N等分三角形面積研究

國中組數學科第一名

台中縣立豐南國民中學

作　　者：陳豪鈞、徐宇良、張欽奇、陳旻宏

指導教師：陳燕鳳、吳蘭芳

一、研究動機

在國一時，楊維哲教授出了一張中區數理資優生數學競試題，其中有一題——給一個三角形ABC，㈱假定P是線段 $\overline{BC}$ 上點，求作一直線，經過P點且平分這三角形。㈬假定P是 $\overline{BC}$ 延長線上的一點，考慮同樣的問題。記得當時僅能作出假設P是 $\overline{BC}$ 中點，就能二等分△ABC，其餘均無法解答。至目前學了幾何，所學漸多，乃聯合同學有心突破此題。

二、研究目的

1. 企圖從三角形邊上、三角形內、形外之任一點，過此點作 $n-1$ 條直線來 n 等分三角形面積。
2. 嘗試對每一種情況，去找出不同性質的多種作法。
3. 藉2.得來的方法中去找出規則性的作法。

三、研究過程

㈠由三角形邊上一點P作 $n-1$ 條直線來 n 等分三角形

＜方法一＞

〔分析〕

我們知道由三角形一頂點作直線等分三角形，是將對邊 n 等分將等分點與頂點連接即可完成。但此時P爲邊上任一點，更爲複雜，不能立即使用上述方法，所以我們採用等積三角形的方法

，即把原三角形更換爲以P爲頂點之等積三角形，便得到解法。

〔已知〕　△ABC，$\overline{BC}$上一點P（T一）

〔求作〕　過P作$\overline{PQ}$二等分△ABC

〔作法〕　1.連$\overline{AP}$，過C作$\overrightarrow{CD}$ ∥ $\overline{AP}$交$\overrightarrow{BA}$於D。

2.取$\overline{BD}$中點Q，作$\overline{PQ}$，則$\overline{PQ}$即爲所求

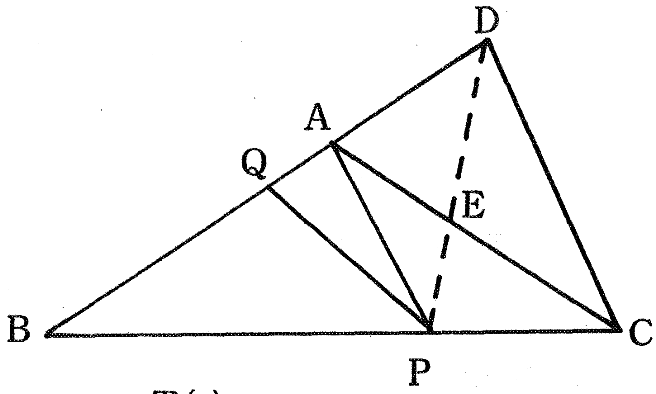
〔證明〕　1.連$\overline{PD}$，∵$\overline{AP}$ ∥ $\overline{CD}$，∴△ADE＝△CPE，則

△ABC＝△CPE＋四邊形ABPE

＝△ADE＋四邊形ABPE

＝△BPD。

2.∵Q爲$\overline{BD}$中點，∴△BPQ＝$\frac{1}{2}$△BPD＝$\frac{1}{2}$△ABC，即$\overline{PQ}$平分△ABC。



T(一)

〔討論〕　1.這個方法有一個缺點，在n等分時如果只做一個與原形等積的三角形時，有些等分點便可能落在形外，此時便須從另一邊再作另一個與原形等積之三角形，再取出等分點來，接著將P點與原形上等分點連接即可完成。

2.依此類推，可作出n等分△面積

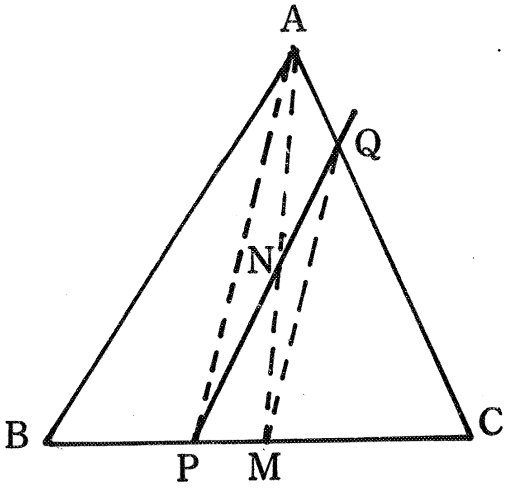
<方法二>

〔作法〕　1.連$\overline{AP}$，並取$\overline{BC}$中點M。

2.作$\overline{MQ}$ ∥ $\overline{AP}$交$\overline{AC}$於Q，連$\overline{PQ}$，則$\overline{PQ}$即爲所求。

〔證明〕　1.連$\overline{AM}$交$\overline{PQ}$於N，∵$\overline{AP}$ ∥ $\overline{MQ}$，則△ANQ＝△PMN。

2.∵$\overline{AM}$爲中線，∴△ABM　四邊形ANPB＋



T(二)

△PMN＝四邊形ANPB＋△ANQ＝四邊形AQPB＝$\frac{1}{2}$△ABC。

3. ∵四邊形AQPB＝$\frac{1}{2}$△ABC，則△PQC＝△ABC－四邊形AQPB＝$\frac{1}{2}$△ABC

將三角形面積五等分之作法

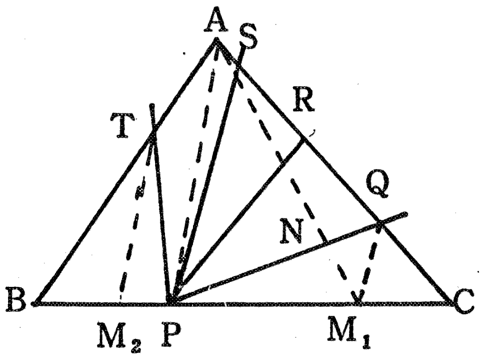
〔作法〕 1. 連$\overline{AP}$，並取M_1，M_2，使$\overline{BM_2}=\overline{CM_1}=\frac{1}{5}\overline{BC}$。

2. 作$\overline{M_1Q} \parallel \overline{AP}$，$\overline{M_2T} \parallel \overline{AP}$交$\overline{AC}$，$\overline{AB}$於Q，T連$\overline{PT}$，$\overline{PQ}$。

3. 在$\overline{AC}$上取兩點R，S使$\overline{CQ}=\overline{QR}=\overline{RS}$連$\overline{PR}$，$\overline{PS}$則$\overline{PQ}$，$\overline{PR}$，$\overline{PS}$，$\overline{PT}$即爲所求

〔證明〕 1. 連$\overline{AM_1}$ ∵ $\overline{AP} \parallel \overline{M_1Q}$ ∴△QNA＝△PNM_1

T(三)

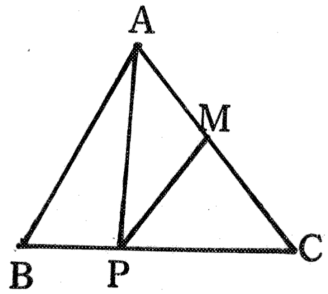


2. ∵$\overline{M_1C}=\frac{1}{5}\overline{BC}$ ∴△AM_1C＝$\frac{1}{5}$△ABC 則△AM_1C＝四邊形CM_1NQ＋△PNM_1＝△PQC＝$\frac{1}{5}$△ABC

3. 同理△BPT＝$\frac{1}{5}$△ABC，又CQ＝QR＝RS ∴△PQC＝△PQR＝△PRS＝$\frac{1}{5}$△ABC（等底同高）

4. 則四邊形ASPT＝△ABC－△BTP－△SPR－△RPQ－△RPC＝$\frac{1}{5}$△ABC

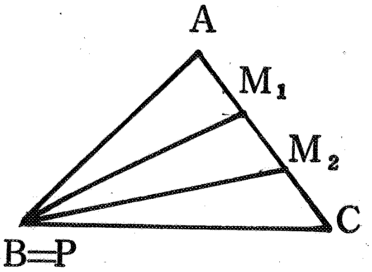
〔討論〕 1. 上述之討論均設P非等分點亦非頂點。若P爲等分點，如欲三等分△ABC，P爲任一三等分點，則僅需連$\overline{AP}$,並取$\overline{AC}$中點M，再連$\overline{PM}$,則$\overline{AP}$,$\overline{PM}$三等分△ABC。T㈣



T㈣

2. 若P爲頂點，如B＝P，則取$\overline{AC}$三等分點M_1,M_2,連$\overline{PM_1}$與$\overline{PM_2}$,則$\overline{PM_1}$、$\overline{PM_2}$三等分△ABC。T㈤

3. 依此類推即可作n－1條線段，將所知的三角形面積n等分。



T㈤

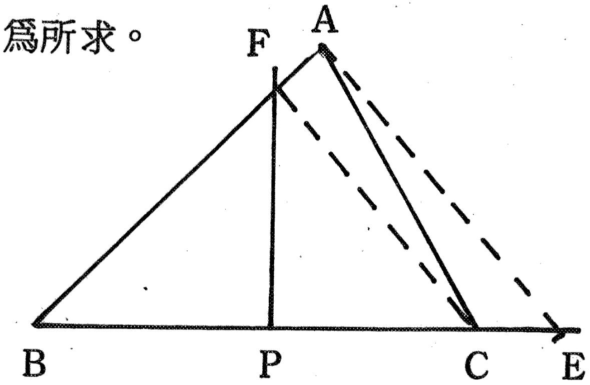
<方法三>

〔分析〕

若P在$\overline{BC}$上，且$\overline{PF}$二等分△ABC，則$\dfrac{\triangle BPF}{\triangle ABC}=\dfrac{\overline{BP}}{\overline{AB}}\times\dfrac{\overline{BF}}{\overline{BC}}=\dfrac{1}{2}$ 得$\overline{AB}\times\overline{BC}=2\,\overline{BP}\times\overline{BF}$，即$\dfrac{2\overline{BP}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BF}}$,則僅需作出$\overline{CF}\mathbin{/\!/}\overline{AE}$，且$\overline{BE}=2\overline{BP}$ 即可迎刄而解。

〔作法〕 1. 作$\overrightarrow{BC}$，在$\overrightarrow{BC}$上取一點E，使$\overline{BE}=2\overline{BP}$

2. 連$\overline{AE}$過C作$\overline{CF}\mathbin{/\!/}\overline{AE}$，且交$\overline{AB}$於F，連$\overline{PF}$,則$\overline{PF}$即爲所求。



T㈥

〔證明〕 1. 在△ABE中 $\because\overline{CF}\mathbin{/\!/}\overline{AE}$ $\therefore\dfrac{\overline{BE}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{BA}}{\overline{BF}}$，又

$\overline{BE}=2\overline{BP}$　∴ $\dfrac{2\overline{BP}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BF}}$，則 $2\overline{BP}\times\overline{BF}=\overline{AB}\times\overline{BC}$，$\dfrac{\overline{BP}\times\overline{BF}}{\overline{AB}\times\overline{BC}}=\dfrac{1}{2}$，即 $\dfrac{\triangle BFP}{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}$。

2. ∵ $\triangle BFP=\frac{1}{2}\triangle ABC$，則四邊形AFPC $=\triangle ABC-\triangle BFP=\triangle ABC-\frac{1}{2}\triangle ABC=\frac{1}{2}\triangle ABC$　∴ $\triangle BFP$ 二四邊形AFPC，則 $\overline{PF}$ 二等分此三角形，故 $\overline{PF}$ 合於所求。

將三角形五等分之做法

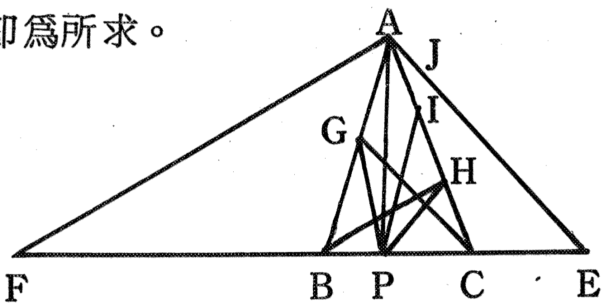
〔作法〕 1. 在 $\overline{BC}$ 上取一點F，使 $\overline{CF}=5\overline{CP}$，並連 $\overline{AF}$。

2. 作 $\overline{BH}\parallel\overline{AF}$ 交 $\overline{AC}$ 於H，連 $\overline{PH}$。

3. 在 $\overline{AC}$ 上取兩點I、J使 $\overline{CH}=\overline{HI}=\overline{IJ}$，並連 $\overline{PI}$，$\overline{PJ}$。

4. 在 $\overline{BC}$ 上取一點E使 $\overline{BE}=5\overline{BP}$，並連 $\overline{AE}$。

5. 作 $\overline{CG}\parallel\overline{AE}$ 交 $\overline{AB}$ 於G連 $\overline{PG}$，則 $\overline{PH}$，$\overline{PI}$，$\overline{PJ}$，$\overline{PG}$ 即爲所求。



T(七)

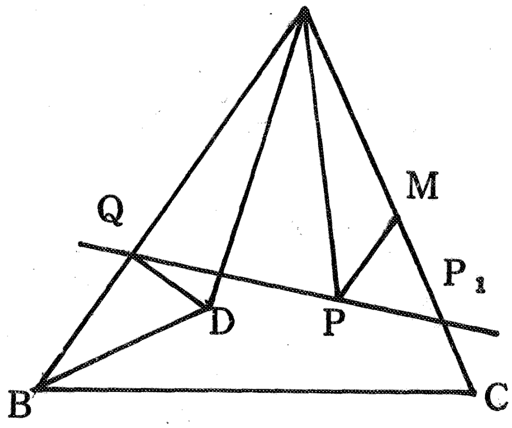
〔證明〕 1. 在 $\triangle ABE$ 中　∵ $\overline{AE}\parallel\overline{CG}$　∴ $\dfrac{\overline{BE}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BG}}$，又 $\overline{BE}=5\overline{BP}$ ∴ $\triangle BPG=\frac{1}{5}\triangle ABC$，同理 $\triangle PCH=\frac{1}{5}\triangle ABC$　又 $\overline{CH}=\overline{AI}=\overline{IJ}$　∴ $\triangle CHP=\triangle HIP=\triangle IJP=\frac{1}{5}\triangle ABC$（等底同高）

2. ∵ $\triangle CHP=\triangle HIP=\triangle IJP=\triangle PBG=\frac{1}{5}\triangle ABC$　∴四邊形AGPJ $=\triangle ABC-\triangle CHP-\triangle HIP-\triangle IJP-\triangle PBG=\frac{1}{5}\triangle ABC$ 則可知 $\overline{PH}$、$\overline{PI}$、$\overline{PJ}$、$\overline{PG}$ 五等分 $\triangle ABC$。

〔結論〕

在上述方法中，方法(一)(二)採用等積△，方法三則用夾等角的△面積比來解釋。但我們發現三種方法均可用夾等角的△面積比來解釋而其作法、證明較爲簡明，所以决採用後者繼續發展。

(二)若P在△ABC內部一點



T(八)

〔分析〕 1. 若P在△ABC內部且$\overleftrightarrow{PP^1}$交$\overline{AB}$、$\overline{AC}$於Q及$P^1$且二等分△ABC則$\dfrac{\triangle AP^1Q}{\triangle ABC}=\dfrac{\overline{AQ}\times\overline{AP^1}}{\overline{AB}\times\overline{AC}}=\dfrac{1}{2}$ 得

$\overline{AQ}\times\overline{AP^1}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{AB}$，因而取$\overline{AC}$中點M造成

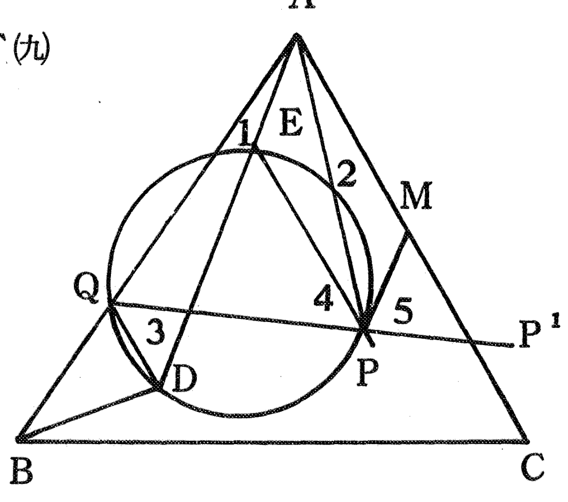
$\overline{AM}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}$，然後以$\overline{AB}$爲邊作△ABD～△APM可得$\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AP}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}\Rightarrow\overline{AM}\times\overline{AB}=\overline{AP}\times\overline{AD}$。

2. 如何能使$\overline{AP}\times\overline{AD}=\overline{AQ}\times\overline{AP^1}\Rightarrow\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP^1}}=\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AD}}\Rightarrow$

需找出△ADQ～△AP^1P因而需再做出∠ADQ＝∠AP^1P即可迎双而解。

〔作法〕 1. 連$\overline{AP}$，取$\overline{AC}$中點M，連$\overline{MP}$。

T(九)



2. 以$\overline{AB}$為一邊，作$\triangle ABD \backsim \triangle APM$，且$\overline{AD}$、$\overline{BD}$交於三角形內部D點。

3. 作$\overline{PE} \mathbin{/\!/} \overline{AC}$，交$\overline{AD}$於E。

4. 以P、E、D點作一圓交$\overline{AB}$於Q。

5. 連$\overline{PQ}$且交$\overline{AC}$於P^1，則$\overleftrightarrow{PQ}$即為所求。

〔證明〕 1. $\because \triangle ABD \backsim \triangle APM$，$\therefore \angle 1 = \angle 2$，又P、E、Q、D四點共圓，$\therefore \angle 3 = \angle 4$，$\overline{PE} \mathbin{/\!/} \overline{AC}$，$\therefore \angle 4 = \angle 5 = \angle 3$，$\therefore \triangle AQD \backsim \triangle APP^1$，$\therefore \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AP^1}}$，即$\overline{AQ} \times \overline{AP^1} = \overline{AP} \times \overline{AD}$。

2. 又$\triangle ABD \backsim \triangle APM$，$\therefore \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AD}}$，即$\overline{AP} \times \overline{AD} = \overline{AB} \times \overline{AM} = \overline{AQ} \times \overline{AP^1}$，$\overline{AM} = \dfrac{1}{2}\overline{AC}$，$\therefore \overline{AB} \times \dfrac{1}{2}\overline{AC} = \overline{AQ} \times \overline{AP^1}$，$\because \angle A = \angle A$，$\therefore$

$$\frac{\triangle AQP^1}{\triangle ABC} = \frac{\overline{AQ} \times \overline{AP^1}}{\overline{AB} \times \overline{AC}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AB} \times \overline{AC}}{\overline{AB} \times \overline{AC}} = \frac{1}{2}。$$

3. 過P之$\overline{P^1Q}$平分$\triangle ABC$合於所求。

〔討論〕 1. 若欲四等分三角形面積，可仿二等分之作法，故省略。

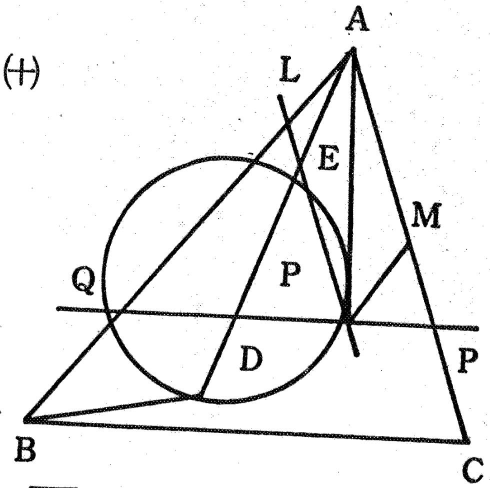
2. 若P在$\angle A$之平分線上，則P、E、D三點共線，則需將作法改以B或C為頂點作相似三角形，若P為內心，則我們改用其他證法。證法於後。

3. 若P、D、E三點所作之圓不能與$\overline{AB}$相交，則亦需改成以B或C為頂點作相似三角形。

4. 當P點接近中央，勉強做$\dfrac{1}{n}$之平分可能有好幾個交點，可以取近$\dfrac{1}{2}$之分割，如$n = 5$時可取$\overline{AM}$為$\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{3}{5}$之$\overline{AC}$，分成$\dfrac{2}{5}\triangle ABC$的小三角形，再行分割。

5. n等分模式

T(十)



(1)設P點接近$\overline{AC}$（如上圖），在$\overline{AC}$上取M點，使$\overline{AM}=\frac{a}{n}\overline{AC}$（a視情形而定）。

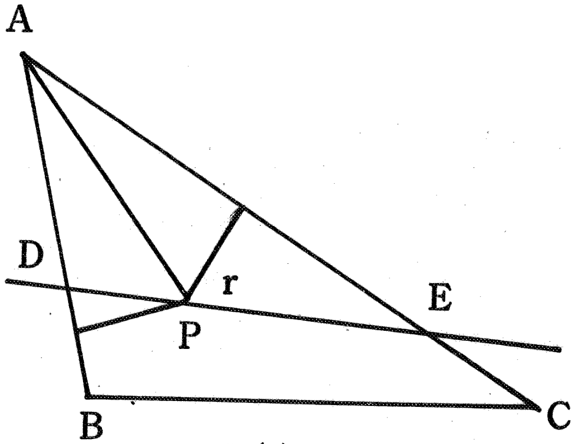
(2)依$\overline{AB}$爲邊，作△ADB∽△AMP，過P作∠∥$\overline{AC}$交$\overline{AD}$於E。

(3)作△EPD外接圓，設交$\overline{AB}$於Q。

(4)作$\overline{PQ}$，交$\overline{AC}$於P¹，則$\triangle AQP'=\frac{a}{n}\triangle ABC$再將△AQP′作a等分，四邊形QBCP′作（n−a）等分，則可n等分△ABC。

若P爲△ABC之內心，過P作直線二等分△ABC。

〔分析〕 1.若$\overline{DE}$爲過P且二等分△ABC之直線，則$\triangle ADE=\frac{1}{2}\triangle ABC$，又P爲內心，所以P至$\overline{BA}$、$\overline{BC}$



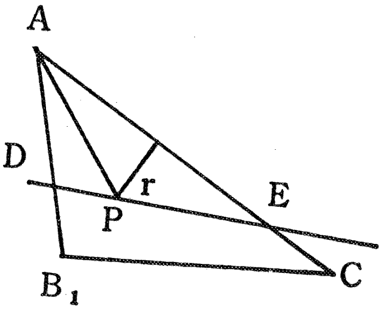
T(土)

、$\overline{AC}$等距離，若其距離用r表示$\frac{1}{2}r(\overline{AD}+\overline{AE})=\frac{1}{2}r\left[\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})\right]\therefore\overline{AD}+\overline{AE}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC})$。

2. 設 $\overline{AD}=a$ ，$\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC})=S$ ，則 $\overline{AE}=S-a$ ，則 $\frac{\triangle ADE}{\triangle ABC}=\frac{a\times(S-a)}{\overline{AB}\times\overline{AC}}=\frac{1}{2}$ ，$\therefore a\times(S-a)=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}$ 令 $a\times(S-a)=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}$，因此我們依比例中項線段作法作出 $\sqrt{a(S-a)}=\sqrt{\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}}$

〔已知〕 △ABC及內心P點

〔求作〕 過P之一直線二等分此△ABC

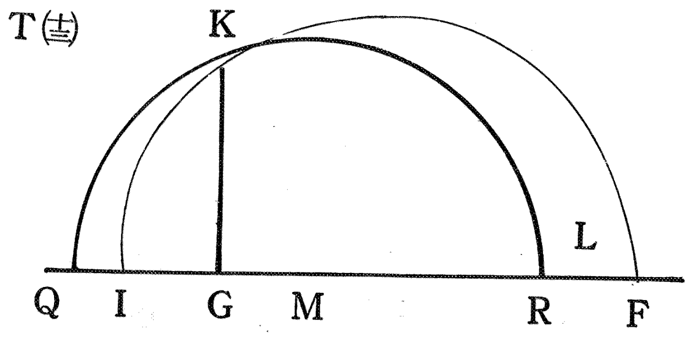


〔作法〕 1. 在L上取F、G、I 使 $\overline{FG}==\overline{AC}$ ，$\overline{IG}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ ，以 $\overline{IF}$ 為直徑作一半圓。

2. 過G作 $\overline{GK}\perp L$，且交圓於K

3. 以K為圓心，$\frac{1}{4}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$ 為半徑，畫弧交L於M。

4. 以M為圓心，$\overline{MK}$ 為半徑，畫一半圓交L於Q、R，則 $\overline{QG}=a$ ，$\overline{RG}=S-a$ 。



5. △ABC中，在 $\overline{AB}$ 上取 $\overline{AD}=a$ ，$\overline{AC}$ 上取 $\overline{AB}=S-a$ 連 $\overline{DE}$ 即為所求。

〔證明〕 1. 由作圖中，$\overline{KG}$ 為 $\overline{IG}$ 、$\overline{GF}$ 比例中項 $\therefore\overline{KG}^2=\overline{IG}\times\overline{GF}$ 　$\overline{KG}$ 為 $\overline{QG}$ 、$\overline{GR}$ 比例中項 $\therefore\overline{KG}^2=\overline{QG}\times\overline{GR}$ 。

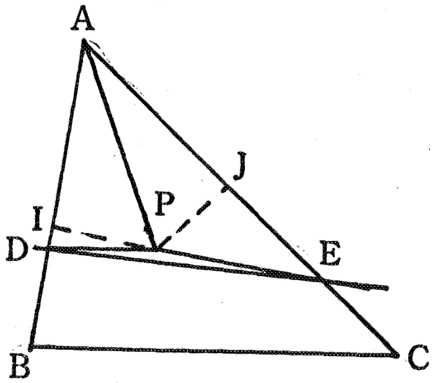
故 $\overline{IG}\times\overline{GF}=\overline{QG}\times\overline{GR}$ ，又因 $\overline{QG}=a=\overline{AD}$ ，$\overline{GR}=S-a=\overline{AE}$ ，$\overline{GF}=\overline{AC}$，$\overline{IG}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ 即

$\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{AD}\times\overline{AE}$。

2. $\because \angle A=\angle A \therefore \dfrac{\triangle ADE}{\triangle ABC}=\dfrac{\overline{AD}\times\overline{AE}}{\overline{AB}\times\overline{AC}}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \triangle ADE=\frac{1}{2}\triangle ABC$。

3. 設P不在$\overline{DE}$上，作$\overline{AP}$、$\overline{DP}$、$\overline{EP}$，且$\overline{PI}\perp\overline{AD}$，$\overline{PJ}\perp\overline{AE}$。



T(十四)

$\triangle ADP+\triangle APE=\frac{1}{2}\overline{PI}\times\overline{AD}+\frac{1}{2}\overline{PJ}\times\overline{AE}$（$\because$ P爲內心$\therefore \overline{PI}=\overline{PJ}=r$）$=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{AE})\times r=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC})r\right]=\frac{1}{2}\triangle ABC$

則$\triangle DPE=\triangle ADE-\triangle ADP-\triangle APE$

$=\frac{1}{2}\triangle ABC-\frac{1}{2}\triangle ABC=0$，故

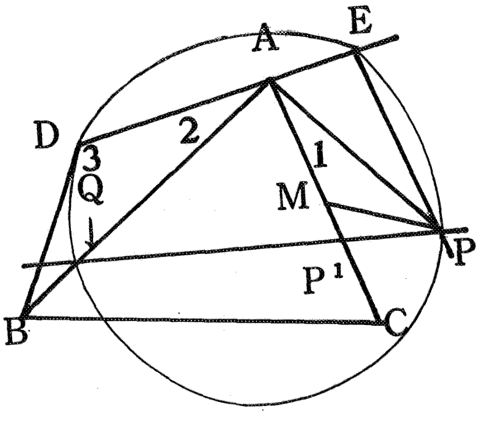
P落在$\overline{DE}$上與假設不合，則$\overline{DE}$過P且二等分$\triangle ABC$。

㈢若P爲$\triangle ABC$外部一點

〔分析〕　將$\triangle ABC$二等分，仿P在形內方法

〔作法〕　1. 取$\overline{AC}$中點M，連$\overline{PM}$、$\overline{AP}$

2. 作$\triangle ABD\backsim\triangle APM$，$\overline{AD}$、$\overline{BD}$交於三角形外部一點D。



T(十五)

3. 過P作$\overrightarrow{PE}$ ∥ $\overline{AC}$ 交$\overleftrightarrow{AD}$於E。

4. 以P、E、D作一圓，交$\overline{AB}$於Q，連$\overline{PQ}$交$\overline{AC}$於 P^1，則$\overleftrightarrow{PQ}$即為所求。

〔證明〕 ∵$\triangle ABD \backsim \triangle APM$ ∴$\angle 1 = \angle 2$，又P、E、Q、D共圓且$\overline{PE}$ ∥ $\overline{AC}$ ∴$\angle 3 + \angle EPQ = \angle EPQ + \angle AP^1P^1$，∴$\angle 3 = \angle AP^1P$ ∴$\triangle AQP \backsim \triangle APP^1$ 則$\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AP^1}}$ 即$\overline{AQ} \times \overline{AP^1} = \overline{AP} \times \overline{AD}$

又$\triangle ABD \backsim \triangle APM$ ∴$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AD}}$，即$\overline{AP} \times \overline{AD} = \overline{AB} \times \overline{AM} = \overline{AQ} \times \overline{AP^1}$ 又$\overline{AM} = \dfrac{1}{2}\overline{AC}$ ∴$\overline{AB} \times \dfrac{1}{2}\overline{AC} = \overline{AQ} \times \overline{AP^1}$ ∵$\angle A = \angle A$ ∴$\dfrac{\triangle AQP^1}{\triangle ABC} = \dfrac{\overline{AQ} \times \overline{AP^1}}{\overline{AB} \times \overline{AC}} = \dfrac{1}{2}$

則$\overline{PQ}$二等分$\triangle ABC$

四、研究結果

(一)根據我們的研究，我們從形內、形外、邊上任一點都可做出n－1條直線n等分三角形。

(二)楊教授所出的題目，P是邊上任一點，我們找出三種解法，而P在邊之延長線上可視同在三角形外一點，亦可明朗得到解。

評　語

本件作品對國中學生而言實為恰當，尤其研究之深度更超乎國中程度，惟在「形內一點n等分三角形」部份，並未完整，僅能利用電腦繪圖說明死角部。若本作品能再由其中一名同學（以應國際科展之要求）繼續研究，將死角部份證明出來則能成為一流作品。