分酒問題的研究

高小組數學科第三名

新竹縣湖口國民小學　　作　　者：陳在鴻、湯盛全
黎萬順
指導教師：巫光楨、曾仰賢

一、研究動機

「有 10 公斤的酒裝在甲酒桶中，另有乙、丙兩個空桶，一個恰可裝酒 7 公斤，一個恰可裝 3 公斤，如果只能利用這些桶子做量器，要量出 5 公斤的酒來，應該怎樣分法？」

有一天在書上看到這個問題後，經過一番努力，終於找到解答，但在求解過程中，卻想到了幾個問題，引起我們的研究於是在老師指導之下，我們對這些問題再做深入的探討，並找出答案。

二、研究問題

㈠原問題該如何解？

㈡在原問題中，如果要量出的不是 5 公斤，而是 1 到 10中的任一個整數量，是不是也能量出？

㈢在原問題中，如果不用 7 公斤和 3 公斤的空桶，而改用其他組合，是不是也能量出 1 到 10 中的任意量？

㈣有甲、乙、丙三個酒桶，裝滿後分別是ㄅ、ㄆ、ㄇ公斤，其中ㄆ≧ㄇ，現在甲桶中已裝有了ㄅ公斤的酒，利用這三個桶子做量器，到底可以量出多少種量來呢？能不能用一套固定法則得出？

㈤在㈣中，如果能量出 1 到ㄅ中的任一酒量，我們稱ㄅ、ㄆ、ㄇ是有解組合，反之稱為無解組合。能不能由ㄅ、ㄆ、ㄇ三個數字間的關係，立刻判斷出是否有解組合呢？

三、研究過程

〔問題一〕：原問題該如何解？

(一)解法 1：

桶別 / 桶中酒量 / 步驟	甲	乙	丙
(1)	10	0	0
(2)	3	7	0
(3)	3	4	3
(4)	6	4	0
(5)	6	1	3
(6)	9	1	0
(7)	9	0	1
(8)	2	7	1
(9)	2	5	3

解法 2：

桶別 / 桶中酒量 / 步驟	甲	乙	丙
(1)	10	0	0
(2)	7	0	3
(3)	7	3	0
(4)	4	3	3
(5)	4	6	0
(6)	1	6	3
(7)	1	7	2
(8)	8	0	2
(9)	8	2	0
	5	2	3

(二)解法 1 的說明：

步驟(1)：先倒滿乙桶，因倒走 7 公斤，所以甲桶剩 3 公斤。

(2)：用乙桶中的酒，把丙桶倒滿。

(3)：把丙桶中的酒倒回甲桶。

(4) 再用乙桶中的酒把丙桶倒滿。

(5)：把丙桶中的酒倒回甲桶。

(6)：把乙桶中餘下的 1 公斤酒倒入丙桶。

(7)：用甲桶中的酒把乙桶倒滿。

(8)：用乙桶中的酒把丙桶倒滿，因爲丙桶已有 1 公斤酒，所以只用去 2 公斤，剩下 5 公斤，操作到此，已完成題目的要求，量出 5 公斤的酒了。

〔問題二〕：在原問題中，如果要量出的不是 5 公斤的酒，而是 1 到 10 中的任一量，是不是也能量出？

(一)觀察解法 1 的過程，我們可以發現，在量出 5 公斤前，甲桶已出

現了 10，3，6，9，2 等量，乙桶已量出 7，4，1，5 等量，而在步驟 7 結束後，乙、丙兩桶合起來也可量出 8 公斤的酒，所以在本題中，任意介於 1 到 10 公斤的酒都可量出。

〔問題三〕：在原問題中，如果不用 7 公斤和 3 公斤的空桶，而改用其他組合，是不是也能量出 1 到 10 中的任意量？

㈠經我們研究顯示，這個問題的答案是否定的，例如若用 8 公斤和 5 公斤的空桶時，就只能倒出 10，2，8，3，5，7 等量，而倒不出 1，4，6，9 等量。

〔問題四〕：有甲、乙、丙三個酒桶，裝滿後分別是ㄅ、ㄆ、ㄇ公斤，現在甲中已裝了ㄅ公斤的酒，利用這三個桶子做量器，到底可以量出多少種量來呢？能不能用一套固定的法則得出？

㈠經我們研究分析之後，發現有兩種方法：

方法 1 ：

操作(1)：由甲桶將酒倒入乙桶。

操作(2)：由乙桶中將酒倒入丙桶。

操作(3)：如果乙桶中已沒酒了，直接回到操作(1)。

如果乙桶中還有酒，先將丙桶的酒倒回甲桶，然後回到操作(2)繼續操作。

方法 2.：過程同方法 1 ，但乙、丙互易。

㈡利用以上兩種方法操作時，如果是有解組合，經過一定的步驟操作後，必可以量出介於 1 到ㄅ間的任一量。如果經一些步驟操作後，仍有量不出的量，而甲、乙、丙三桶中的酒量，卻已出現了和前面步驟完全相同的情形時，就是無解組合，這個組合所能倒出的量，就是已出現過的量。

㈢在〔問題一〕的解法中，解法 1 就是利用方法 1 ，解法 2 即方法 2 。

㈣再以 10，8，5 的組合，用方法 1 為例：

我們從下面的操作中便可以得知，步驟(7)和步驟(9)中，甲、乙、丙三桶中的酒量，已經出現了相同的情況，所以 10，8，5的組合

只能量出 10、2、8、3、5、7 等量，而量不出 1、4、6、9 等量，是無解組合。

步驟	桶別 / 桶中酒量 / 操作別	甲	乙	丙	已量出的量
1	(1)	10	0	0	10
2	(2)	2	8	0	2.8
3	(3)	2	3	5	3.5
4	(2)	7	3	0	7
5	(3)→(1)	7	0	3	
6	(2)	0	7	3	
7	(3)	0	5	5	
8	(2)	5	5	0	
9	(3)→(1)	5	0	5	
		0	5	5	

〔問題五〕：能不能由ㄅ、ㄆ、ㄇ三個數字間的關係，立刻判斷出是否有解組合？

㈠當ㄅ是 1 時，顯然是有解組合。

㈡ㄇ＝1 時，對於任意量甲、乙，我們若使用方法 2 時，經過一定步驟，一定會形成下面情況：

表一

桶別 / 桶中酒量 / 步驟	甲	乙	丙
1	ㄅ	0	0
2	ㄅ−1	0	1
3	ㄅ−1	1	0
4	ㄅ−2	1	1
5	ㄅ−2	2	0
⋮	⋮	⋮	⋮
ㄆ×2	ㄅ−ㄆ	ㄆ	0
ㄆ×2＋1	ㄅ−ㄆ−1	ㄆ	1

此時乙桶中已出現過 1～ㄆ間的量，甲桶中則以出現了ㄅ－ㄆ－1～ㄅ間的量，所以只要ㄆ＋1 不小於ㄅ除以 2 的整數商記成〔ㄅ／2〕，我們可以得到規則(1)：

規則(1)：

若ㄇ＝1 且ㄆ＋1≧〔ㄅ／2〕，則ㄅ、ㄆ、ㄇ是有解組合。

㈢當ㄇ＝2時，若ㄅ是奇數且ㄆ≥ㄅ，同樣經過方法 2 的操作後，乙桶中將出現所有偶數量，甲桶中則出現所有奇數量，所以可以得到規則(2)：

若ㄇ＝2，ㄅ是奇數且ㄆ≥ㄅ，則ㄅ、ㄆ、ㄇ是有解組合。

㈣若〔ㄅ／2〕＞ㄆ+ㄇ，必是無解集合，因爲必量不出〔ㄅ／2〕。例 9，2，1 的組合必倒不出 4 公斤的酒來。

㈤如果ㄅ、ㄆ、ㄇ的最大公因數大於 1，必定不是有解組合，因爲若兩數都是某數的倍數，它們的和與差也會是某數的倍數，而我們在操作時其實相當於做加與減。

㈥剔除以上情況後，我們將 11≥ㄅ＞ㄆ≥ㄇ 的所有組合列了出來，一個個的以方法 1 或方法 2 來判斷是否有解組合，若是有解組合的話，就以△做註記，列出如表二：

表二

△ 3,2,2	△ 4,3,2	4,3,3	△ 5,2,2	△ 5,3,2	5,3,3
△ 5,4,2	△ 5,4,3	5,4,4	△ 6,3,2	△ 6,4,3	△ 6,5,2
△ 6,5,3	6,5,4	6,5,5	7,2,2	△ 7,3,2	7,3,3
△ 7,4,2	△ 7,4,3	7,4,4	△ 7,5,2	△ 7,5,3	△ 7,5,4
7,5,5	△ 7,6,2	7,6,3	△ 7,6,4	7,6,5	7,6,6
△ 8,3,2	8,3,3	△ 8,4,3	△ 8,5,2	△ 8,5,3	△ 8,5,4
8,5,5	8,6,3	8,6,5	△ 8,7,2	△ 8,7,3	8,7,4
8,7,5	8,7,6	8,7,7	9,2,2	△ 9,3,2	9,4,2
△ 9,4,3	9,4,4	△ 9,5,2	△ 9,5,3	△ 9,5,4	9,5,5
△ 9,6,2	△ 9,6,4	△ 9,6,5	△ 9,7,2	△ 9,7,3	△ 9,7,4
9,7,5	9,7,6	9,7,7	△ 9,8,2	△ 9,8,3	9,8,4
9,8,5	9,8,6	9,8,7	9,8,8	△ 10,3,2	10,3,3
△ 10,4,3	△ 10,5,2	△ 10,5,3	△ 10,5,4	10,6,3	△ 10,6,5
△ 10,7,2	△ 10,7,3	△ 10,7,4	△ 10,7,5	10,7,6	10,7,7
△ 10,8,3	10,8,5	10,8,7	△ 10,9,2	10,9,3	10,9,4
10,9,5	10,9,6	10,9,7	10,9,8	10,9,9	△ 11,3,2
11,3,3	11,4,2	△ 11,4,3	△ 11,5,2	△ 11,5,3	△ 11,5,4
11,5,5	11,6,2	11,6,3	△ 11,6,4	△ 11,6,5	11,6,6
△ 11,7,2	△ 11,7,3	△ 11,7,4	△ 11,7,5	△ 11,7,6	11,7,7
△ 11,8,2	△ 11,8,3	11,8,4	△ 11,8,5	△ 11,8,6	11,8,7
11,8,8	△ 11,9,2	11,9,3	△ 11,9,4	11,9,5	11,9,6
11,9,7	11,9,8	11,9,9	△ 11,10,2	△ 11,10,3	△ 11,10,4

㈦由列表二中又可綜合出下列兩個規則；當 11 ≥ ㄅ > ㄆ ≥ ㄇ時：

規則(3)：若〔ㄅ／2〕≤ ㄆ + ㄇ < ㄅ + 3，且ㄆ、ㄇ互質，則ㄅ、ㄆ、ㄇ是有解組合。

規則(4)：若ㄆ、ㄇ的最大公因數是 2，且ㄆ + ㄇ等於ㄅ + 3 或ㄅ ± 1，則ㄅ、ㄆ、ㄇ是有解組合。

㈧若ㄇ ≥ 3 且ㄆ ≥ ㄅ則ㄆ + ㄇ ≥ ㄅ + 3，所以可以推知：ㄅ > ㄆ的條件可以去除而規則(3)、(4)仍成立。

㈨我們曾對ㄅ ≤ 20 的各種組合進行核驗，發現規則(3)、(4)無誤，所以推測對於任意大於 1 的整數ㄅ，任意整數ㄆ、ㄇ，其中ㄆ ≥ ㄇ，規則(3)、(4)皆成立。

四、結　論

㈠有甲、乙、丙三個酒桶，裝滿後分別是ㄅ、ㄆ、ㄇ公斤，其中ㄆ ≥ ㄇ，現在甲桶中已有ㄅ公斤的酒，利用這三個桶子做量器，可以量出的酒量能依下法得出：

操作(1)：由甲桶中將酒倒入乙桶。

操作(2)：由乙桶中將酒倒入丙桶。

操作(3)：如果乙桶中已沒酒了，直接回到操作(1)，如果乙桶中還有酒，先將丙桶的酒倒回甲桶，然後回到操作(2)。

㈡當ㄅ = 1 時，對於任意的ㄆ、ㄇ，組合ㄅ、ㄆ、ㄇ是有解組合。

㈢當 20 ≥ ㄅ ≠ 1 時，對於任意的ㄆ、ㄇ，ㄆ ≥ ㄇ，組合ㄅ、ㄆ、ㄇ若滿足下列任一條件就是有解組合，否則便是無解組合。

條件 1：ㄇ = 1 且〔ㄅ／2〕≤ ㄆ + 1。

條件 2：ㄇ = 2，ㄅ是奇數且ㄅ ≤ ㄆ。

條件 3：（ㄆ、ㄇ）= 1 且〔ㄅ／2〕≤ ㄆ + ㄇ < ㄅ + 3。

條件 4：（ㄆ、ㄇ）= 2 且ㄆ + ㄇ = ㄅ + 3 或ㄅ ± 1。

㈣在㈢中，條件 1 及條件 2，對於任意的ㄅ、ㄆ都可成立。至於條件 3 及條件 4，我們推測：對於任意不等於 1 的整數ㄅ也可成立。即：對於任意量ㄅ、ㄆ、ㄇ，其中ㄅ ≠ 1，ㄆ ≥ ㄇ。若滿足㈢中四條件之一，則組合ㄅ、ㄆ、ㄇ都可稱是有解組合。若不能滿

足任一條件，則組合的ㄅ、ㄆ、ㄇ是無解組合。

註：

(1)〔ㄅ／2〕表示：ㄅ除以 2 的整數商。

(2)（ㄆ、ㄇ）表示：ㄆ和ㄇ的最大公因數。

(3)本研究全在整數範圍內討論。

五、參考資料

數學遊戲大觀第二集，前程出版社。

評　語

學生對於本研究之內容甚爲純熟，研究結果甚爲完整。學生對於各種問題之反應甚爲靈活。