複底與殘形幾何

高中組數學科第一名

建國中學

作　　者：蔡振中、蔡岱朋
李逸元、蔡振家

指導教師：傅銘東

一、複底算則

我們都知道，給定任一整數 $n \in N$，都可唯一地被表示爲如下的形式：

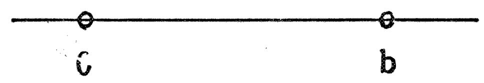
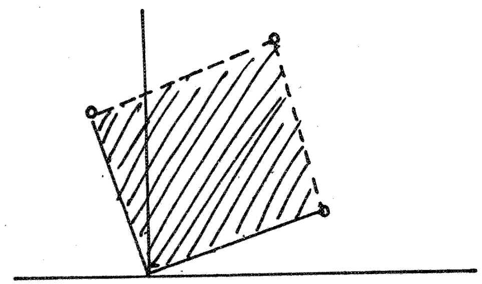
$$n = a_0 + a_1 b + a_2 \times b^2 + \cdots\cdots + a_k \times b^k$$

其中 $a_t \in D_b^N = \{0, 1, 2, \cdots\cdots b-1\}$，b 爲給定之一自然數，我們稱此爲一以基底 b，digit 集 D_N^b 的表示法（或稱進位法），如上所述，當 $b \in N$ 時，以 D_b^N 爲 digit 集之表示法可以表示所有正整數，而當 b 爲負數時，以 D_b^N 爲 digit 集卻可表示所有的整數，我們很自然地便會接著想，當 b 爲一虛數時，將會產生什麼樣的結果？以此想法爲出發點，立刻出現了許多有趣的問題。

(一)首先我們面臨的第一個問題是如何取 digit 集，我們知道，若 D 中元素構成一完全餘數系統，則此表示法必定唯一，但未必能表示所有的高斯整數，Katai 發現了當 $b = m + ni$，$m, n \neq 0$ 時，$D_b^N = \{0, 1, \cdots\cdots, |b|^2 - 1\}$ 正好爲一完全餘數系統，在其論文中並證明了此表示法能表示所有高斯整數的充要條件，不過我們覺得；訂 D_b^N 爲 digit 集並非最自然的方法，因此我們另訂一新的 digit 集 D_b^S 如下：

$$D_b^S = \{Z \mid 0 \leq \mathrm{Im}\left(\frac{z}{b}\right), \mathrm{Re}\left(\frac{z}{b}\right) < 1, Z \in Zc\}$$

如此選取的理由可由下頁之性質對照表看出。

b 的範圍	$b \in \mathbb{Z}$	$b \in \mathbb{Z}'$
D 的範圍	$D = \{x \mid 0 \leq \frac{x}{b} < 1,\ x \in Z\}$	$\{x \mid 0 \leq \mathrm{Im}(\frac{x}{b}),\ \mathrm{Re}(\frac{x}{b}) < 1,\ x \in \mathbb{Z}e\}$
D 在高斯平面（數線上）的形狀	 長 b 之線段	 面積 $\lvert b\rvert^2$ 之正方形
填滿高斯平面之條件	$b \leq 0$	$\mathrm{Re}(b) \leq 0$

由上我們可以看出，$b \in Z$ 的情形可完全被包含於 $b \in D$ 的情形裏。

(二)我們在小學都學過如何對兩個以十進位表示的自然數進行四則運算，那麼對兩個以上述表示法表示的自然數，我們要如何對其進行四則運算？爲解決這個問題，我們製作了類似於九九乘法表的digit乘法表，並找出進行加、減、乘的方法，但詳細的運算步驟在此無法敍述，有興趣的讀者可以自己來試試看。

(三)若一表示法以 $b = 3$ 爲基底，$\{-1, 0, 1\}$ 爲其digit 集，則我們可證出此表示法可表示所有整數，由此引發了兩個問題①給定一已知之基底 b 與 digit 集 D，我們要如何判斷其能否表示所有的高斯整數，②給定一基底 b，我們可否找到一 digit 集 D，使此表示法可唯一地表出所有高斯整數。

對於問題①，我們發展了一定理作爲其判斷法則：

定義：連續digit 集 D^c_b，凡一digit集中之元素可用長度 1 之線段連接起來者，稱連續digit 集。

定理 1：以 b 爲底，取一 D^c_b 爲digit集，則此表示法能塡滿整個平面之充要條件爲能塡所有的 Z，$Z \in \{ z \mid |z| \leq |b| + 1, z \in \mathbb{Z}c \}$

由上述定理，我們不難看出，只要 b 滿足 $|b| > 2$，$\mathrm{Re}(b) \geq 0$ 二條件，皆可找到一digit 集，使其能表示所有高斯整數。

二、複底與殘形

我們知道，以 $b = 1 + i$，D^N_b 爲digit集之表示法無法塡滿整個，但若我們在平面畫出其所能塡滿的部分，且每多塡滿一階即將其尺度縮小 $\sqrt{2}$ 倍，經過無限多次步驟，則會出現一殘形，此類圖形曾經Mendelbrot 與Gilbert 研究過，以下我們將討論其它由複底表示法衍生出來的殘形。

定義 4：不完全digit 集 $\mathcal{A}$：將一由完全餘數系統所組成之集合減去若干元素後所得之集合，稱之爲不完全digit 集 $\mathcal{A}$。

很顯然的，當一種表示法以基底 b 及不完全 digit 集 $\mathcal{A}$ 組成時，

其所能塡滿部分的圖形，必定布滿大坑小洞，而成爲不滿二維的殘形。

在一般情況我們有如下的定理以計算其維數。

定理四：以基底 b，不全全digit 集$\mathscr{D}$所成之表示法，在平面上所形成的殘形其維數D爲

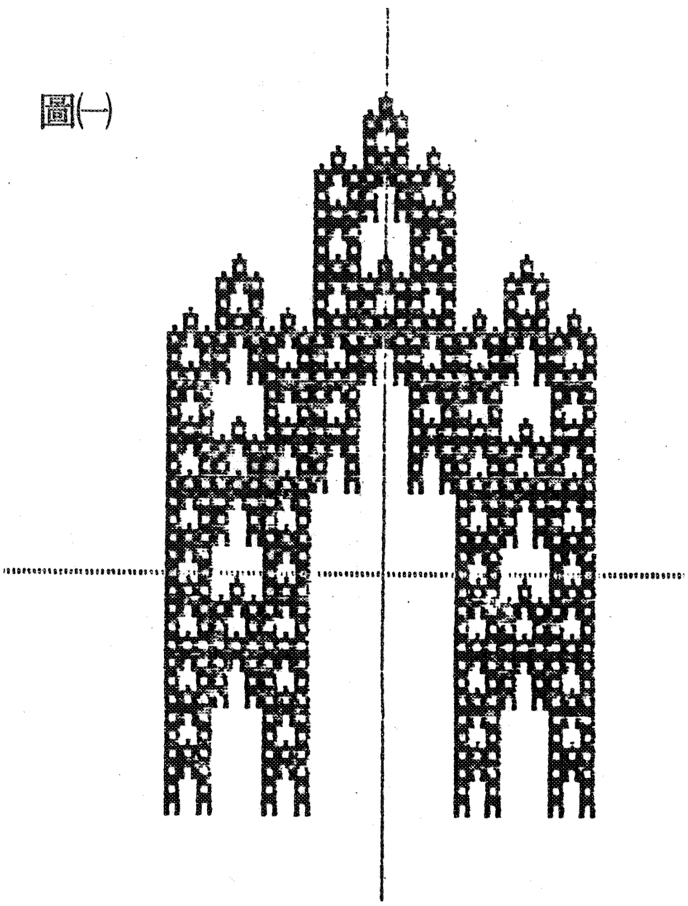
$$D=\frac{\log(N(\mathscr{D}))}{\log(|b|)} \qquad (N(\mathscr{D})\text{爲}\mathscr{D}\text{中之元素})$$

證明：因N階殘形與第N＋1階相似，其線比例S＝｜b｜，而第N＋1階殘形爲由N（$\mathscr{D}$）個N階殘形所疊成，故維數

$$D=\frac{\log(N(\mathscr{D}))}{\log(|b|)}$$

如所附圖形㈠㈡㈢㈣，其表示法之digit集皆爲不完全digit集。

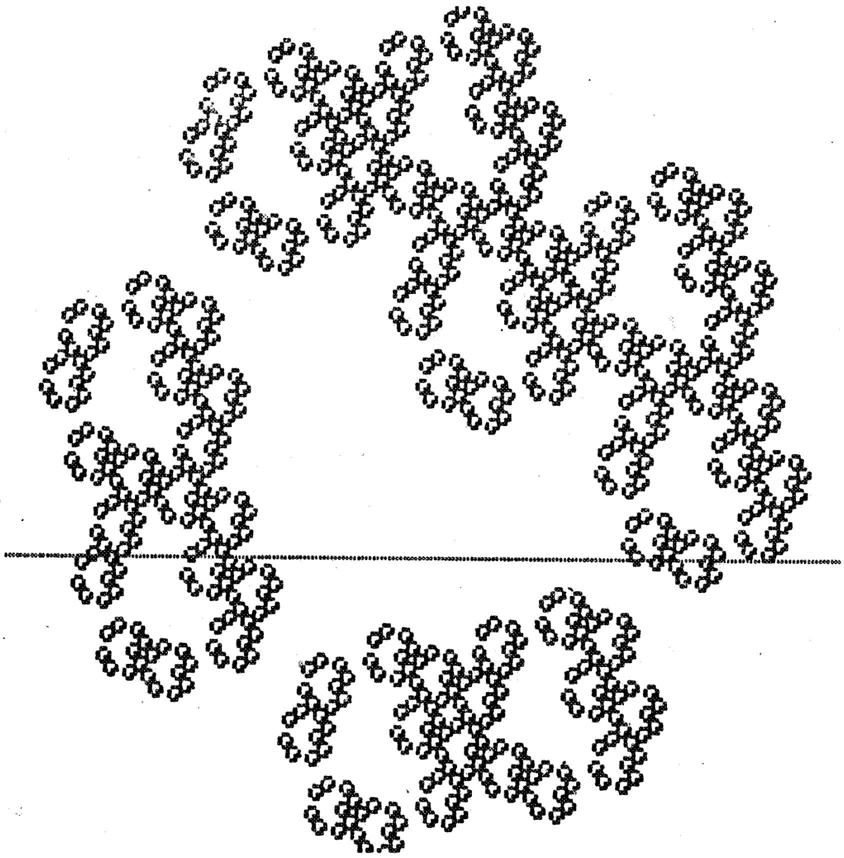
圖㈠



b＝3　　4階

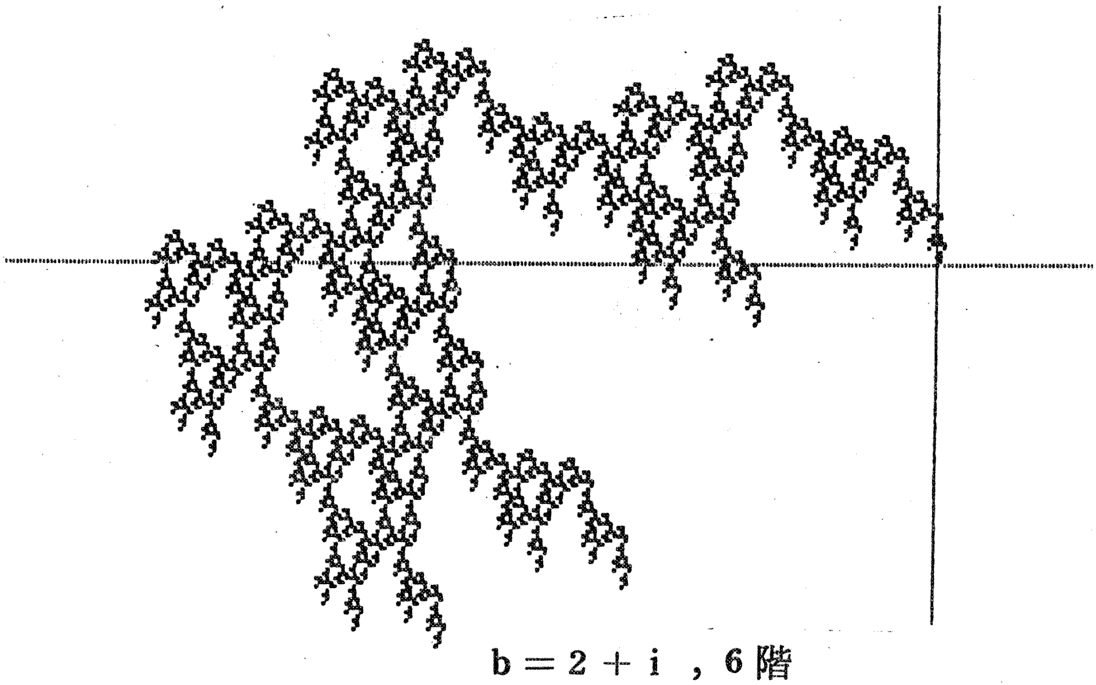
D＝{ 2i , -1+i , 1+i , -1 , 1 , -1-i , 1-i }

圖(二)



b = 3 + 2i ，4 階

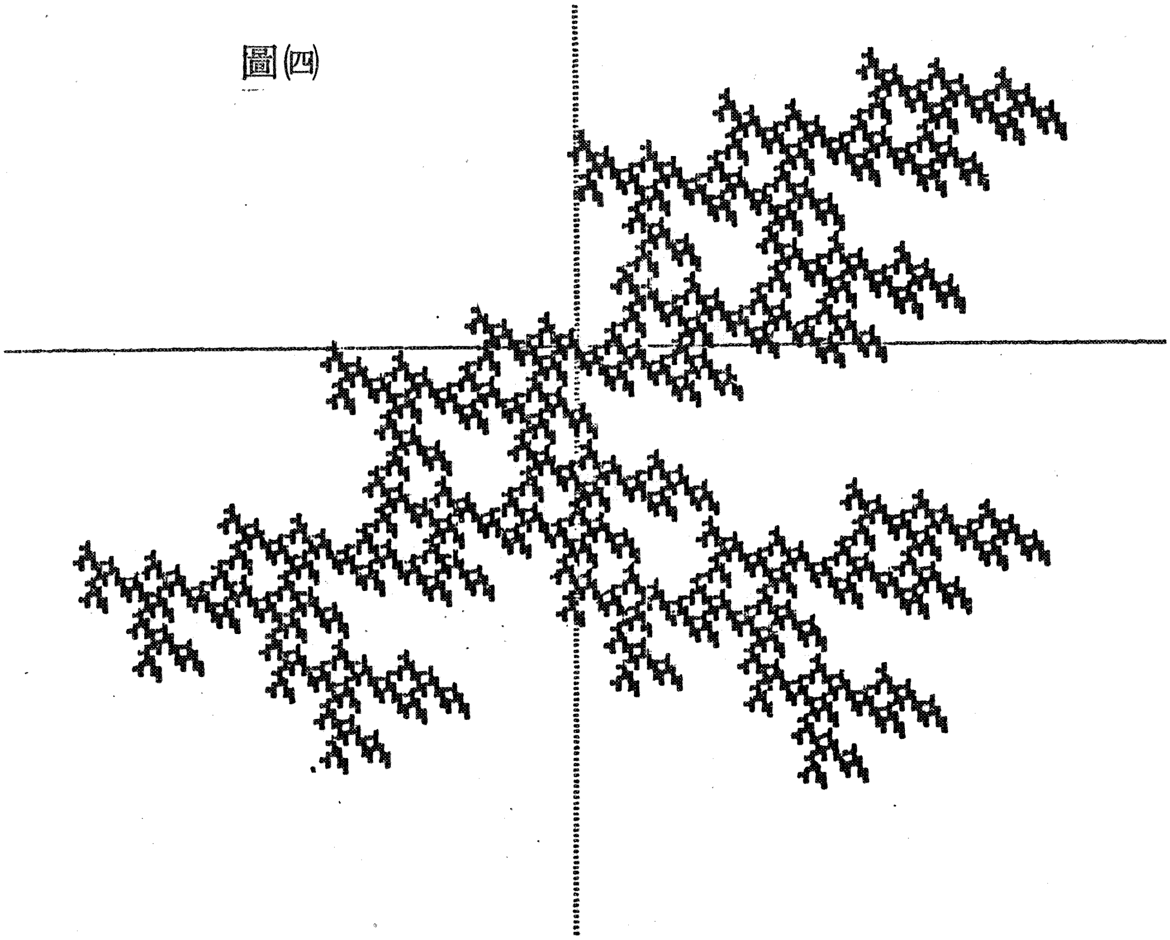
圖(三)



b = 2 + i ，6 階

D = { 0，1+i，1+2i，2i }

圖(四)



既然我們前面已把以完全餘數系統所組成的集合中的元素亂減一通，何不也來試試“亂加”呢？所謂“亂加”，即是加入與原digit集中元素同餘之數。

例：以 $b=2$ $D=\{0, 1, -1, i\}$ 組成之表示法，其中 $1=-1 \bmod (2)$，其圖形如下：(如圖(五))

根據Mendelbrot 書，其維數D滿足下列方程式

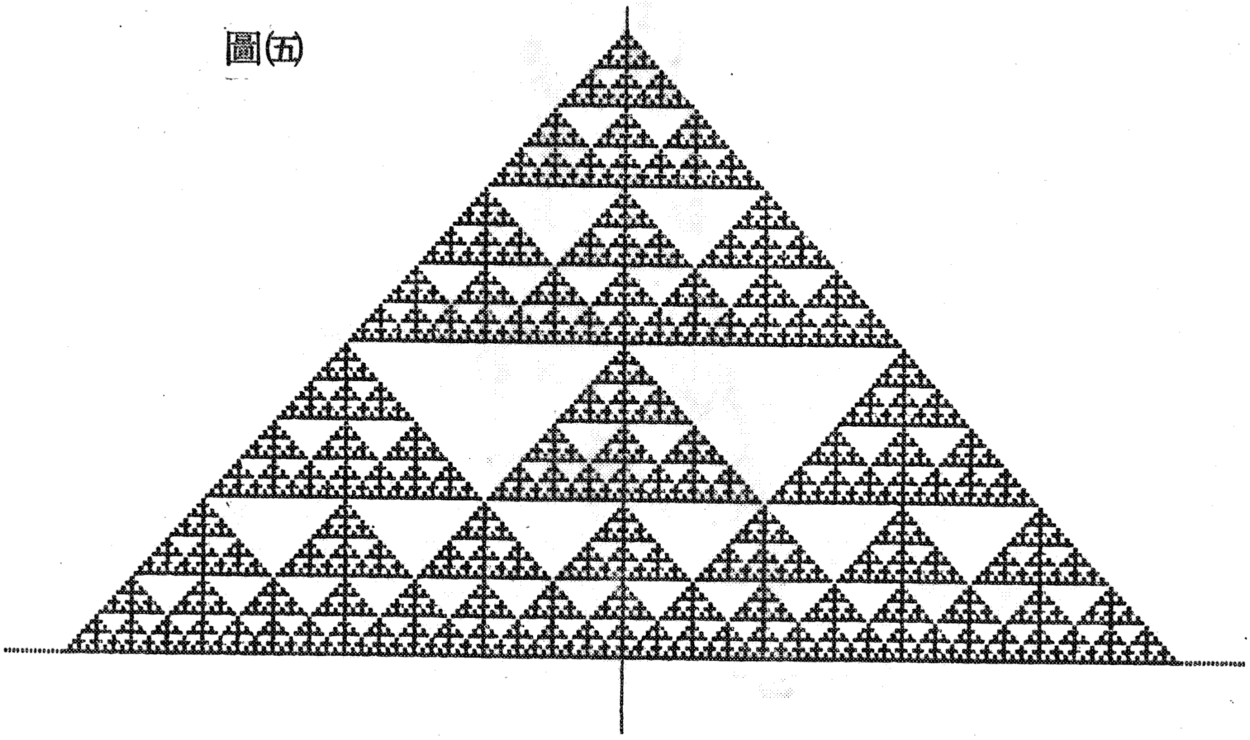
$$1=2^{-D}+2^{-D}+2^{-D}+4^{-D}+8^{-D}+\cdots\cdots=\frac{2}{2^{D}}+\frac{1}{2^{D}-1}$$

$$2^{D}=2+\sqrt{2} \quad D=\log_2(2+\sqrt{2})=1.77$$

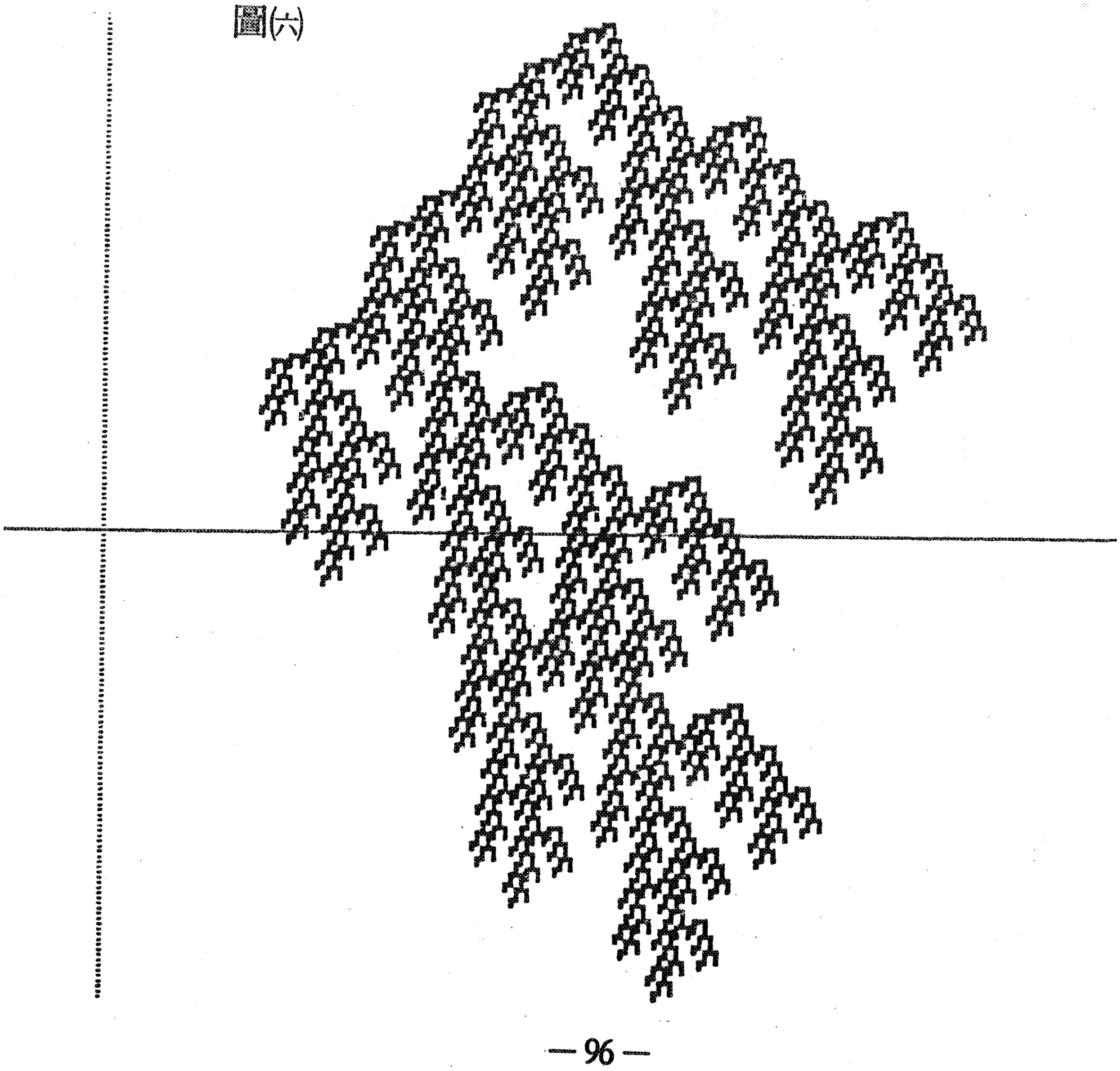
例二：$b=3+i$，$D=\{3, 2, 1, 3-i, -2i, 1-i, 3-2i, 1-2i, -3i\}$

如圖(六)

圖(五)



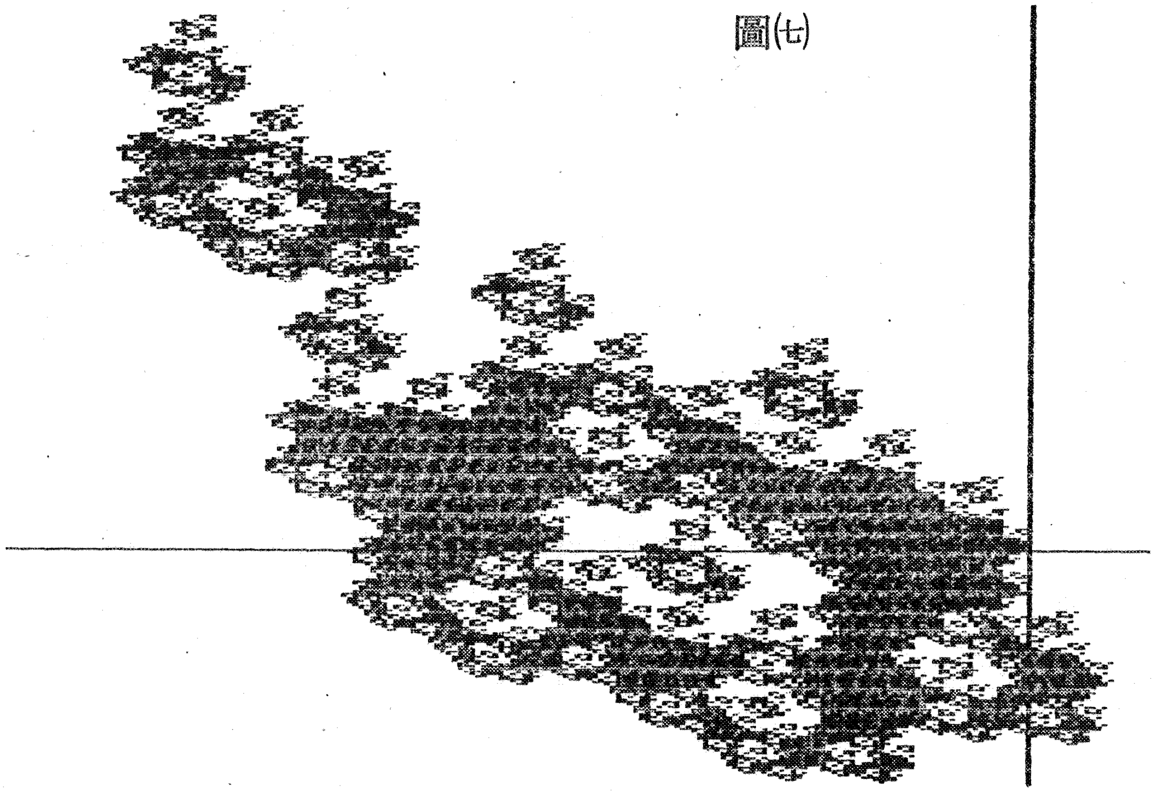
圖(六)



如圖(七)頗似國畫山水中的皴法，重巒疊嶂，美則美矣，但我們卻算不出其維數。

例三：$b=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$　$D=\{(-2,1),(-2,2),(-1,0),(-1,2),(0,1),(1,2)\}$

圖(七)



三、參考資料

(一)中文部分：

(1)朱建正譯：殘形幾何，數學圈雜誌社

(2)朱建正譯：殘形：凡異出版社

(3)楊維哲著：線性算則

(4)蔡玫亭、陳維寧著：囿的座標系

(二)英文部分：

(3)D.E.Knuth : The Art of Computer Programming, Vol. 2 ; Seminumerical Algorithms.台北圖書

(4)Mandelbrot : The Fractal Gedmetrv of Nature : Freeman (1981)

(5) I Kátai. J.Siàdo: Canonical number Systems for complex integers, Acta, Sci Math (Szeged) 37

(6)William, J.Gilbert, R.James : Negative Based Number System : Mathematics Magazine, Vol 52 No.4, September 1979,

(7)William J.Gilbert: Arithmetic in Complex Base : Mathematics Magazine Vol 57, No.2 March 1984,

㈢法文部分：

(8)Mandelbrot : Des monstres de Cantor et de Peano á géomètr fractale de le nature, Penser les mathématigues,'Editions du Seuil, 1982.

(9)Mandelbrot : Les objets fractals forme, hasard et dimension, nouvelle bibliothéque scientifique, FLAMMARION,EDITEUR, 1975

四、後　語

要在短短的八頁篇幅中，把我們的研究成果全部呈現出來，實在是一件幾乎辦不到的事情，如果讀者對於我們所研究的題材感到興趣，歡迎直接與作者聯絡。

評　語

從數學通俗刋物上發現問題的研究價值，有自發性。

合四人之力，做研究，有分工，爲數學研究之常例。

借電腦爲實驗想法之助，是今日研究數學之趨向。

能夠查閱有關論文，並以自己的研究成果與之比較，並承認前人已有之成果。從而顯現出眞正的創意。

看版設計非常醒目而且層次分明。

本作品尚有繼續發展之價值。