規則⑽：我們由規則(6)與規則(7)可得表㈣，小括號中的數據，左邊的以四個盤子移動的塔數，右邊的以三個盤子移動的塔數。

表㈣：

塔數	配　　法	塔數	配　　法
一	(0,1)	十一	(7,4)(6,5)
二	(0,2)(1,1)	十二	(8,4)(7,5)
三	(1,2)	十三	(9,4)(8,5)
四	(2,2)(1,3)	十四	(10,4)(9,5)
五	(3,2)(2,3)	十五	(10,5)
六	(3,3)	十六	(11,5)(10,6)
七	(4,3)(3,4)	十七	(12,5)(11,6)

八	(5,3)(4,4)	十八	(13,5)(12,6)
九	(6,3)(5,4)	十九	(14,5)(13,6)
十	(6,4)	二十	(15,5)(14,6)

由上面的配法可得四個底盤時的玩法的最少次數。

11.規則⑾：實際上玩的時候，光知道移動n個塔時，應以幾個塔用三個盤子時的玩法與幾個塔用四個盤子時的玩法是不夠的，因為在這「幾個塔用四個盤子時的玩法」又可分成「幾個塔用三個盤子來玩與幾個塔用四個盤子來玩」……，如此一層一層分析，才能順利將所有的塔移完，如表㈤的分析例子：

表㈤：

移動塔數		
23	17	9
(17,6)	(12,5)	(6,3)
(12,5)	(8,4)	(3,3)
(8,4)	(5,3)	(1,2)
(5,3)	(3,2)	(0,1)
(3,2)	(1,2)	
(1,2)	(0,1)	
(0,1)		

五、討論與結論

㈠移動次數（最少次數）

1.三個底盤n個塔時，設其全移完的次數為a_n，則$a_n = 2^n - 1$

2.四個底盤n個塔時，全移完的次數$a_n = (x + q - 1) \times 2^x + 1$（看規則⑻，⑼）。

㈡確立第n個塔的第k次搬動是移動了多少次後且此第n個塔在那一盤（看規則⑶，⑷，⑸）。

(三)在有四個底盤的玩法時，應分成幾個塔用三個盤子來玩，幾個塔用四個盤子來玩時可得玩法的最少次數（看規則(10)(11)）。

(四)在我們增加底盤個數時，由規則(7)、(8)得下表(六)。

表(六)：

塔＼盤	三	四	五	六	七	八	九	十
1	1 → 2^{1}	1 → 2^{1}	1 → 2^{1}	1 → 2^{1}	1 → 2^{1}	1 → 2^{1}	1 → 2^{1}	1 → 2^{1}
2	3 → 2^{2}	3 → 2^{1}	3 → 2^{1}	3 → 2^{1}	3 → 2^{1}	3 → 2^{1}	3 → 2^{1}	3 → 2^{1}
3	7 → 2^{3}	5 → 2^{2}	5 → 2^{1}	5 → 2^{1}	5 → 2^{1}	5 → 2^{1}	5 → 2^{1}	5 → 2^{1}
4	15 → 2^{4}	9 → 2^{2}	7 → 2^{2}	7 → 2^{1}	7 → 2^{1}	7 → 2^{1}	7 → 2^{1}	7 → 2^{1}
5	31 → 2^{5}	13 → 2^{2}	11 → 2^{2}	9 → 2^{2}	9 → 2^{1}	9 → 2^{1}	9 → 2^{1}	9 → 2^{1}
6	63 → 2^{6}	17 → 2^{3}	15 → 2^{2}	13 → 2^{2}	11 → 2^{2}	11 → 2^{1}	11 → 2^{1}	11 → 2^{1}
7	127 → 2^{7}	25 → 2^{3}	19 → 2^{2}	17 → 2^{2}	15 → 2^{2}	13 → 2^{2}	13 → 2^{1}	13 → 2^{1}
8	255 → 2^{8}	33 → 2^{3}	23 → 2^{2}	21 → 2^{2}	19 → 2^{2}	17 → 2^{2}	15 → 2^{2}	15 → 2^{1}
9	511 → 2^{9}	41 → 2^{3}	27 → 2^{2}	25 → 2^{2}	23 → 2^{2}	21 → 2^{2}	19 → 2^{2}	17 → 2^{2}
10	1023 → 2^{10}	49 → 2^{4}	31 → 2^{3}	29 → 2^{2}	27 → 2^{2}	25 → 2^{2}	23 → 2^{2}	21 → 2^{2}
11	2047 → 2^{11}	65 → 2^{4}	39 → 2^{3}	33 → 2^{2}	31 → 2^{2}	29 → 2^{2}	27 → 2^{2}	25 → 2^{2}
12	4095 → 2^{12}	81 → 2^{4}	47 → 2^{3}	37 → 2^{2}	35 → 2^{2}	33 → 2^{2}	31 → 2^{2}	29 → 2^{2}
13	8191 → 2^{13}	97 → 2^{4}	55 → 2^{3}	41 → 2^{2}	39 → 2^{2}	37 → 2^{2}	35 → 2^{2}	33 → 2^{2}
14	16383 → 2^{14}	113 → 2^{4}	63 → 2^{3}	45 → 2^{2}	43 → 2^{2}	41 → 2^{2}	39 → 2^{2}	37 → 2^{2}
15	32767 → 2^{15}	129 → 2^{5}	71 → 2^{3}	49 → 2^{3}	47 → 2^{2}	45 → 2^{2}	43 → 2^{2}	41 → 2^{2}
16	65535 → 2^{16}	161 → 2^{5}	79 → 2^{3}	57 → 2^{3}	51 → 2^{2}	49 → 2^{2}	47 → 2^{2}	45 → 2^{2}
17	131071 → 2^{17}	193 → 2^{5}	87 → 2^{3}	65 → 2^{3}	55 → 2^{2}	53 → 2^{2}	51 → 2^{2}	49 → 2^{2}
18	262143 → 2^{18}	225 → 2^{5}	95 → 2^{3}	73 → 2^{3}	59 → 2^{2}	57 → 2^{2}	55 → 2^{2}	53 → 2^{2}
19	524287 → 2^{19}	257 → 2^{5}	103 → 2^{3}	81 → 2^{3}	63 → 2^{2}	61 → 2^{2}	59 → 2^{2}	57 → 2^{2}
20	1048575 → 2^{20}	289 → 2^{5}	111 → 2^{4}	89 → 2^{3}	67 → 2^{2}	65 → 2^{2}	63 → 2^{2}	61 → 2^{2}
21	2097151 → 2^{21}	321 → 2^{6}	127 → 2^{4}	97 → 2^{3}	71 → 2^{3}	69 → 2^{2}	67 → 2^{2}	65 → 2^{2}
22	4194303 → 2^{22}	385 → 2^{6}	143 → 2^{4}	105 → 2^{3}	79 → 2^{3}	73 → 2^{2}	71 → 2^{2}	69 → 2^{2}
23	8388607 → 2^{23}	449 → 2^{6}	159 → 2^{4}	113 → 2^{3}	87 → 2^{3}	77 → 2^{2}	75 → 2^{2}	73 → 2^{2}
24	16777215 → 2^{24}	513 → 2^{6}	175 → 2^{4}	121 → 2^{3}	95 → 2^{3}	81 → 2^{2}	79 → 2^{2}	77 → 2^{2}
25	33554431 → 2^{25}	577 → 2^{6}	191 → 2^{4}	129 → 2^{3}	103 → 2^{3}	85 → 2^{2}	83 → 2^{2}	81 → 2^{2}
26	67108863 → 2^{26}	641 → 2^{6}	207 → 2^{4}	137 → 2^{3}	111 → 2^{3}	89 → 2^{2}	87 → 2^{2}	85 → 2^{2}
27	134217727 → 2^{27}	705 → 2^{6}	223 → 2^{4}	145 → 2^{3}	119 → 2^{3}	93 → 2^{2}	91 → 2^{2}	89 → 2^{2}
28	268435445 → 2^{28}	769 → 2^{7}	239 → 2^{4}	153 → 2^{3}	127 → 2^{3}	97 → 2^{3}	95 → 2^{2}	93 → 2^{2}
29	536870891 → 2^{29}	897 → 2^{7}	255 → 2^{4}	161 → 2^{3}	135 → 2^{3}	105 → 2^{3}	99 → 2^{2}	97 → 2^{2}
30	1073741783 → 2^{30}	1025 → 2^{7}	271 → 2^{4}	169 → 2^{3}	143 → 2^{3}	113 → 2^{3}	103 → 2^{2}	101 → 2^{2}
31	2147483567 → 2^{31}	1153 → 2^{7}	287 → 2^{4}	177 → 2^{3}	151 → 2^{3}	121 → 2^{3}	107 → 2^{2}	105 → 2^{2}
32	4294967135 → 2^{32}	1281 → 2^{7}	303 → 2^{4}	185 → 2^{3}	159 → 2^{3}	129 → 2^{3}	111 → 2^{2}	109 → 2^{2}
33	858993471 → 2^{33}	1409 → 2^{7}	319 → 2^{4}	193 → 2^{3}	167 → 2^{3}	137 → 2^{3}	115 → 2^{2}	113 → 2^{2}
34	17179868543 → 2^{34}	1537 → 2^{7}	335 → 2^{4}	201 → 2^{3}	175 → 2^{3}	145 → 2^{3}	119 → 2^{2}	117 → 2^{2}
35	34359737087	1665	351	209	183	153	123	121

由表(六)知，同一盤數時，第 n 項與第 n + 1 項的差數均爲 2 的次方，爲了方便觀察，我們列出各盤數時，差數爲 2^0 至 2^9 的個數於表(七)。

(五)表(七)：

差數＼盤數	三	四	五	六	七	八	九	十
2^0	1	1	1	1	1	1	1	1
2^1	1	2	3	4	5	6	7	8
2^2	1	3	6	10	15	21	28	36
2^3	1	4	10	20	35	56	84	120
2^4	1	5	15	35	70	126	210	330
2^5	1	6	21	56	126	252	462	792
2^6	1	7	28	86	210	462	792	1584
2^7	1	8	36	120	330	792	1584	3186
2^8	1	9	45	165	495	1287	2771	539
2^9	1	10	55	220	715	2002	4773	10715

依照斜線的方向觀察，我們發現一件很奇妙的事實，它竟然就是楊輝三角。

(六)篇幅上的關係，我們無法再對(五)中的楊輝三角更進一步的說明。

六、參考資料

(一)高中基礎數學第一册（ 7 4 年版）

(二)數學遊戲上，下二册（趙文敏著）

評　語

「梵天塔」問題本來就是很難的，作者能將此問題由例證歸納出一遞迴公式，雖未能加以證明仍屬可貴。