高斯平面歷險記

高中組數學科第二名

省立台中一中　　　　　　　　　　　　　　作　　者：陳之望、陳孟竹

指導教師：馬立礎、陳聰輝

一、研究動機

於四十三期牛頓雜誌上的一篇「碎形幾何學之美」，引起我們極大的興趣，尤其在於牛頓法與方程式之複數根以及夢幻般美妙圖形之關係。以下便是我們的探討。

二、研究過程

(一)碎形（Fractal）：

在高斯平面上我們將逼近不同根（以牛頓法）之複數以不同的顏色標出，如此畫出的圖形稱爲碎形圖，一般而言，n次方程式有n個顏色分別佔有高斯平面。

(二)曲面的形成：

在高斯平面上方造一曲面使得在根之處有極小值，同時我們以水往低處流的精神找根。

於三度空間中定義曲面Z：$Z=|f(x+yi)|^2$ 。我們之所以冠上平方是因爲如此恰可除掉令人討厭的根號。

$x-y$平面表高斯平面，顯然若 $f(\alpha)\in R[\alpha]$ 則曲面Z對 $x-z$ 平面對稱。

1. 在 $x-y$ 平面上取一直線 t 過點 $(x_0, y_0, 0)$，其方向向量爲 $\vec{u}=(\cos\theta, \sin\theta, 0)$。設一包含此直線且平行 z 軸之平面在曲面 z 上割出一曲線，如下圖：

則此曲線之導式爲：$\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}$

$$=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta \cdots(\text{2-1 式})$$

$(\because x=x_0+t\cos\theta$，

$y=y_0+t\sin\theta)$

令 $\nabla z=(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y})$，

$\vec{u}=(\cos\theta,\sin\theta)$，

$\frac{dz}{dt}=\nabla z\cdot\vec{u}$

故 $\vec{u}$ 和 ∇z 同向時，$\frac{dz}{dt}$ 有極大值，換句話說，此方向最為傾斜。

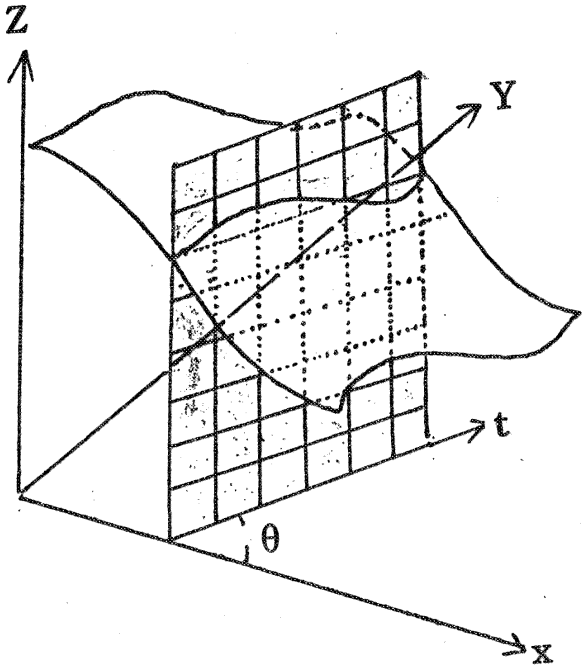


圖 一

若一直順著最陡處往下走必可走至山谷（或者切平面為水平處），假設目前位置在高斯平面之投影為 α_k，則下一步位置在高斯平面之投影為：

$$\alpha_{k+1}=\alpha_k-\frac{\Delta\ell}{\left|\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}i\right|}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}i\right) \cdots(\text{2-2 式})$$

$\Delta\ell$ 之意義相當於「步伐在高斯平面投影之大小」，當 $\Delta\ell$ 取得愈小，則遞迴的極限愈接近某個山谷（或者切平面為水平處）在高斯平面的投影。

2. 因根所在處使 $Z=|f(x+yi)|^2=0$，且 Z 恆 ≥ 0，故根必是山谷。在一元 n 次方程式中，若依此方法已找到 n 個使 $Z=0$ 的山谷，可知我們已解出此方程式所有的根。但上述方法當 $\Delta\ell$ 取得太小時甚費時，且有可能逼近其他非根的地方（即 $Z\neq 0$ 且切平面是水平的地方）。因此做了如下的改良：

假設目前在曲面 Z 上的位置為 $P_j(x_j, y_j, z_j)$，我們過點 P_j 找一條最傾斜的切線，延長交 $x-y$ 平面於 $Q_{j+1}(x_{j+1}$，

y_{j+1}，0），再從Q_{j+1}作平行Z軸之線交曲面Z於P_{j+1}（x_{j+1}，y_{j+1}，z_{j+1}），作爲新的位置。一直重複上述步驟。

令$g_x=\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$g_y=\dfrac{\partial z}{\partial y}$，因此假設此切線方向向量爲（$g_x$，$g_y$，$g_z$）因此三向量：（1，0，$g_x$）、（0，1，$g_y$）、（$g_x$，$g_y$，$g_z$）共切平面

$$\text{故}\begin{vmatrix} 1 & 0 & g_x \\ 0 & 1 & g_y \\ g_x & g_y & g_z \end{vmatrix}=0 \qquad g_z=g_x^2+g_y^2 \cdots\cdots\cdots\cdots（2\text{-}3\text{式}）$$

$$\text{故此切線方程式爲：}\begin{cases} x=x_j+g_x s \\ y=y_j+g_y s \\ z=z_j+g_z s \end{cases}$$

與x－y平面交點（$x_j-\dfrac{z_j}{g_z}g_x$，$y_j-\dfrac{z_j}{g_z}g_y$，0）

令$\alpha_j=x_j+y_j i$，則：

$$\alpha_{j+1}=\alpha_j-\frac{z_j}{g_z}(g_x+ig_y)=\alpha_j-\frac{z_j(g_x+ig_y)}{(g_x+ig_y)(g_x-ig_y)}$$

$$=\alpha_j-\frac{z_j}{g_x-ig_y} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots（2\text{-}4\text{式}）$$

㈢（2-4式）和牛頓法的關係：

（2-4式）初看之下與牛頓法極爲相似：$x_{j+1}=x_j-\dfrac{f(x_j)}{f'(x_j)}$。若將實數x拓展爲$\alpha\in C$，那麼$\dfrac{z}{g_x-ig_y}$和$\dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$之關係爲何？

1.爲方便，記$A=A(x,y)$，$B=B(x,y)$，$A_x=\dfrac{\partial A(x,y)}{\partial x}$

$A_y=\dfrac{\partial A(x,y)}{\partial y}$，$B_x$、$B_y$類同。令$\alpha=x+yi$，x、$y\in R$

$f(\alpha)=f(x+yi)=A+iB \quad \because Z=A^2+B^2$

$\therefore g_x=\dfrac{\partial z}{\partial x}=2AA_x+2BB_x$，$g_y=\dfrac{\partial z}{\partial y}=2AA_y+2BB_y$

又 $A_y + iB_y = \dfrac{\partial f(x+yi)}{\partial y} = \dfrac{df(\alpha)}{d\alpha} \cdot \dfrac{\partial \alpha}{\partial y} = f'(\alpha) \cdot i$

$$= (A_x + iB_x) \cdot i = -B_x + iA_x$$

得 $\begin{cases} A_y = -B_x \\ B_y = A_x \end{cases}$ ………………（3-1 式）

故 $\begin{cases} g_x = 2AA_x + 2BB_x \\ g_y = 2A_xB - 2AB_x \end{cases}$ ………（3-2 式）

$$\frac{Z}{g_x - ig_y} = \frac{A^2 + B^2}{2\left[(AA_x + BB_x) - i(A_xB - AB_x)\right]}$$

$$= \frac{(A+Bi)(A-Bi)}{2(A_x + iB_x)(A - iB)} = \frac{A+Bi}{2(A_x + iB_x)}$$

$$= \frac{f(\alpha)}{2f'(\alpha)}$$

∴（2-4 式）和牛頓法的關係爲：

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{z_j}{g_x - ig_y} \equiv \alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{f(\alpha_j)}{2f'(\alpha_j)} \cdots \text{(3-3式)}$$

若將Z定義成 $Z = |f(x+yi)|$ 則 $\dfrac{z_j}{g_x - ig_y} = \dfrac{f(\alpha_j)}{f'(\alpha_j)}$。如此我們便找到了複數下牛頓法的幾何意義。

2\. 考慮此最陡切線：$L \equiv \dfrac{x - x_j}{g_x} = \dfrac{y - y_j}{g_y} = \dfrac{kz_j - z_j}{g_z}$ 直觀上 $0 \leq k < 1$ 都可逼近根，例如當 $k = 1/2$ 即相當於在切線段長的 1/2 處作一次遞迴。

令 $m = \dfrac{1}{1-k}$，$z = |f(x+yi)|$，$\alpha_j = x_j + y_j i$，則：

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{z_j(g_x + ig_y)}{\frac{1}{1-k} g_z} = \alpha_j - \frac{f(\alpha_j)}{mf'(\alpha_j)}$$

故當 $m \geq 1$ 時都有合理的直觀解釋。根據實驗，在 $m \geq 1$ 時，若m愈大則殘形愈小而趨於消失，顏色之間的分野也愈平滑和清晰。此分野即爲後謂之邊界。在 $0 < m < 1$ 時，α 將不規則亂跳。而當 $m < 0$ 時，因 $k > 1$，相當於「沿最陡的切線向上

遮迴」，通常將愈跑愈遠。

3.將 $z=|f(x+yi)|$ 定義的話，根所在之山谷將是無切平面之尖山谷。爲使曲面 z 平滑，此後 z 的意義將採用 $z=|f(x+yi)|^2$。

㈣朱利亞集合：

以牛頓法反覆計算却不接近根的複數所成之集合，其成員爲：

1.非根但切平面水平之處：

這類使 $g_x=g_y=0$，$z\neq 0$，由（3-3式）可知 $\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ 必無意義，若假設 $f(\alpha)=0$ 和 $f'(\alpha)=0$ 無共根，則 $f(\alpha_j)\neq 0$ 且 $f'(\alpha_j)=0$。反之，若 $f'(\alpha_j)=0$ 且 $f(\alpha_j)\neq 0$ 則遮迴式必找不到對應的 α_{j+1}，幾何意義是在該點找不到切線會和高斯平面相交，而在一曲面上亦唯有這類點有這性質。

設 $f(x)$ 是n次多項式，因 $f(x)$ 是 $n-1$ 次，故這類點至多有 $n-1$ 個。因此，在曲面 z 上絕不會有平山脊、平山溝、高原、平原等地形，因爲在這些地形都有無限多地點使切平面水平。同時，我們在此也提供了找非根但切平面爲水平之處之方法，即解 $f'(\alpha)=0$ 之根且不使 $f(\alpha)=0$。

2.循環數：

依遮迴式得數列 $\alpha_0\alpha_1\cdots\cdots\alpha_k\cdots\cdots$，若 $\alpha_0=\alpha_k$ 且 k 是最小的整數則稱 α_0 是 k 次循環數。顯然，若 $\alpha_k=\alpha'_{k'}$，則 $\alpha_{k+j}=\alpha'_{k'+j}$，故 α_0 是某次循環數則 α_0 不是其他次循環數。

3.遮迴至非根但切平面水平處之複數：

依遮迴式得數列 $\alpha_0\alpha_1\cdots\cdots\alpha_{k-1}\alpha_k$。但 $f(\alpha_k)\neq 0$ 且 $f'(\alpha_k)=0$。稱 α_0 爲 k 次遮迴數。我們提供一個找 k 次遮迴數有效的方法：

⑴依照1.所提的方法找非根但切平面爲水平之處所對應之複數 α_0。

⑵解 α_1 使 $\alpha_1-\frac{f(\alpha_1)}{2f'(\alpha_1)}=\alpha_0$，$\alpha_1$ 即爲一次遮迴數，此時k

$=1$。

(3)解 α_{k+1} 使 $\alpha_{k+1}-\dfrac{f(\alpha_{k+1})}{2f'(\alpha_{k+1})}=\alpha_k$，$\alpha_{k+1}$ 即爲 $k+1$ 次遞迴數。重複此步驟。

4.不循環、不逼近任何數的數：

此數的存在和個數都是疑問，留給有志之士探求。

例：$f(\alpha)=\alpha^3-1$

$$\begin{cases}\alpha_0=0.5386086725+0.4172044837\,i\\ \alpha_1=0.5386086725-0.4172044837\,i\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha_0=-0.6306140177+0.2578465512\,i\\ \alpha_1=\ \ 0.9200534524+0.6750510349\,i\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha_0=-0.6306140177-0.2578465512\,i\\ \alpha_1=\ \ 0.9200534524-0.6750510349\,i\end{cases}$$

以上遞迴之結果爲 $<\alpha_0\alpha_1\alpha_0\alpha_1\cdots\cdots\cdots>$

(五)分辨非根而切平面爲水平之處之地形：

簡記 $g_{xx}=\dfrac{\partial g_x}{\partial x}$，$g_{yy}=\dfrac{\partial g_y}{\partial y}$。由偏微分定理 $g_{xy}=g_{yx}$

（2-1式）對 t 微分得：

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{1}{2}[(g_{xx}-g_{yy})\cos 2\theta+2g_{xy}\sin 2\theta]$$

故 $\min=\dfrac{(g_{xx}+g_{yy})-\sqrt{(g_{xx}-g_{yy})^2+4g_{xy}^2}}{2}$

$$\max=\frac{(g_{xx}+g_{yy})+\sqrt{(g_{xx}-g_{yy})^2+4g_{xy}^2}}{2}$$

簡記 $A_{xx}=\dfrac{\partial A_x}{\partial x}$，$A_{xy}=\dfrac{\partial A_x}{\partial y}$，$A_{yy}=\dfrac{\partial A_y}{\partial y}$，$B_{xx}$、$B_{xy}$、$B_{yy}$ 類同。

$A_{xx}+iB_{xx}=\dfrac{\partial f'(\alpha)}{\partial x}=f''(\alpha)$。由（3-1式）、（3-2式）化簡（5-1式）

$$\frac{1}{2}g_{xx}=A_x^2+B_x^2+AA_{xx}+BB_{xx}$$

$$\frac{1}{2}g_{yy} = A_x^2 + B_x^2 - AA_{xx} - BB_{xx}$$

$$\frac{1}{2}g_{xy} = \frac{1}{2}g_{yx} = A_{xx}B - AB_{xx}$$

故 $\min = 2\left[(A_x^2 + B_x^2) - \sqrt{(A^2+B^2)(A_{xx}^2 + B_{xx}^2)}\right]$

$$= 2(A_x^2 + B_x^2) - 2|f(\alpha)| \cdot |f''(\alpha)|$$

$$\mathrm{man} = 2\left[(A_x^2 + B_x^2) + \sqrt{(A^2+B^2)(A_{xx}^2 + B_{xx}^2)}\right]$$

$$= 2(A_x^2 + B_x^2) + 2|f(\alpha)| \cdot |f''(\alpha)|$$

因切平面水平故 $A_x = B_x = 0$ ，故極大極小值互相異號。我們知道若極小值為負且極大值為正則此切平面水平之處必是鞍點，因而不禁猜測是否非根但切平面水平之處必是鞍點，對於曲面Z等高圖之觀察更加強此信念。

以下將證明：若某點使 $Z \neq 0$ 且 1 ，2……m－1 階導數為零而m階導數不為零，該點有m葉向上m葉向下。

假設 $f(\alpha) \neq 0$ 而一階導數為零，二階導數不為零，依泰勒展開式

$$f(\alpha+s) = f(\alpha) + \frac{s^2}{2i}f''(\alpha) + \frac{s^3}{3i}f'''(\alpha) + \cdots + \frac{s^n}{ni}f^{(n)}(\alpha)$$

因 $\lim\limits_{s\to 0} \dfrac{f(\alpha+s)}{f(\alpha) + \frac{s^2}{2i}f''(\alpha)} = 1$ 故可找到夠小的 s 使：

$$f(\alpha+s) \doteqdot f(\alpha) + \frac{s^2}{2i}f''(\alpha)$$

因 $f(\alpha) \neq 0$ 故可找到一圓使圓心為原點，半徑為 $|f(\alpha)|$ 。令 $s = re^{i\theta}$ ，r 夠小而 θ 由零到 2π 連續變化。當 θ 由零到 π 則 $f(\alpha+s)$ 相當於以 $f(\alpha)$ 為圓心畫圓，半徑為 $\frac{r^2}{2i}|f''(\alpha)|$ 。顯然這一小圈和剛才所畫的圓有二交點。因此，若 θ 由零到 2π 連續變化，凡是比 $|f(\alpha)|$ 高之部分將出現二次，低部分亦如是，換句話說，有二葉向上二葉向下。

同法可證明完全此定理。

㈥陡線和邊界：

1.考慮（ 2-2 式）的幾何意義，得知曲面Z上任意起始位置遞迴到

最後一定在距離切平面水平之處約$\Delta\ell$之處，因此若$\Delta\ell$趨於零則（2-2式）之極限應爲根山谷或鞍點。假設α_j爲曲面Z上一點p_j在高斯平面的投影，則$p_0 p_1 p_2 \cdots\cdots$形成一折線，當$\Delta\ell$趨於零成爲一平滑曲線，定義爲陡線。特稱過鞍點的陡線爲邊界。陡線除了在根所在之山谷或鞍點外絕不相交，因爲除了這些點以外的點皆僅有一個最陡方向。因此沒有陡線會越過邊界。

2. 爲方便，以下所謂之陡線或邊界乃指其在高斯平面上之投影觀察圖二可知當$f(\alpha+s)$和$f(\alpha)$同向時，$|f(\alpha+s)|-|f(\alpha)|$有極大或極小。由(五)的討論知此時$\frac{s^m}{ni} f^{(m)}(\alpha)=kf(\alpha)$，$k>0$。凡使$s^m=k'\frac{f(\alpha)}{f^{(m)}(\alpha)}$，$k'>0$的s的方向即爲邊界的方向，其中$\alpha$爲鞍點在高斯平面上的投影。我們藉（2-2式）可畫出陡線，更可由上式及反程序$\beta_{k+1}=\beta_k\frac{\Delta\ell(\bar{g_x+ig_y})}{|g_x+ig_y|}$由鞍點出發畫出邊界。

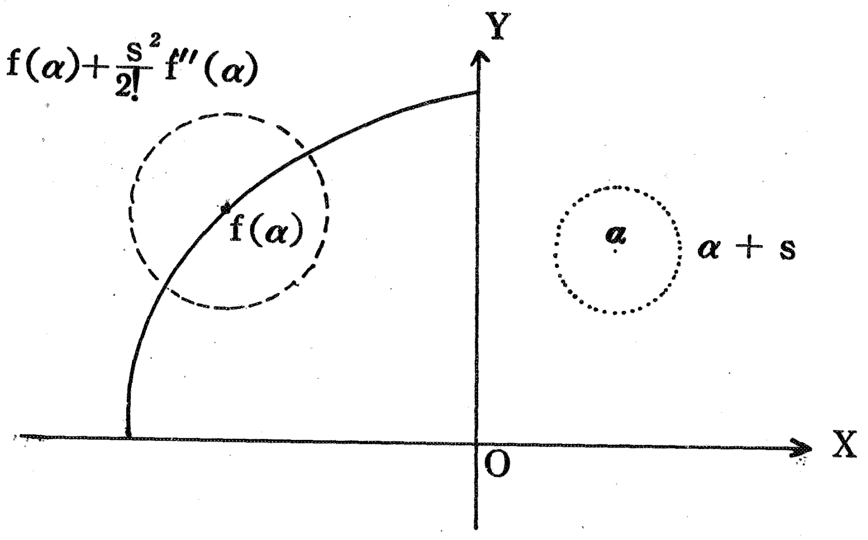


圖　二

3. 在高斯平面上定義一向量場$E(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$，由上之討論知其方向爲過$\alpha$之陡線在$\alpha$的切線方向。至於大小，通常$\alpha$愈近鞍點在高斯平面的投影，其值愈大，因爲在鞍點附近切平面都相當水平，最陡的切線的切線段長必然不短。

4. 邊界分割了高斯平面爲數個區域。當位置α在邊界附近時，常

越過邊界而跑到別的區域，因而趨近非本區域內的根，同樣的事也會發生在越界的複數，可以想見的是在邊界附近一定顏色雜布，此即碎形。

(七)邊界的相交：

邊界之相交與否似乎決定兩種形態的碎形，我們無法證明此推測雖然它適用我們所有的實例。因此我們轉而研究邊界相交的條件：

1. 想像一動點在某陡線上，位置是 α，速度是 $\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$，因切線方向是速度方向，則：

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\text{，}\quad t\in R \text{ 相當於時間，} \alpha\in C \text{ 相當於位置}$$

$$\therefore \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}\,d\alpha = dt \quad\Rightarrow\quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}\,d\alpha=\int_0^t dt$$

$$\Rightarrow\quad \ell n\frac{f(\alpha_2)}{f(\alpha_1)} = t+2k\pi i$$

$$\Rightarrow\quad \frac{f(\alpha_2)}{f(\alpha_1)} = e^t > 0$$

故若 α_2 在過 α_1 的陡線上則 $\frac{f(\alpha_2)}{f(\alpha_1)}>0$。換句話說，若 $\frac{f(\alpha_2)}{f(\alpha_1)}$ 不是實數或小於等於零則 α_2 不在過 α_1 的陡線上。

2. 考慮所有任意兩個鞍點投影 α_2 和 α_1，若符合上述條件，則 α_2 不在過 α_1 的邊界。又因邊界之交點必是鞍點，換句話說，過 α_2 的邊界和過 α_1 的邊界不相交。（如下頁圖）

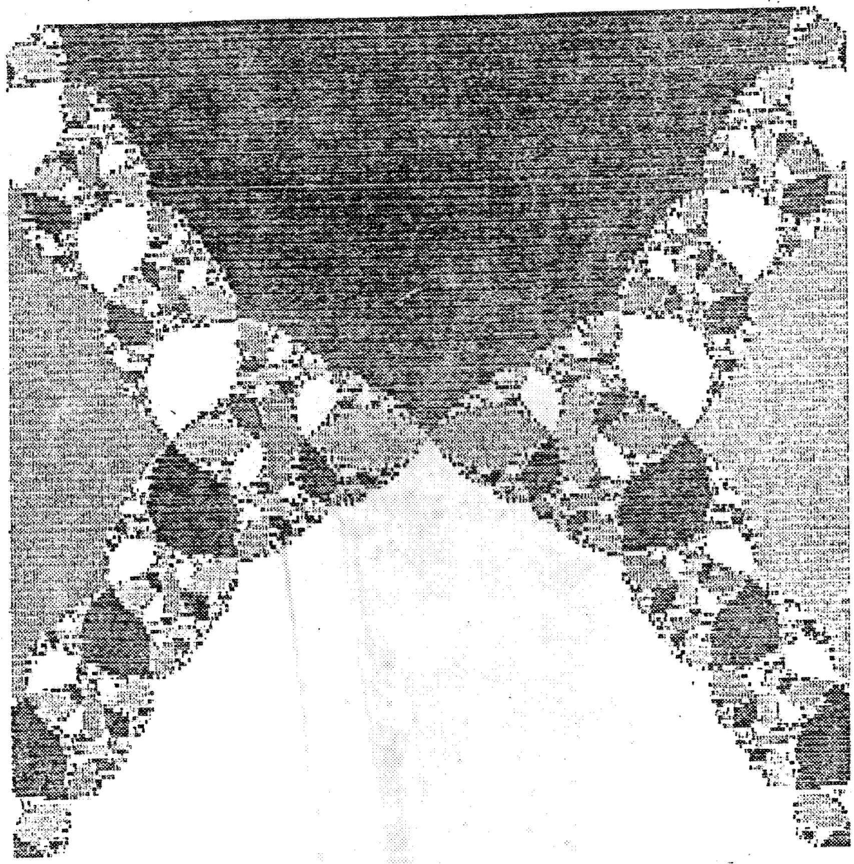
三、參考資料

(一)數學之內容方法與意義(二)　徐氏基金會出版

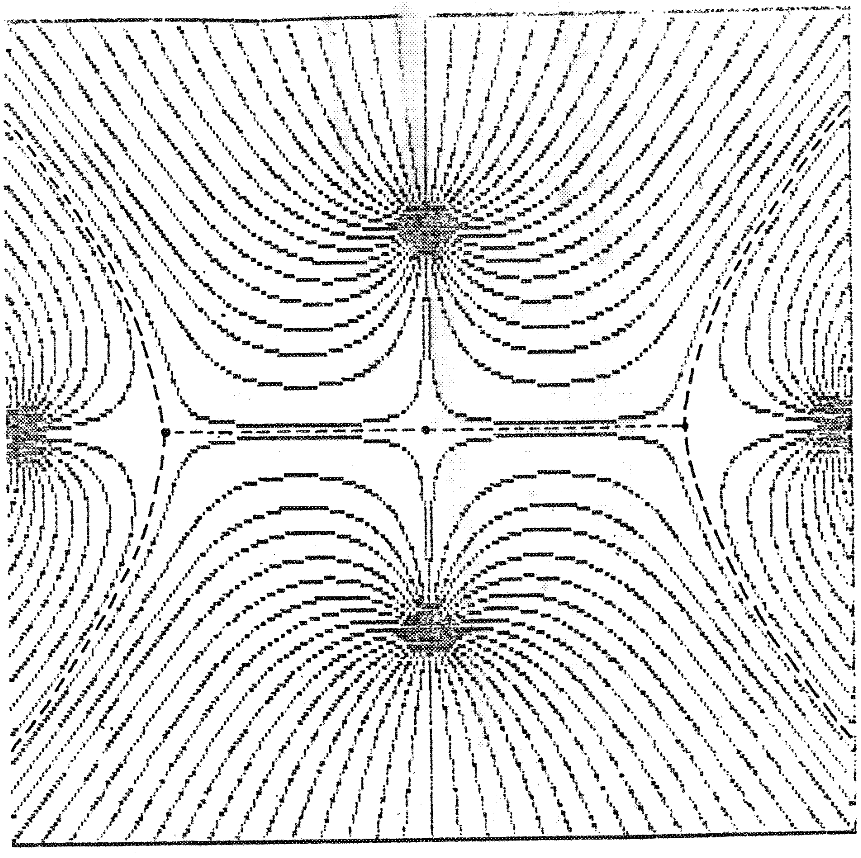
(二)牛頓第四十三期。

評　語

運用 $|f(z)|^2$ 的函數立體圖形，解釋牛頓法可以運用在多項式方程式求根的理由。具有優秀的幾何直覺。



$f(\alpha)=\alpha^4-3\alpha^2-4$ 之碎形圖與陡線圖



利用電腦找尋在牛頓求根過程會產生的各種現象。用梯度向量的變化解釋各種現象產生的理由，從而對這些現象作了分類。

因此雖然沒有什麼漂亮的定理，但是的確是這種題材的漂亮的處理。

例如說：比牛頓雜誌所介紹的要好得多…！