# 由排容原理探討如何快速計算或預估 "不大於A且與B互質之正整數個數"

## 高中組數學科第三名


高雄市立前鎮高中

作　　者：龔進輝、林文茂

指導教師：黃鴻洲、葉得祥


## 一、研究動機

令正整數 $B = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots\cdots q_n^{\beta_n}$（標準分解式），其中 $q_1 < q_2 < \cdots\cdots q_n$，[ ] 表示高斯符號。$\phi(B)$表示"不大於 B且與B互質之正整數個數"，則由排客原理知：$\phi(B) = B - \sum_{1 \leq i \leq n} \left[\frac{B}{q_i}\right] + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left[\frac{B}{q_i q_j}\right] - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \left[\frac{A}{q_i q_j q_k}\right] + \cdots\cdots$，因 $q_i \mid B$，$\forall i = 1, 2, 3, \cdots\cdots n$，故

$$\text{上式} = B - \sum \frac{B}{q_i} + \sum \frac{B}{q_i q_j} - \sum \frac{B}{q_i q_j q_k} + \cdots\cdots$$

$$= B\left(1 - \sum \frac{1}{q_i} + \sum \frac{1}{q_i q_j} - \sum \frac{1}{q_i q_j q_k} + \cdots\cdots\right)$$

$$= B\left(1 - \frac{1}{q_1}\right)\left(1 - \frac{1}{q_2}\right) \cdots\cdots\cdots \left(1 - \frac{1}{q_n}\right)$$

此即有名之尤拉方式，計算非常方便。但若給另一正整數A，令$\phi$(A，B)表示"不大於A且與B互質之正整數個數"，則由排客原理知$\phi(A, B) = A - \sum \left[\frac{A}{q_i}\right] + \sum \left[\frac{A}{q_i q_j}\right] - \sum \left[\frac{A}{q_i q_j q_k}\right] + \cdots\cdots$

若 $q_i \mid A$，$\forall_i = 1, 2, 3 \cdots\cdots n$，同上面$\phi(B)$推演過程，可得 $\phi(A, B) = \left(1 - \frac{1}{q_1}\right)\left(1 - \frac{1}{q_2}\right) \cdots\cdots\cdots \left(1 - \frac{1}{q_n}\right)$，計算亦非常方便。但若有某些 $q_i \nmid A$，則求$\phi$(A，B)之計算過程將非常繁瑣，尤其當A很大或B之質因數個數很多時，計算將更可怕嚇人

，因此引發興趣尋找“大量簡化計算$\phi$（A，B）式值”之方法。

另外，在習作課本第四册2－2第4題，A＝1000，B＝2・3・5，計算得$\phi$（A，B）＝266，無意中發現$A\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=266.\overline{6}$，與$\phi$（A，B）之絕對誤差只有$0.\overline{6}$，引發研究$\phi$（A，B）與$A\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\left(1-\frac{1}{q_2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{q_n}\right)$之絕對誤差之興趣。

## 二、研究目的與結果

給二正整數A，$B=q_1q_2\cdots\cdots q_n$（標準分解式）

㈠目的：尋找計算$\phi$（A，B）之簡化方法。

結果：**1.**導出定理二的餘數算法 **2.**導出定理三的等分區間法。

㈡目的：討論$\phi$（A，B）與$A\cdot\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{q_i}\right)$的絕對誤差。

結果：**1.**絕對誤差很小。**2.**導出有關機率的定理五。

㈢目的：討論$\phi(A, B)=A\cdot\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{q_i}\right)$時之A，B條件。

結果：導出定理八之美好結論。

## 三、研究過程與方法

㈠令$B=q_1q_2\cdots\cdots q_n$（標準分解式）

預備定理1：

對任一整數n，則$[n+\alpha]=n+[\alpha]$，對任一實數$\alpha$均成立。

當A很大時，先以B除A得商K，餘數R，即A＝KB＋R，其中$K=\left[\frac{A}{B}\right]$且$0\leq R<B$，則$\phi$（A，B）

$$=A-\Sigma\left[\frac{A}{q_i}\right]+\Sigma\left[\frac{A}{q_iq_j}\right]-\Sigma\left[\frac{A}{q_iq_jq_k}\right]+\cdots\cdots$$

$$=(KB+R)-\Sigma\left[\frac{KB+R}{q_i}\right]+\Sigma\left[\frac{KB+R}{q_iq_j}\right]$$

$$-\Sigma\left[\frac{KB+R}{q_i q_j q_k}\right]+\cdots\cdots$$

由預備定理1，上式

$$=\left(KB-\Sigma\frac{KB}{q_i}+\Sigma\frac{KB}{q_i q_j}-\Sigma\frac{KB}{q_i q_j q_k}+\cdots\cdots\right)$$

$$+\left(R-\Sigma\left[\frac{R}{q_i}\right]+\Sigma\left[\frac{R}{q_i q_j}\right]-\Sigma\left[\frac{R}{q_i q_j q_k}\right]+\cdots\cdots\right)$$

$$=KB\left(1-\Sigma\frac{1}{q_i}+\Sigma\frac{1}{q_i q_j}-\Sigma\frac{1}{q_i q_j q_k}+\cdots\cdots\right)+\phi(R,B)$$

$$=KB\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\left(1-\frac{1}{q_2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{q_n}\right)+\phi(R,B)$$

$$=\left[\frac{A}{B}\right]\phi(B)+\phi(R,B)$$

因此得下面定理：

定理一：

$\phi(A,B)=\left[\frac{A}{B}\right]\phi(B)+\phi(R,B)$，其中$A\equiv R$ (modB)，且$0\leq R<B$

由定理一可大量簡化計算步驟，尤其是A很大且R不大時，但是若餘數R很大時，$\phi(R,B)$之計算仍很費時，因此再繼續下面的研究。由簡易之最高公因數性質$(X,Y)=(Y-X,Y)$，我們得下面

預備定理2：

若區間〔1，B〕內有一整數X與B互質，則B－X與B亦互質。

即$\phi\left(\frac{B}{2},B\right)=\frac{1}{2}\phi(B)$

因此，若$\frac{B}{2}<R<B$，令$R^*=B-R$則

$\phi(R,B)=\phi(B)$－區間〔R＋1，B－1〕內與B互質之正整數個數，因區間〔R＋1，B－1〕對中點$\frac{B}{2}$之對稱區間爲〔1，B－R－1〕，由預備定理2知$\phi(R,B)=\phi(B)$－區間〔1，B－R－1〕內與B互質之整數個數$=\phi(B)-$

$\phi(B-R-1, B)=\phi(B)-\phi(R^*-1, B)$，因此定理一可推得

定理二：

以B除A得餘數R，令$R^*=B-R$

則$\phi(A, B)=[\frac{A}{B}]\phi(B)+\phi(R, B)$ ……即定理一，當R較小時用

$=([\frac{A}{B}]+1)\phi(B)-\phi(R^*-1, B)$ ……當R較靠近B時用

由定理二知當R很小或很靠近B，容易解決，但若R很靠近$\frac{B}{2}$時，由預備定理2可將區間〔0，B〕分割成二等分，配合篩選法來計算也很快。這有點“二等分”逼近法的味道，因此假如我們能夠將區間〔0，B〕分割成n等分，而且不大於B且與B互質之正整數平均分佈在n等分各區間內，當R很靠近某一分點時，配合篩選法將很有意思。我們發現有一種情形可以，寫成定理如下

定理三：

給$B=q_1q_2\cdots\cdots q_n$（標準分解式），若$q_k\equiv 1 \pmod{q_1}$，$\forall_k=2, 3\cdots\cdots, n$，則可將區間〔0，B〕分割成$q_1$等分，使不大於B且與B互質之正整數平均分佈在各$q_1$等分區間內。

即$\phi(\frac{SB}{q_1}, B)=\frac{S}{q_1}\phi(B)$，其中$S=1, 2, 3, \cdots, q_1-1$

證：令$B^*=\frac{B}{q_1}=q_2q_3\cdots\cdots q_n$，令d表示自$q_1, q_2, \cdots, q_n$中任取幾個之乘積。

今先證明一個預備定理如下：

$$[\frac{SB^*}{d}]=\begin{cases}\frac{SB^*}{d}, & \text{當 d 不含 } q_1\\ \frac{SB^*}{d}-\frac{S}{q_1}, & \text{當 d 含 } q_1\end{cases}$$

pf：(1)若 d 不含 $q_1$ 則 $\frac{SB^*}{d}\in Z$ $\therefore \left[\frac{SB^*}{d}\right]=\frac{SB^*}{d}$

(2)若 d 含 $q_1$，則 $\frac{SB^*}{d}\notin Z$，令 $d=q_1H$，其中 $H \mid B^*$

因 $q_k\equiv 1 \pmod{q_1}$，$\forall_k=2,3,\cdots\cdots,n$，

$\therefore \frac{B^*}{H}\equiv 1 \pmod{q_1}$

令 $\frac{B^*}{H}=q_1T+1$，$T\in Z$

則 $\frac{SB^*}{d}=\frac{SB^*}{q_1H}=\frac{S}{q_1}(q_1T+1)=ST+\frac{S}{q_1}$

因 ST 爲整數，且 $1\leq S<q_1$，即 $\frac{SB^*}{d}$ 的小數部分爲 $\frac{S}{q_1}$

$\therefore \left[\frac{SB^*}{d}\right]=\frac{SB^*}{d}-\frac{S}{q_1}$

現在利用上面之預備定理作以下之推績：

$$\phi\left(\frac{SB}{q_1},B\right)=\phi(SB^*,B)$$

$$=SB^*-\sum_{1\leq i\leq n}\left[\frac{SB^*}{q_i}\right]+\sum_{1\leq i<j\leq n}\left[\frac{SB^*}{q_iq_j}\right]$$

$$-\sum_{1\leq i<j<k\leq n}\left[\frac{SB^*}{q_iq_jq_k}\right]+\cdots\cdots$$

由上面預備定理知，上式

$$=SB^*-\left(\Sigma\frac{SB^*}{q_i}-\frac{S}{q_1}C_0^{n-1}\right)+\left(\Sigma\frac{SB^*}{q_iq_j}\right.$$

$$\left.-\frac{S}{q_1}C_1^{n-1}\right)-\left(\Sigma\frac{SB^*}{q_iq_jq_k}-\frac{S}{q_1}C_2^{n-1}\right)+\cdots\cdots$$

$$=SB^*-\Sigma\frac{SB^*}{q_i}+\Sigma\frac{SB^*}{q_iq_j}-\Sigma\frac{SB^*}{q_iq_jq_k}+\cdots\cdots+\frac{S}{q_1}$$

$$\left[C_0^{n-1}-C_1^{n-1}+C_2^{n-1}-\cdots\cdots\right]$$

$$=SB^*\left[1-\Sigma\frac{1}{q_i}+\Sigma\frac{1}{q_iq_j}-\Sigma\frac{1}{q_iq_jq_k}+\cdots\right]+\frac{S}{q_1}\cdot O$$

$$=\frac{S}{q_1}\cdot B\left[1-\Sigma\frac{1}{q_i}+\Sigma\frac{1}{q_iq_j}-\Sigma\frac{1}{q_iq_jq_k}+\cdots\right]+O$$

$$=\frac{S}{q_1}\cdot B\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\left(1-\frac{1}{q_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q_n}\right)$$

$$=\frac{S}{q_1}\cdot\phi(B)$$ ……得證定理三

㈡現在看看下面例1、例2、例3、例4，由定理二可很快計算出例1與例2的$\phi$（A，B），由二等分法可很快計算出例3，由定理三的五等分法可很快計算出例4，如下表格：

| | A | B | $\phi$（A，B) | $A(1-\frac{1}{q_1})(1-\frac{1}{q_2})\cdots(1-\frac{1}{q_n})$ | 絕對誤差 |
|---|---|---|---|---|---|
| 例1 | 374424 | 7×11×13×17 | 253474 | 約 253473.83 | 0.17 |
| 例2 | 391291 | 7×11×13×17 | 264894 | 約 264892.28 | 1.72 |
| 例3 | 126565 | 2×3×5×11×13 | 28323 | 約 28322.24 | 0.76 |
| 例4 | 14498301 | 5×11×31×41×61 | 9792003 | 約 9792002.3 | 0.7 |

令$N=\phi(A,B)$

$$M=A\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\left(1-\frac{1}{q_2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{q_n}\right)$$

〔以下N，M均同此〕

今設計電腦程式，獲得大量之N，M數據，驚訝地發現N與M的絕對誤差均很小，現在來解釋其理由如下：

給A，$B=q_1q_2q_3\cdots\cdots q_n$（標準分解式）則

$$N=\phi(A,B)=A-\Sigma\left[\frac{A}{q_i}\right]+\Sigma\left[\frac{A}{q_iq_j}\right]-\Sigma\left[\frac{A}{q_iq_jq_k}\right]$$

$$+\cdots\cdots\text{（己式）}$$

$$M=\!=\!=\!=\!=A-\Sigma\frac{A}{q_i}+\Sigma\frac{A}{q_iq_j}-\Sigma\frac{A}{q_iq_jq_k}+\cdots\cdots\text{（庚式）}$$

比較（己式）與（庚式）之對應項，若某對應項之分母包含了某一個$q_i\nmid A$，則該對應項即產生誤差。

令P表（己式）與（庚式）之對應項中產生使$M<N$之誤差的總項數。

Q表（己式）與（庚式）之對應項中產生使$M>N$之誤差的總項數。

由下面預備定理3知$P-Q=0$或1

因此使$M<N$與$M>N$之誤差可"完美"地互相抵消，這應該是電腦數據中，N與M的絕對誤差均很小之原因。

預備定理3

給A與$B=q_1q_2\cdots q_n$（標準分解式），若$q_1$，$q_2$，…，$q_n$中有u個質因數不整除A，有v個整除A（$u+v=n$）

則$\phi(A,B)=A-\Sigma\left[\frac{A}{q_i}\right]+\Sigma\left[\frac{A}{q_iq_j}\right]-\Sigma\left[\frac{A}{q_iq_jq_k}\right]+\cdots$

（甲式，共$2^n$項）

自甲式中抽取分母恰含奇數個B之質因數之項，為

$-\Sigma\left[\frac{A}{q_i}\right]-\Sigma\left[\frac{A}{q_iq_jq_k}\right]\cdots\cdots$（乙式）共$2^{n-1}$項

自甲式中抽取分母恰含偶數個B之質因數之項，為

$\Sigma\left[\frac{A}{q_iq_j}\right]+\Sigma\left[\frac{A}{q_iq_jq_kq_l}\right]+\cdots\cdots$（丙式）共$2^{n-1}-1$項

令P表示乙式中〔 〕內不整除之總項數；Q表示丙式中〔 〕內不整除之總項數

則$P-Q=0$或1

證：(1)若$v=0$，即$q_1$，$q_2$，…，$q_n$均$\nmid A$，即A，B互質，則乙式中每一項〔 〕內均不整除。則$P=C_1^n+C_3^n+C_5^n+\cdots=2^{n-1}$

而丙式中每一項〔 〕內亦均不整除，則$Q=C_2^n+C_4^n+C_6^n+\cdots\cdots=2^{n-1}-1$

$\therefore P-Q=1$

(2)若$v\neq 0$，即$q_1$，$q_2$，…$q_n$中，有v個整除A，即A、B不互質

則$P=$（乙式之總項數）－（乙式中〔 〕內整除之總項數）

$=2^{n-1}-(C_1^v+C_3^v+C_5^v+\cdots\cdots)=2^{n-1}-2^{v-1}$

且$Q=$（丙式之總項數）－（丙式中〔 〕內整除之總項數）

$$=(2^{n-1}-1)-(C_2^v+C_4^v+C_6^v+\cdots\cdots)$$

$$=(2^{n-1}-1)-(2^{v-1}-1)=2^{n-1}-2^{v-1}$$

$$\therefore\quad P-Q=0$$

因此 $P-Q=\begin{cases}1\text{，當}A\text{，}B\text{互質}\\ \text{或}0\text{，當}A\text{，}B\text{不互質}\end{cases}$

現在我們順便可得下面二個定理與一個結論

定理四：

若$B=q_1q_2\cdots\cdots q_n$（標準分解式）固定，則 $\lim\limits_{A\to\infty}\frac{N}{M}=1$

其中$N=\phi(A，B)$，$M=A(1-\frac{1}{q_1})(1-\frac{1}{q_2})\cdots\cdots$

$$(1-\frac{1}{q_n})$$

定理五：

若$B=q_1q_2\cdots\cdots q_n$（標準分解式）固定

$P_A$ 表示由 1 至$A$中任取一整數，其與$B$互質之機率，則

$$\lim_{A\to\infty}P_A=(1-\frac{1}{q_1})(1-\frac{1}{q_2})\cdots\cdots(1-\frac{1}{q_n})$$

結論：

$M$應是$N$之良好預估值。即當$A$很大時，$\phi(A，B)\doteqdot$

$A(1-\frac{1}{q_1})(1-\frac{1}{q_2})\cdots\cdots(1-\frac{1}{q_n})$。

㈢由上面討論知道，$M$是$N$之良好預估值，那在什麼情形下，可保證$M=N$呢？即可完全躲開煩人的排客算法呢？

若$\phi(A，B)=A(1-\frac{1}{q_1})(1-\frac{1}{q_2})\cdots\cdots(1-\frac{1}{q_n})$

則$A\cdot\frac{q_1-1}{q_1}\cdot\frac{q_2-1}{q_2}\cdots\cdots\frac{q_n-1}{q_n}$ 必需爲整數，因此$M=N$之必要條件爲諸分母$q_1$，$q_2$，……$q_n$完全可被約分掉且$q_n\mid A$。

定義：

$x \geq 0$，令$\{x\} = x - [x]$，即$\{x\}$表示x之小數部分。

預備定理 4：

若$W \equiv 1 \pmod{q}$，則$\{\frac{WK}{q}\} = \{\frac{K}{q}\}$，對任一正整數K均成立。

預備定理 5：

給A，$B = q_1q_2q_3 \cdots\cdots q_n$，且某一個$q_k^* \mid B$

則$\phi(A, B) = \phi(A, \frac{B}{q_k^*}) - \phi(\frac{A}{q_k^*}, \frac{B}{q_k^*})$

定理六：

給A，$B = q_1q_2 \cdots\cdots q_n$ $(n \geq 2)$，若恰有一個$q_i$不整除A，且$q_i \mid (q_j - 1)$，對某個$j > i$，$(1 \leq i < j \leq n)$，則$M = N$。

定理七：

給A，$B = q_1q_2 \cdots\cdots q_n$ $(n \geq 3)$，若恰有二個$q_i$，$q_j$不整除A，且$q_iq_j \mid (q_\ell - 1)$，對某個$\ell > j$，$(1 \leq i < j < \ell \leq n)$，則$M = N$。

定理八：（涵蓋定理六與定理七）

> 給A，$B = q_1q_2 \cdots\cdots q_n$ $(n \geq m+1)$，若B恰有m個質因數不整除A，且此m個質因數均可整除“B的某一個質因數減1”，則$\phi(A, B) = A(1 - \frac{1}{q_1})(1 - \frac{1}{q_2}) \cdots\cdots (1 - \frac{1}{q_n})$

證明：（對m作歸納）

1. 當$n = m + 1$時，即A，$B = q_1q_2q_3 \cdots\cdots q_mq_{m+1}$由條件知需$q_1 \nmid A$，$q_2 \nmid A$，……，$q_m \nmid A$，$q_{m+1} \mid A$，且$(q_1q_2 \cdots q_m) \mid (q_{m+1} - 1)$

   令$A = q_{m+1}K$

   因$N = A - \Sigma[\frac{A}{q_i}] + \Sigma[\frac{A}{q_iq_j}] - \Sigma[\frac{A}{q_iq_jq_k}] + \cdots\cdots$

$$M = A - \Sigma \frac{A}{q_i} + \Sigma \frac{A}{q_i q_j} - \Sigma \frac{A}{q_i q_j q_k} + \cdots\cdots$$

$$\text{則} N - M = 0 + \sum_{1 \leq i \leq m+1} \left\{ \frac{A}{q_i} \right\} - \sum_{1 \leq i < j \leq m+1} \left\{ \frac{A}{q_i q_j} \right\}$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq m+1} \left\{ \frac{A}{q_i q_j q_k} \right\} \cdots\cdots$$

$$= 0 + \left( \sum_{1 \leq r \leq m} \left\{ \frac{A}{q_r} \right\} + \left\{ \frac{A}{q_{m+1}} \right\} \right)$$

$$- \left( \sum_{1 \leq r < s \leq m} \left\{ \frac{A}{q_r q_s} \right\} + \sum_{1 \leq u \leq m} \left\{ \frac{A}{q_{m+1} q_u} \right\} \right)$$

$$+ \left( \sum_{1 \leq r < s < t \leq m} \left\{ \frac{A}{q_r q_s q_t} \right\} + \sum_{1 \leq u < v \leq m} \left\{ \frac{A}{q_{m+1} q_u q_v} \right\} \right) - \cdots\cdots$$

$$= \Big( 0 + \sum_{1 \leq r \leq m} \left\{ \frac{A}{q_r} \right\} - \sum_{1 \leq r < s \leq m} \left\{ \frac{A}{q_r q_s} \right\}$$

$$+ \sum_{1 \leq r < s < t \leq m} \left\{ \frac{A}{q_r q_s q_t} \right\} \underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}_{(\text{共 } 2^m \text{ 項})} \Big)$$

$$+ \Big( \left\{ \frac{A}{q_{m+1}} \right\} - \sum_{1 \leq u \leq m} \left\{ \frac{A}{q_{m+1} q_u} \right\}$$

$$+ \sum_{1 \leq u < v \leq m} \left\{ \frac{A}{q_{m+1} q_u q_v} \right\} \underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}_{(\text{共 } 2^m \text{ 項})} \Big)$$

因 $q_{m+1} \mid A$ 且 $(q_1 \cdot q_2 \cdot \cdots q_m) \mid (q_{m+1} - 1)$，由預備定理 4 知上式

$$= \Big( 0 + \sum_{1 \leq r \leq m} \left\{ \frac{A}{q_r} \right\} - \sum_{1 \leq r < s \leq m} \left\{ \frac{A}{q_r q_s} \right\}$$

$$+ \sum_{1 \leq r < s < t \leq m} \left\{ \frac{A}{q_r q_s q_t} \right\} - \underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}_{(\text{共 } 2^{m-1} \text{ 項})} \Big)$$

$$+ \Big( 0 - \sum_{1 \leq u \leq m} \left\{ \frac{A}{q_u} \right\} + \sum_{1 \leq u < v \leq m} \left\{ \frac{A}{q_u q_v} \right\}$$

$$- \underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}_{(\text{共 } 2^{m-1} \text{ 項})} \Big)$$

$= 0$，故 $n = m + 1$ 時成立

2. 假設 $n = k \geq m + 1$ 時成立

今 $n = k + 1$ 時

若$B = q_1q_2\cdots\cdots q_kq_{k+1}$中，恰有m個$q_{\alpha_1}$，$q_{\alpha_2}$，…，$q_{\alpha_m}$均不整除A，且$(q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}\cdots q_{\alpha_m}) \mid (q\ \ -1)$，對某個$\ell$，其中$(1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots\cdots < \alpha_m < \ell \leq k+1)$

我們取一個$q_k^*$異於$q_{\alpha_1}$，$q_{\alpha_2}$，…$q_{\alpha_m}$，$q_\ell$　則$q_k^* \mid A$

由預備定理5知

$$\phi(A, B) = \phi\left(A, \frac{B}{q_k^*}\right) - \phi\left(\frac{A}{q_k^*}, \frac{B}{q_k^*}\right)$$

因「A對$\dfrac{B}{q_k^*}$」與「$\dfrac{A}{q_k^*}$對$\dfrac{B}{q_k^*}$」均滿足上面假設$n = k$時，使M＝N成立之條件，故上式

$$\begin{aligned}\phi(A, B) = {} & A\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\left(1-\frac{1}{q_2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{q_{k-1}^*}\right) \\ & \left(1-\frac{1}{q_{k+1}^*}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{q_{k+1}}\right) \\ & -\frac{A}{q_k^*}\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\left(1-\frac{1}{q_2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{q_{k-1}^*}\right) \\ & \left(1-\frac{1}{q_{k+1}^*}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{q_{k+1}}\right) \\ = {} & A\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\left(1-\frac{1}{q_2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{q_n}\right)\end{aligned}$$

$\therefore n = k+1$時亦成立，得證定理八

## 四、結　論

給A，$B = q_1q_2\cdots q_n$，考慮$A \cdot \dfrac{q_1-1}{q_1} \cdot \dfrac{q_2-1}{q_2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{q_n-1}{q_n}$式值中，諸分母$q_1$，$q_2$，…，$q_n$中，不整除A者可以“一次”被某一個分子約分掉，則

$$\phi(A, B) = A \cdot \left(1-\frac{1}{q_1}\right)\left(1-\frac{1}{q_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q_n}\right)$$

## 評　語

從習題的解法中的微少差異產生探討的動機，具有優秀的數學觀

察力。

在處理問題時，態度非常愼密週延。

雖然問題的範圍小，但是已做最佳的處理。

利用電腦實例檢驗證明的結果，也是一種數學研究的趨勢。