

# 雨滴中的沈思

## 高中組物理科第三名

台灣省立新竹高級中學

作者：陳建宇、許遠明

李逸民、林育聖

指導教師：謝迺岳

### 一、研究動機

法國科學家Descartes曾經計算推導數千條光線在水滴中的行徑，得出虹在偏向角 $138^\circ$ 處及霓在偏向角 $231^\circ$ 處，出射光最強。然而却沒有人真正的以實驗來驗證他的計算推論。因此，我們便想設計一些實驗來驗證他的計算推論。

### 二、研究目的

以紅色光代替日光，探討下列實驗：

- (一)虹、霓、日華角度的實測，印證Descartes的推論。
- (二)以能量的觀點探討霓虹華的成因：
  - 1.入射角與光初打到介面的反光率。
  - 2.入射角與光經二次折射後的出射光率。
  - 3.經一次折射進入水滴，在內部一次反射後再折射出來的出射光率。
  - 4.光折射進入水滴後，在內做二次反射再折射的出射光率。
- (三)光在數種相異介質的折射率測量。
- (四)光程與能量損耗率的關係。
- (五)入射角與水面反光率（光線由空氣入水）。
- (六)入射角與水面透光率（光線由水透出進入空氣）。
- (七)以電腦模擬光在水滴中的行徑及計算各出射能量並繪出函數圖形顯示。

### 三、實驗儀器

- |               |                 |
|---------------|-----------------|
| (一)實驗用枱桌(自製)  | (七) 500 mL 的量筒  |
| (二)氦氖雷射       | (八)壓克力圓盤        |
| (三)照度計        | (九)水            |
| (四)燒杯         | (十)酒精           |
| (五)量角半圓水槽(自製) | (十一)沙拉油         |
| (六)變角鐵架       | (十二)精業 2002 型電腦 |

[附圖] 儀器架設圖：(如圖(A)(B)(C)(D))

### 四、實驗步驟

(一)虹、霓、日華角度的實測：

1. 將盛好待測液的燒杯或壓克力圓盤置於量角台車上，校正雷射光的出射方向，以台車的移動控制入射角的改變。
2. 入射角由  $5^\circ$  開始，每次增加  $5^\circ$ 。
3. 以活動幕屏分別尋找各出射光點，再以照度計測量各出射率。
4. 將各出射率與入射角的關係繪成曲線，尋找曲線的高峯點。
5. 找出的高峯點，與能量理論預測的高峯點互相比較。

(二)折射率的測量：

1. 改變入射角(步驟同(一))。
2. 找出標定角，得到折射角。
3. 由司乃耳定律 ( Snell's law ) 算出折射率  $n = \frac{\sin i}{\sin r}$  ( i :

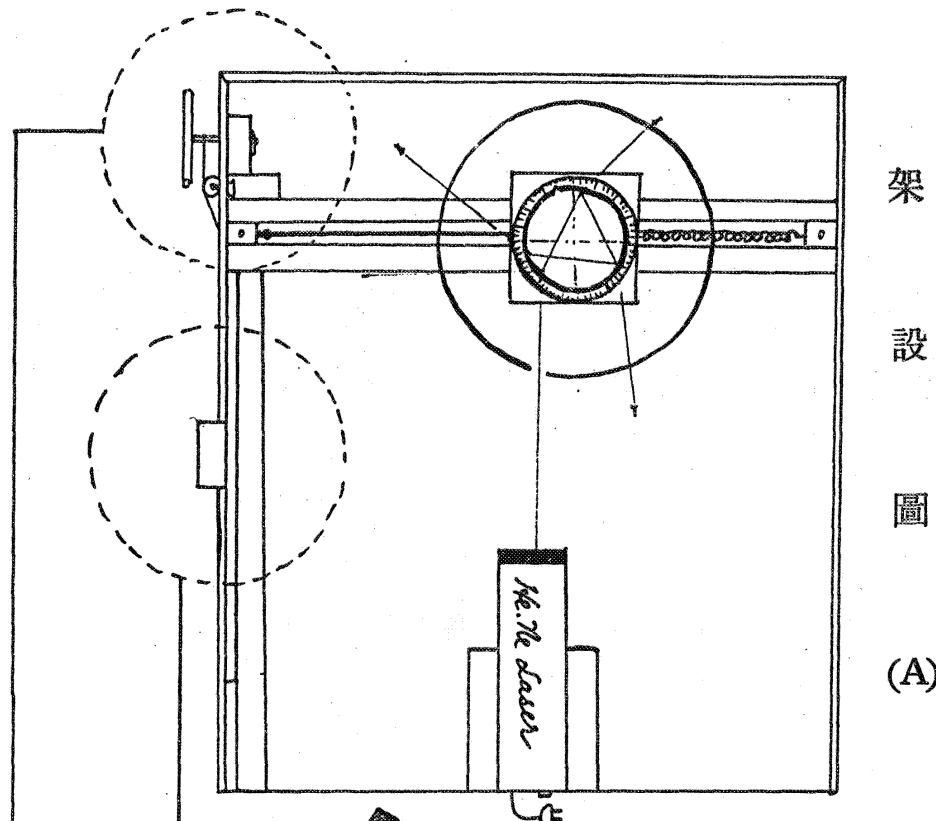
入射角， r : 折射角 )

4. 將所得的折射率中，去其極大極小後加以平均。

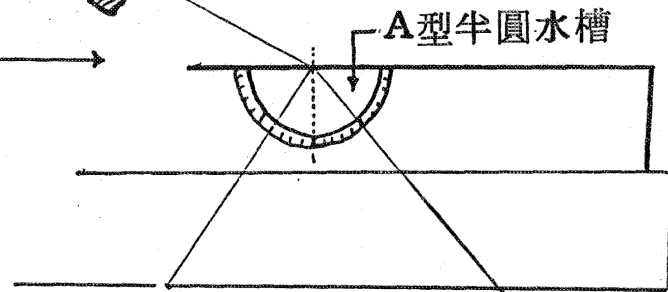
(註)：標定角  $\theta$  與 i、r 的關係： $(i + \theta) / 2 = r$

(三)光程與耗能率的實驗：

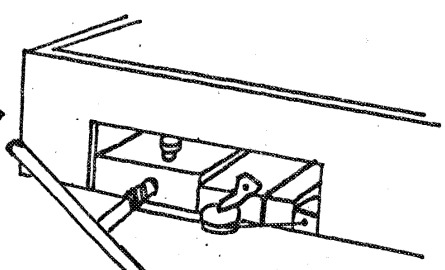
1. 將 500 mL 的量筒架於高腳架。
2. 把雷射垂直置於量筒的底部，固定後打開雷射。
3. 量筒內先裝少量水，測出射光強度。



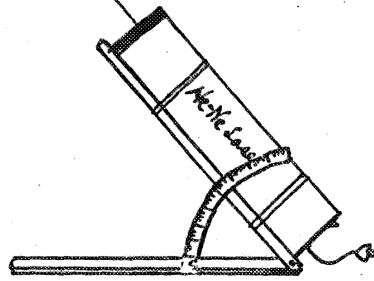
架設圖 (A)

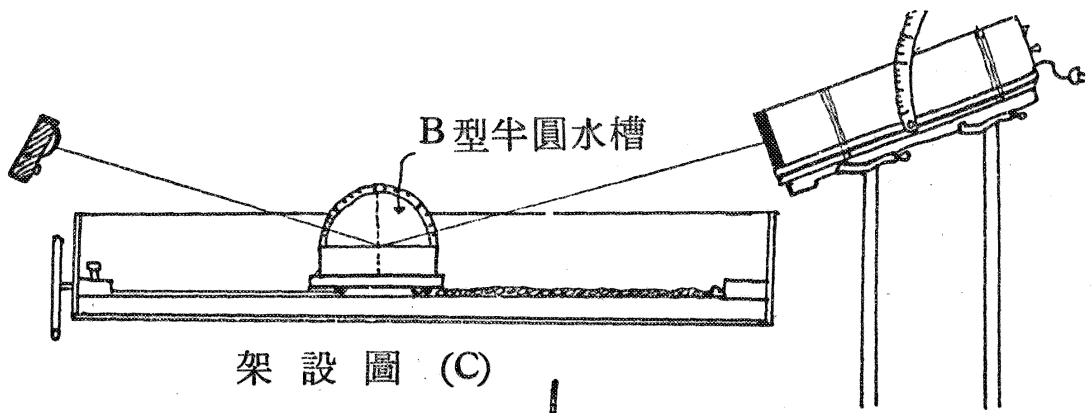


架設圖 (B)

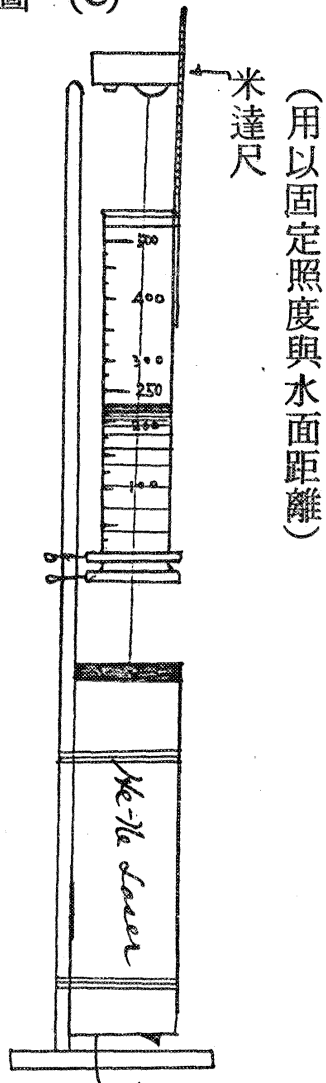


台車微調旋進器





架設圖 (C)



架設圖 (D)

(用以固定照度與水面距離)

- 4.此後每 25 mL (增加 1.5 cm 的高度) 加水一次, 測其損耗率。
- 5.將所得數據繪出曲線, 看看是否為一直線。

(四)由空氣入水的反光率實驗:

- 1.將半圓水槽置於台車上, 幫忙改變入射角。
- 2.將雷射架於變角架 (  $0^\circ \sim 45^\circ$  ), 再將變角架架於兩支高腳架上, 則可將入射角由  $0^\circ$  改變至  $90^\circ$ 。
- 3.將雷射光打在量角器上, 使得到入射角度。
- 4.以照度計測量反射強度。
- 5.將實驗曲線與資料曲線比較。

(五)由水入空氣的反光率實驗:

- 1.將雷射架於變角架上。
- 2.將量角半圓水槽附於活動木牆上, 輔助改變入射角。
- 3.將雷射光打於半圓與切平面的切點上, 則光線必過圓心。
- 4.將照度計置於水面之上, 測得折射透光率。
- 5.可測得全反射角。

(六)電腦模擬部份:

- 1.根據(三)(四)(五)的實驗數據及折射率設計出一套電腦程式, 計算入射角度與各出射強度的關係。
- 2.將模擬出的曲線與實測曲線相較, 以驗證我們原來假設的正確性。
- 3.以電腦來模擬一束平行光以等密度入射於水滴中時, 其在水滴中的行徑為何。

## 五、實驗曲線與電腦模擬圖: (如下頁圖)

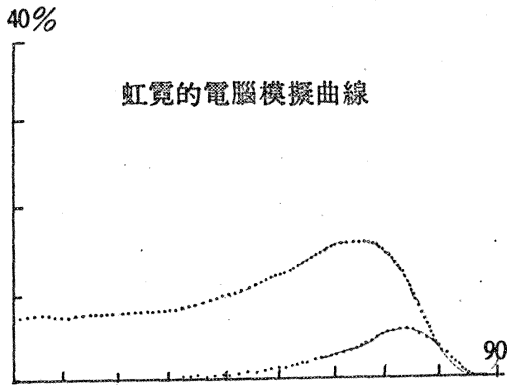
## 六、實驗結果的討論

(一)虹、霓、日華角度實測的實驗結果討論:

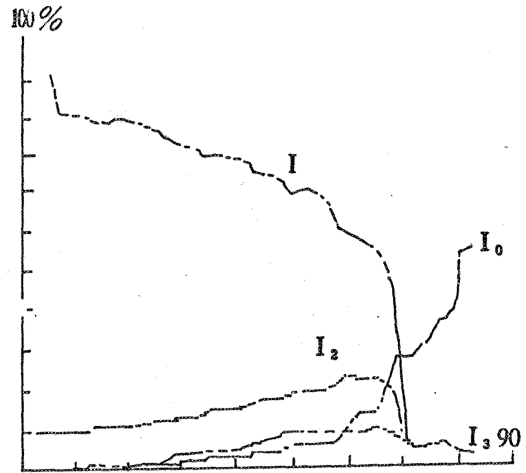
- 1.我們發現在入射角於  $60^\circ$  時, 第二次的出射光強度最強, 以下為入射角與偏向角的換算式:

$$r = \sin^{-1} ( 0.75 \sin i ) \quad i = 60^\circ \text{ 代入} \Rightarrow r = \sin^{-1} ( 0.75$$

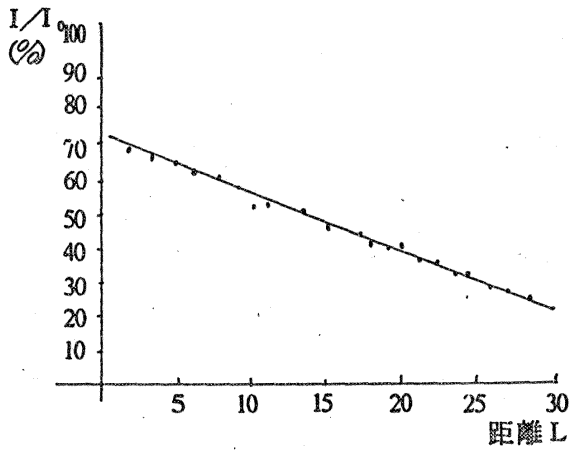
(一) 霓虹的電腦模擬曲綫圖



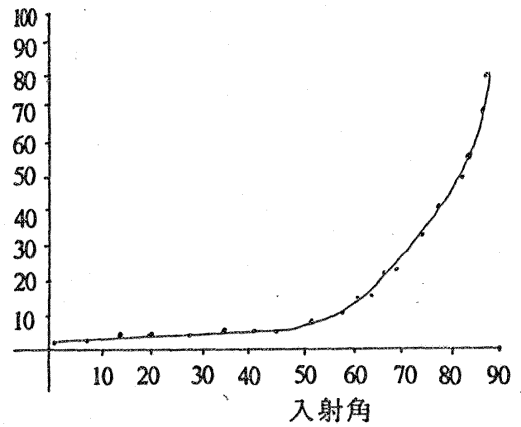
(二) 實測曲綫以內插法電腦繪圖



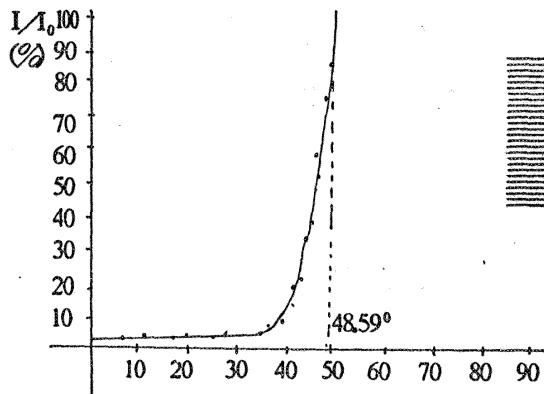
(三) 光程曲綫圖



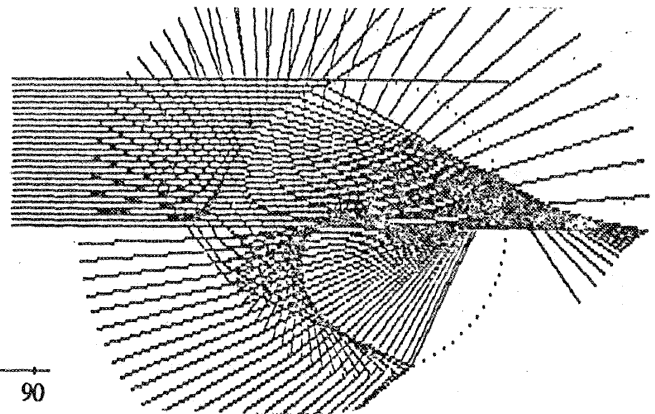
(四) 空氣入水反光率曲綫圖



(五) 透光率 (水入空氣) 曲綫圖



(六) 平行光以等密度入射模擬圖



$$\sin 60^\circ) \doteq 40.5^\circ$$

$$\phi_2 = \pi + 2i - 4r = 180^\circ + 2 \times 60^\circ - 4 \times 40.5^\circ = 138^\circ$$

( $\phi_2$  = 第二次出射偏向角)

所得到的偏向角與預測完全吻合。

2. 又在入射角  $70^\circ$  時，第三次的出射光強度最強：

$$r = \sin^{-1} (0.75 \sin i) \quad i = 70^\circ \text{ 代入} \Rightarrow r = \sin^{-1}$$

$$(0.75 \sin 70^\circ) \doteq 44.8^\circ$$

$$\phi_3 = 2\pi + 2i - 6r = 360^\circ + 140^\circ - 268.8^\circ = 231.2^\circ$$

$$\doteq 231^\circ$$

所得到的偏向角又與預測相符。

3. 而日華則是在太陽光通過水珠球心時，出射能量最強，在實驗曲線中已可輕易得之。而我們的預測亦是如此，因為太陽光在垂直打入時，其水面反光率為 2%，而光程為  $2R$  (小於  $\sqrt{2} R \sqrt{1 + \cos 2r}$ )，又透光亦為 2%，故出射能量最強。

4. 我們在整理以上部份的實驗數據及曲線時，發現除了在特定角之外，於特定角附近的入射角，其出射能量亦高於其它部份。此與後來的發現有著極密切的關係。

(二) 折射率的誤差結果討論：

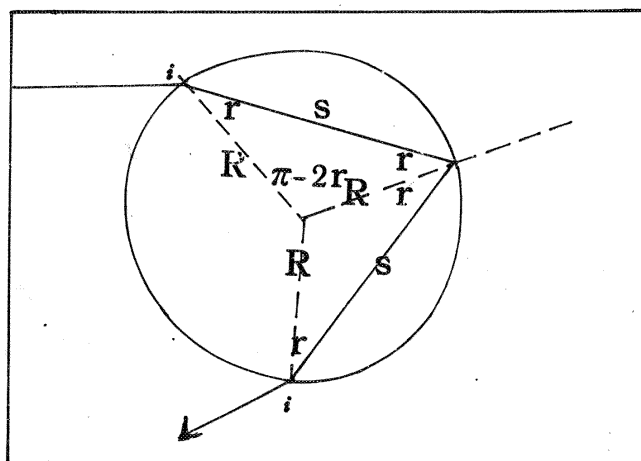
我們所得到的折射率，都和預測值差 0.5% ~ 2% 左右。根據我們的觀察結果，認為造成誤差的因素有三：

1. 玻璃厚度影響角度：我們在選用燒杯時，便曾考慮過，故盡量選薄的燒杯。
2. 量角器的精準度：我們使用坊間的普通量角器，故可能不很精準。
3. 人眼觀察的誤差：我們的實驗必須在暗室裏做，故只能以手電筒照明。而人眼在此時的觀測力則較一般弱些。

(三) 光程實驗部份的討論：

在水滴中，光所行走的距離為  $S_k$ ，(  $K = 1, 2, \dots$ ，分別代表第 1, 2,  $\dots$  次出射) 而由附圖：(見下頁)

$$S \doteq \sqrt{R^2 + R^2 - 2R \cos(\pi - 2\gamma)} = \sqrt{2} R \sqrt{1 + \cos 2\gamma}$$



$= 2R \cos \gamma$  而K次出射後，其光程  $L = KS = 2KR \cos \gamma$

我們又由我們設計出的實驗中得到以下結果：「光在水中每前進1公分，則消耗0.15%」。

#### (四) 光線由空氣入水的反光強度實驗：

我們由實驗中得到：入射角在  $0^\circ \sim 58.5^\circ$  時，反光率在10%以下，在  $58.5^\circ \sim 70^\circ$ ，反光率與入射角曲線突然上升，在入射角達  $90^\circ$  時，已是100%的反射。

我們後來又尋找資料，看看是否和我們的結果符合。在Optics一書中，我們得到了以下資料，且上面所畫的曲線與我們做出的極為相似，所不同的只是介面的折射率罷了。

參考資料中的公式如下：

$$\frac{R_s}{E_s} = -\frac{\sin(i - \gamma)}{\sin(i + \gamma)}, \quad \frac{R_p}{E_p} = -\frac{\tan(i - \gamma)}{\tan(i + \gamma)}$$

公式中的  $R_s$  及  $E_s$  分別表示垂直的反射及入射電場向量，而  $R_p$  及  $E_p$  則分別表示水平的反射及入射電場向量。而光強度比 = 能量比 = (反射電場向量 / 入射電場向量)<sup>2</sup>

#### (五) 光線由水入空氣的反光率實驗：

此實驗和上實驗頗為相近，在全反射角處，反光率達100%。而資料中的曲線與我們的曲線極類似。資料中的公式如下：

$$\frac{E_s'}{E_s} = \frac{2 \sin \gamma \cos i}{\sin(i + r)}, \quad \frac{E_p'}{E_p} = \frac{2 \sin \gamma \cos i}{\sin(i + r) \cos(i - r)}$$

公式中的  $E_s'$  及  $E_p'$  分別代表垂直及水平的折射電場向量，而  $E_s$

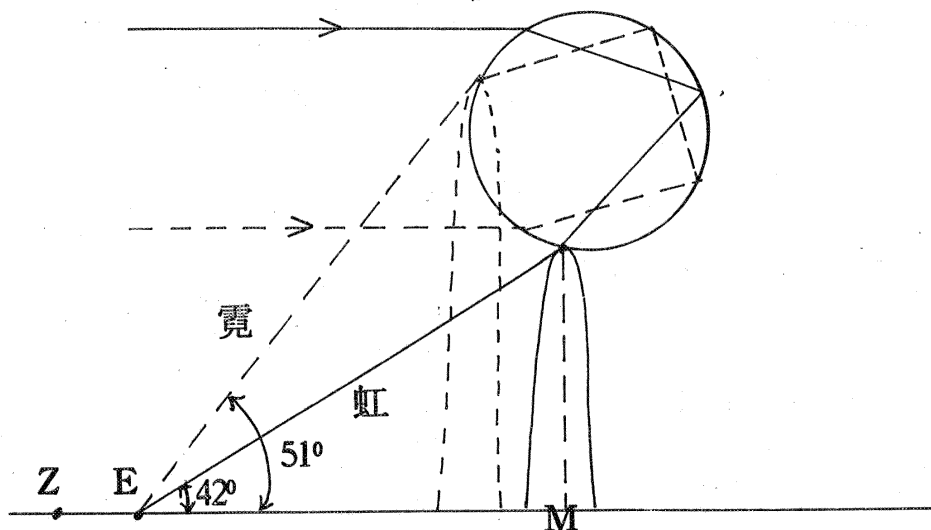


及 E, 同上實驗所述。

(六) Descartes 對霓虹的解釋：

Descartes 於 1637 年曾對虹的現象提出說明，此乃人類第一次以科學方法對虹霓提出解釋：

Descartes 認為，所有可產生虹霓的雨滴，都是分佈在觀察者 E 在與  $\overline{ZM}$  軸夾角  $42^\circ$  處。由此可知，虹應為圓形的，而非半圓，另一半位於地平線以下，且虹的亮度與水珠的多寡有關。因為不同的色光有不同的波長，其對水滴的折射率亦不同，各色光的偏向角便均相異，故可看見美麗而七彩繽紛的虹。又於附圖中，Descartes 又解釋與主虹鄰接的副虹，也就是霓。霓的偏向角為  $231^\circ$ ，故能見尖角錐體的半角為  $51^\circ$ 。



\* (七) 以光密度的觀念，純數學的方式對霓虹華的成因做解釋：

Descartes 並未詳細說明，何以虹在仰角  $42^\circ$ ，而霓在仰角  $51^\circ$  時，能被人看見。而我們在以能量的觀點解釋後，又嘗試以光密度的觀念來解釋，以下則為我們的計算推論：

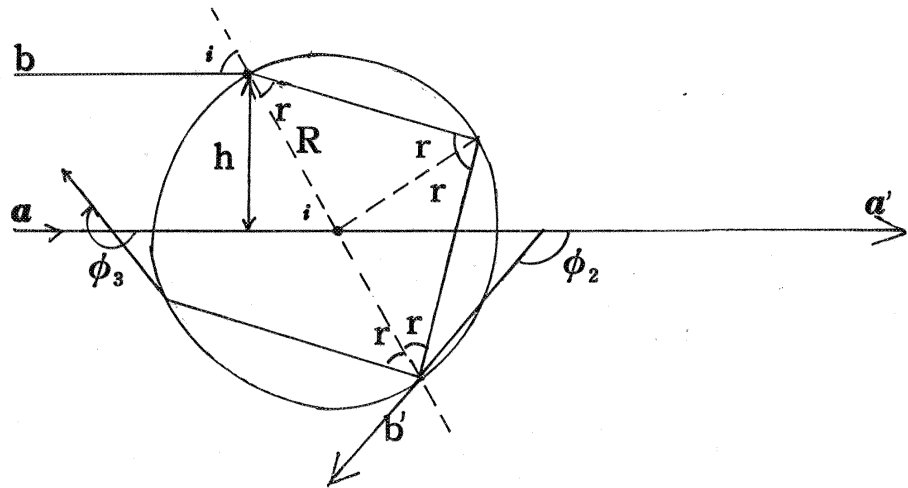
1. 我們由實驗中發現，偏向角是有一個極大值的，而極大值處，其光線分佈最密，故亮度最大。極大值算法如下：

$$(1) \text{虹} : \phi_2 = \pi + 2 ( i - 2 r )$$

$$\text{由} \begin{cases} n = \sin i / \sin r \dots\dots ① \\ R \sin i = h \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i = \sin^{-1} (h/R) \\ \gamma = \sin^{-1} (h/nR) \end{cases} \text{代入(1)}$$

$$\text{得 } \phi_2 = \pi + 2 \left( \sin^{-1} \frac{h}{R} - 2 \sin^{-1} \frac{h}{nR} \right)$$



令  $h/R = x$ ， $n = 4/3$ ，故得  $\phi_2 = 180^\circ + 2 \sin^{-1} x - 4 \sin^{-1} (0.75x)$

在偏向角一次導微之後，即可得到極值。

$$\begin{aligned} \phi_2' &= 0 + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4 \times \frac{3}{4}}{\sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}x\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &- \frac{12}{\sqrt{16 - (3x)^2}} \stackrel{\text{令}}{=} 0 \end{aligned}$$

解得  $x = 2\sqrt{5}/3\sqrt{3}$ ，代入  $\phi_2 = 180^\circ$

$$\begin{aligned} &+ 2 \sin^{-1} \left( \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} \right) - 4 \sin^{-1} \left( \frac{3}{4} \times \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} \right) \\ &= 137.97^\circ \doteq 138^\circ \end{aligned}$$

(2) 寬： $\phi_3 = 2\pi + 2i - 6\gamma$

同上之解法可得  $\phi_s = 360 + 2 \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{65}{72}} \right)$

$$- 6 \sin^{-1} \left( \frac{3}{4} \sqrt{\frac{65}{72}} \right) = 230.978 \doteq 231^\circ$$

2. 由上之計算推論，可知虹果在偏向角  $138^\circ$  處而霓在偏向角  $231^\circ$  處，光密度最大，故亮度最大，因此我們才能看見霓虹。
3. 我們又直接在電腦模擬圖上可看到：在入射角  $59^\circ \sim 69^\circ$  之間，其出射光線幾乎集中於仰角  $42^\circ$  處，在  $-70^\circ \sim -80^\circ$  之間，出射光線亦幾乎集中在仰角  $51^\circ$  處。

## 七、結 論

當我們以能量觀點來探討時，是以單一光線討論，得到在偏向角  $138^\circ$  處能量最強。而以光密度的觀點來探討時，是以一束等密度平行光入射來討論，又得出虹在偏向角  $138^\circ$  處為其極大值且光密度最。最後，我們總結上述結果，繪出（能量  $\times$  光密度）與（偏向角）的曲線，果然發現：虹在偏向角  $138^\circ$  處，霓在偏向角  $231^\circ$  處，而華在偏向角  $0^\circ$  處，分別有一特別高的高峯。因此，我們終於解釋了大自然界中虹、霓、日華的現象。

## 八、參考資料

Unisersity 美亞公司出版，大英科技百科全書 74 年版，光復書局出版，物理學選粹 科學圖書社印行，高中物理第三冊 教育部編印，工專物理（下） 科技圖書股份有限公司 John. E. Betts 著，什麼是光 徐氏基金會出版，Optics 科技圖書公司出版。

## 評 語

詳細考慮有關雨滴中所有的光學因素，並以周詳實驗設計，測量數據，又以電腦模擬，得到較完整的結果，探討內容豐富。作者研究能力頗佳。