電位丘模型模擬α質點運動的探討

高中組物理科第三名

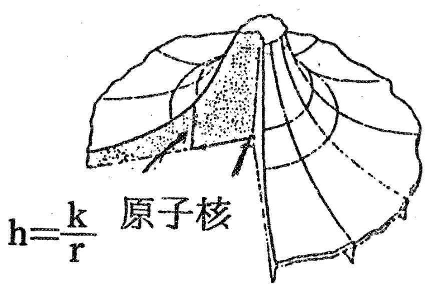
台南一中　　作　　者：陳炳宏

指導教師：林水華、蕭權利

一、研究動機

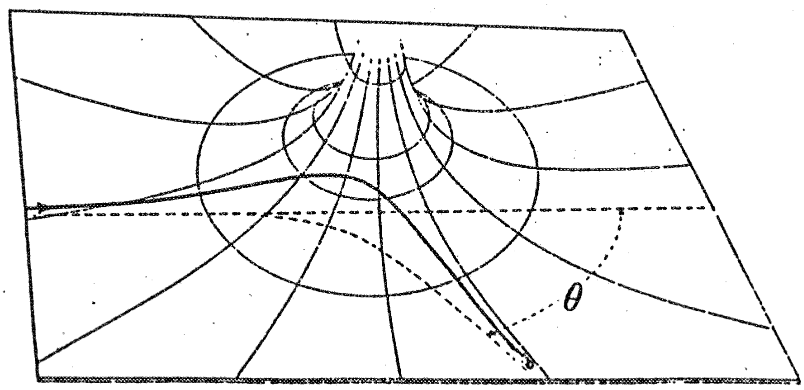
在研究α質點靠近原子核時運動的軌跡，通常以丘狀曲面如下圖模擬原子核所建立的電場位能曲面，另取一鋼球彈向此丘，代表α質點的運動情形。物理課本上曾提到“鋼球在曲面上滾過的軌跡，自然是一個三度空間的曲線，而此曲線在其底平面上的射影，即代表α質點在原子核電場中運動的軌跡”（請參考以下附錄），我們不禁要問如此射影下來的曲線軌跡眞的是正確嗎？引起我們以下的討論。

附錄（節錄自參考資料(2)，P 276～278）：



左圖用以說明α質點當靠近原子核時所循路徑之丘狀曲面，α質點具有之位能與r成反比，r爲離原子核之距離。製造此丘面時應使面上任何點之高度與r成反比。r亦爲在丘面上點離丘面中心線之距離，因此，在丘上之滾動之小鋼球所具有之重力位能與r成反比。如此，則鋼球運動時的能量即與電荷在原子核電場內運動的α質點的能量變化情況相似，而此運動軌跡在丘底平面上的射影，即與α質點在原子核電場中運動的軌跡相類似。

下圖中實線表示小鋼球在代表庫侖電場之位能的“丘狀曲面”上滾動之可能路徑，丘底平面上之虛直線表示小鋼球最初瞄準方向。若自丘頂正上方俯視此丘狀曲面，則所見之鋼球經過路徑即代表一α質點在原子核電場中之運動路徑，此路線即圖中平面上之虛曲線。



二、研究目的

㈠說明電位丘模型模擬 α 質點運動軌跡的不正確。

㈡找出鋼球在電位丘上運動軌跡的底平面射影與實際上 α 質點運動軌跡的差異。

㈢數值分析與討論。

㈣證明此種能正確模擬 α 質點軌跡的模型不存在。

三、研究設備器材

設備：APPLE Ⅱ　　　　語言：APPLESOFT

四、研究過程

㈠理論推導過程：

我們先規定模擬 α 質點運動軌跡的模型必須具備的條件：

1. 鋼球在曲面上運動。
2. 不論初始條件爲何，此模型必須都能適用。
3. 鋼球與曲面不計摩擦。
4. 在均勻重力場上做模擬，重力場強度爲定値。

㈡符號規定：

$\hat{r} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$

$\hat{\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$

$\hat{z} = (0, 0, 1)$

α質點的速度$\overrightarrow{V_\alpha}$，力學能$E_\alpha$，質量$m_2$。

重原子核質量m_1。鋼球的速度$\overrightarrow{V_s}$，力學能E_s。

質量（Reduced mass）$\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

m_1，m_2各帶電量q_1，q_2；庫侖常數k_0，所以系統電位能

$U_e = \dfrac{k_0 q_1 q_2}{r}$，我們令$W = k_0 q_1 q_2$以減少文字繁雜。

㈢過程：

電位丘是依方程式$z = \dfrac{k}{r}$在三度空間中做成的雙曲面，其中使鋼球重力位能U_g等於α質點之電位能U_e，也就是$U_g(z(r)) = U_e(r)$

即　$\mu g z = \dfrac{k_0 q_1 q_2}{r} \Rightarrow z = \dfrac{k_0 q_1 q_2}{\mu g} \times \dfrac{1}{r}$

比較　$z = \dfrac{k}{r}$　得知常數　$k = \dfrac{k_0 q_1 q_2}{\mu g} = \dfrac{W}{\mu g}$

鋼球位置爲

$\overrightarrow{R_s} = r\hat{r} + z\hat{z}$

$\therefore \overrightarrow{V_s} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{z}$

$\therefore \overrightarrow{a_s} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{z}$ …………①

由力學能守恒

$\dfrac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + U_g = E_s$ …………②

α質點位置爲

$\overrightarrow{R_\alpha} = r\hat{r}$

$\therefore \overrightarrow{V_\alpha} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

$\therefore \overrightarrow{a_\alpha} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$ …………③

由總能量守恒

$\dfrac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U_e = E_\alpha$ …………④

現在導出鋼球運動方程式

1.因電位丘對鋼球所施的正向力恒在切面的法線方向上，又若

$f(r,\theta,z)=z-\frac{k}{r}$，則$\nabla f=\frac{k}{r_2}\hat{r}+\hat{z}$，所以在$\hat{\theta}$方向

上無分量，也就是①式中的$\hat{\theta}$項的係數為0

即$2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}=\frac{1}{r}\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt}=0$

此式表示鋼球對中心軸的角動量守恒，

$L=\mu r^2\dot{\theta}$，其中$\partial L/\partial t=0$，L與時間無關

2.由以上討論且由$U_g=U_e=\frac{W}{r}$代入①，②式

得$\overrightarrow{V_s}=\dot{r}\hat{r}+\frac{L}{\mu r}\hat{\theta}-\frac{k}{r^2}\dot{r}\hat{z}$

$$\overrightarrow{a_s}=(\ddot{r}-\frac{L^2}{\mu^2 r^3})\hat{r}+(\frac{2k}{r^3}\dot{r}^2-\frac{k}{r^2}\ddot{r})\hat{z}$$

力學能　$E_s=\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2+\frac{L^2}{\mu^2 r^2}+\frac{k^2}{r^4}\dot{r}^2)+\frac{W}{r}$

整理移項得　$\dot{r}^2=\dfrac{E_s-\frac{W}{r}-\frac{L^2}{2\mu r^2}}{\frac{1}{2}\mu(1+\frac{k^2}{r^4})}$…………⑥

改r為θ的函數

$$(\frac{dr}{d\theta})^2=\frac{(\frac{dr}{dt})^2}{(\frac{d\theta}{dt})^2}=(\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}})^2=\frac{\dfrac{E_s-\frac{W}{r}-\frac{L^2}{2\mu r^2}}{\frac{1}{2}\mu(1+\frac{k^2}{r^4})}}{\dfrac{L^2}{\mu^2 r^4}}$$

$$=\frac{r^2(\frac{2\mu E_s}{L^2}\cdot r^2-\frac{2\mu W}{L^2}\cdot r-1)}{(1+\frac{k^2}{r^4})}$$

可看出軌跡具有對稱性，有對稱軸

$$\int \frac{\sqrt{\left(1+\frac{k^2}{r^4}\right)}\cdot dr}{r\cdot\sqrt{\frac{2\mu E_s}{L^2}r^2-\frac{2\mu W}{L^2}r-1}}=\theta-\theta_0 \cdots\cdots\cdots\cdots ⑦$$

3.同理現在也導出α質點之運動方程式以資比較。軌跡方程式：

$$\int \frac{dr}{r\sqrt{\frac{2\mu E_\alpha}{L^2}r^2-\frac{2\mu W}{L^2}r-1}}=\theta-\theta_0 \cdots\cdots\cdots\cdots ⑧$$

由⑦⑧兩式可看出差了$\sqrt{1+\frac{k^2}{r^4}}$一項

4.爲了確定導出的方程式無誤，我們再以Hamilton's principle 建立鋼球的Lagrange function 導運動方程式

由②式　$L_a=E_k-U_g=\frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2+r\dot{\theta}^2+\dot{z}^2\right)-\mu gz$

限制方程式$F(r,\theta,z)=z-\frac{k}{r}=0$

得聯立偏微分方程組

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L_a}{\partial r}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L_a}{\partial \dot{r}}\right)+\lambda(t)\dfrac{\partial F}{\partial r}=0\\[2ex]\dfrac{\partial L_a}{\partial \theta}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L_a}{\partial \dot{\theta}}\right)+\lambda(t)\dfrac{\partial F}{\partial \theta}=0\\[2ex]\dfrac{\partial L_a}{\partial z}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L_a}{\partial \dot{z}}\right)+\lambda(t)\dfrac{\partial F}{\partial z}=0\end{cases}$$

$\lambda(t)$爲Lagrange undetermined multiplier

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu r\dot{\theta}^2 - \mu\ddot{r} + \lambda(t)\dfrac{k}{r^2} = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑨ \\ \dfrac{d}{dt}(\mu r^2\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow \text{令} L = \mu r^2\dot{\theta} & \cdots\cdots\cdots\cdots⑩ \\ -\mu g - \mu\ddot{z} + \lambda(t) = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑪ \end{cases}$$

及 $z=\dfrac{k}{r}$ 四條方程式　解 $r(t)$，$\theta(t)$，$z(t)$，$\lambda(t)$

由⑤⑥⑩⑪式代入⑨式可得

$$\ddot{r} = \frac{\dfrac{\mu W}{r^2} + \dfrac{L^2}{r^3} + \dfrac{4\mu k^2 E_s}{r^5} - \dfrac{3\mu k^2 W}{r^6} - \dfrac{k^2 L^2}{r^7}}{\mu^2\left(1+\dfrac{k^2}{r^4}\right)^2} \cdots\cdots\cdots\cdots⑫$$

另外 $\ddot{r}$ 可由 $\dfrac{d\dot{r}}{dt}$ 獲得即，由⑥式　$\ddot{r} = \dfrac{1}{2\dot{r}}\cdot\dfrac{d(\dot{r})^2}{dt}$

$$= \frac{\dfrac{\mu W}{r^2} + \dfrac{L^2}{r^3} + \dfrac{4\mu k^2 E_s}{r^5} - \dfrac{3\mu k^2 W}{r^6} - \dfrac{k^2 L^2}{r^7}}{\mu^2\left(1+\dfrac{k^2}{r^4}\right)^2}$$

兩種方法所得之 $\ddot{r}$ 完全一樣，可知方程式無誤。

五、研究結果

數值分析電腦程式所計算出來的運動路徑（見後）

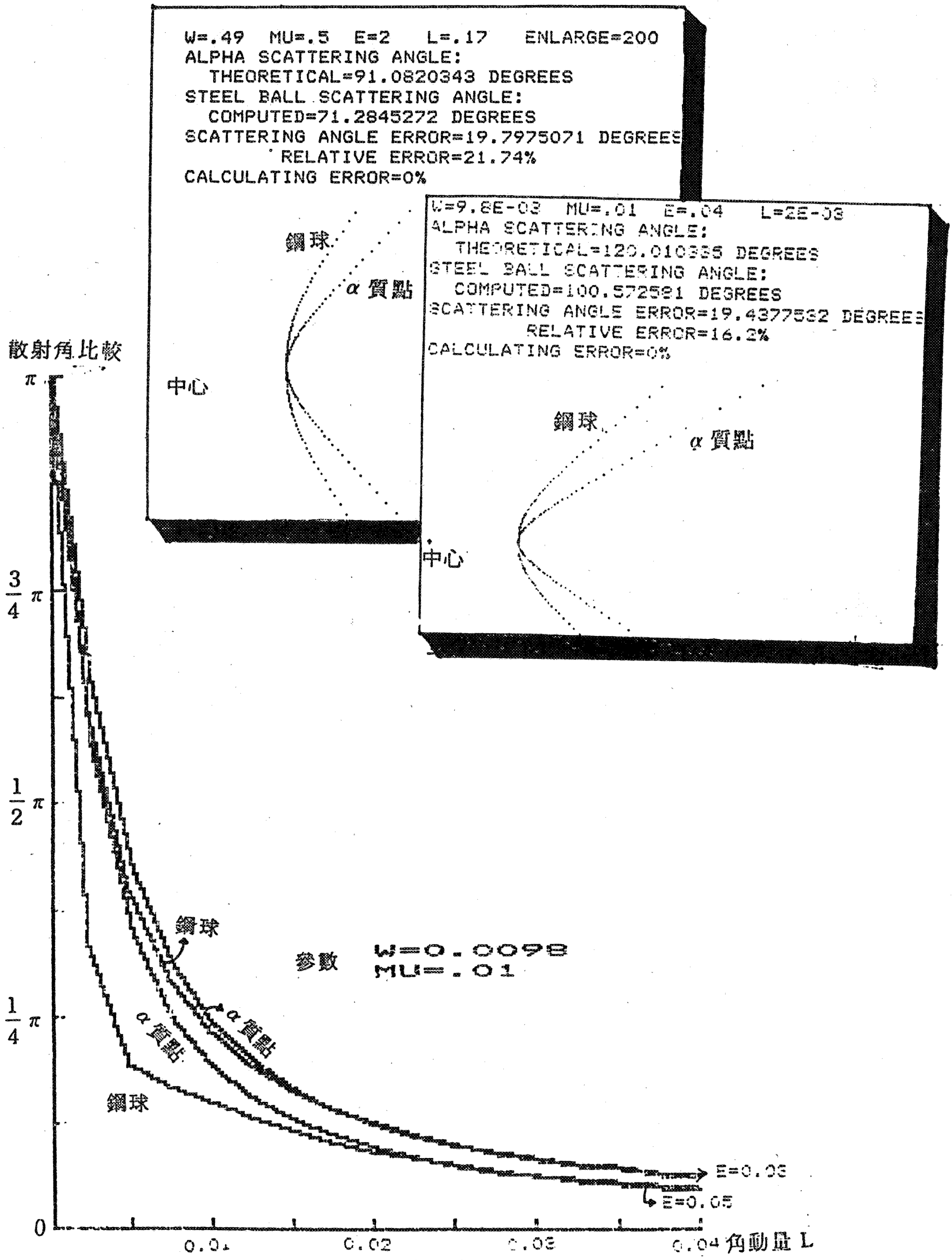
六、討　論

(一)由①⑫式知道水平上的分力爲

$$\vec{F}_{=}(r) = \left(\mu\ddot{r} - \frac{L^2}{\mu r^3}\right)\hat{r}$$

$$= \frac{Wr^6 + 4E_s k^2 r^3 - 3Wk^2 r^2 + \dfrac{k^2L^2}{\mu}r - \dfrac{L^2k^2}{\mu r^3}}{(r^4 + k^2)^2}\hat{r}$$

但已知水平分力必爲正 $\hat{r}$ 的方向，即 $\vec{F}_{=}(r) > 0$，若 $\vec{F}_{=}(r) \leq$



W=.49 MU=.5 E=2 L=.17 ENLARGE=200
ALPHA SCATTERING ANGLE:
THEORETICAL=91.0820343 DEGREES
STEEL BALL SCATTERING ANGLE:
COMPUTED=71.2845272 DEGREES
SCATTERING ANGLE ERROR=19.7975071 DEGREES
RELATIVE ERROR=21.74%
CALCULATING ERROR=0%
鋼球
α質點
中心
W=9.8E-03 MU=.01 E=.04 L=2E-03
ALPHA SCATTERING ANGLE:
THEORETICAL=120.010335 DEGREES
STEEL BALL SCATTERING ANGLE:
COMPUTED=100.572581 DEGREES
SCATTERING ANGLE ERROR=19.4377532 DEGREES
RELATIVE ERROR=16.2%
CALCULATING ERROR=0%
鋼球
α質點
中心
散射角比較
π
3/4 π
1/2 π
1/4 π
0
0.01
0.02
0.03
0.04
角動量 L
參數
W=0.0098
MU=.01
鋼球
α質點
α質點
鋼球
E=0.03
E=0.05

0 則鋼球已離曲面，不符合前面所提條件①，$\vec{F}_{=}(r)=0$ 為九次的方程式，不易求根，但 r 越小越有可能$\vec{F}_{=}(r)\leq 0$ 故檢查 $\vec{F}_{=}(r_0)$ 時的情形便可以。

(二)要使鋼球的射影軌跡近似於 α 質點的軌跡可以調整 k ，μ ，E_s ，L 等值，大致上 E_s 太大容易離開曲面，E_s 越小，μ ，k ，L 越大，越近似。

(三)是否有 $z=z(r)$ 的曲面存在，使得鋼球運動的軌跡射影符合 $\vec{F}=\frac{W}{r^2}\hat{r}$ 的運動呢？以下證明答案是否定的。

證明：

設此曲面存在且 $z=z(r)$

鋼球位置 $\vec{R}=r\hat{r}+z\hat{z}$，對 t 微分

$$\vec{V}=\dot{r}\hat{r}+\frac{L}{\mu r}\hat{\theta}+\left(\frac{dz}{dr}\right)\dot{r}\hat{z}$$

得 $$E=\frac{1}{2}\mu\left[\dot{r}^2+\frac{L^2}{\mu^2 r^2}+\left(\frac{dz}{dr}\right)^2\dot{r}^2\right]+\mu g z \cdots\cdots\cdots\cdots ⑬$$

而受 $\vec{F}=\frac{W}{r^2}\hat{r}$ 的質點

$$E=\frac{1}{2}\mu\left(r^2+\frac{L^2}{\mu^2 r^2}\right)+\frac{W}{r} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑭$$

由⑭式代入⑬式解 $\left(\frac{dz}{dr}\right)^2=\dfrac{\frac{W}{r}-\mu g z}{\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2}$

所以 z 必定與 $\dot{r}$ 有關，而與假設及前所提到的條件②不符合，故正確模型不存在。

七、結 論

(一)鋼球在電位丘曲面上運動，在其平面上的投影不是雙曲線。

(二)沒有其他力學模型，可描述 α 質點在重原子核附近運動的軌跡，

也就是受$\vec{F}=\frac{W}{r^2}\hat{r}$的質點的相對運動軌跡，不能以鋼球在 z = z (r) 曲面上滾動軌跡的射影加以正確描述。

八、參考資料

㈠大學物理⑴⑵⑶　東華書局印行，李怡嚴著，七十四年二月十四版。

㈡高級中學物理下册　東華書局印行，吳友仁著，六十七年一月五版。

㈢什麼是微積分　建興出版社，張鏡清譯，七十三年八月再版。

㈣高中數學實驗教材　第五册　六十七年八月五版。

㈤古典動力學　徐氏基金會出版，冉長壽譯　六十五年十二月再版。

評　語

1. 對於質點運動，能從基本力學作深入探討。
2. 觀察仔細，對於習用的模型提出異議，從不同角度討論，並作模擬分析。