打遍天下無敵手

高小組數學科第二名

台北縣永和市網溪國小　　　　作　　者：黃智光、祝豪傑

指導教師：凌明炘、成虹飛

一、研究動機

最近我們班上流行一種遊戲，我們都很喜歡玩，為了徹底了解這個遊戲，及怎樣才容易贏，於是做了下列的研究。

二、研究目的

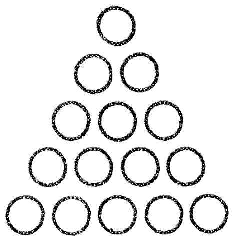
(一)瞭解這種遊戲的各種變化和排列的方式〔研究問題一、二〕

(二)分析並尋找輸贏的法則〔研究問題三〕

三、研究過程或方式

玩法解說：

(一)遊戲的圖形：



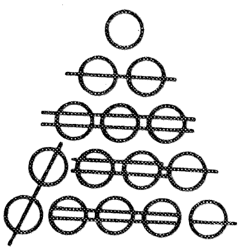
⇒ 共 15 個圈圈，排列成三角形。

(二)甲乙兩方輪流把圈圈劃掉，一次可劃 1 個、 2 個或 3 個，但是必須劃直線，不可以轉彎或跳著劃。

（正 確）　　（不正確）

㈢當某一方劃完，剩下最後一個圈圈時，該誰劃誰就算輸。

如圖：甲方──（單線）　　　　乙方──　（雙線）



⇐剩下一個該乙方劃，乙方算輸。

研究問題一：最多可玩幾回？最少可玩幾回？

㈠問題說明：

甲乙各劃一次稱“一回”。由於本遊戲是由甲乙兩方交替著劃直到分出勝負爲止，我們想知道最多或最少要玩幾回可以分出勝負。

㈡方法：

1. 總棋數固定（都是 15 個圈圈），則劃的棋數越少，玩的次數就越多；劃的棋數越多，玩的次數就越少。
2. 分別算出劃一個和劃三個的各可玩幾回。

㈢過程：

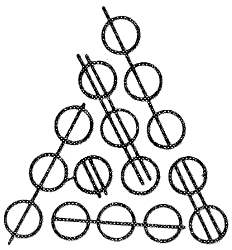
1. 最多可玩幾回？

(1)由於最少只可以劃掉一個圈圈，又是兩人輪流在玩，所以將總棋數除以 2 即可。

(2)算式：$15 \div 2 = 7 \cdots\cdots 1$

$7 + 1 = 8$（回）

(3)結果：最多可玩 8 回



2. 最少可玩幾回？

(1)劃 3 個的最多只能劃 4 次，然後就需 2 個劃一次和 1 個劃一次。如右圖：

(2)算式：$(4 + 1 + 1) \div 2 = 3$

(3)結果：最少可玩 3 回。

㈣結果：最多可玩 8 回，最少可玩 3 回。

研究問題二：棋手可能碰到的情況有幾種？

㈠問題說明：

1.為了要控制勝負，必須充分了解棋手可能面臨的各種情況。

2.棋手面對的棋子由最先空白的 15 顆，隨著被劃掉的顆數減少，到最後一顆為止。

3.在這個過程中，棋子在棋盤上的排列，隨著剩下棋子顆數（棋數）的不同而有各種變化。

㈡方法：

1.將棋子編號，由 1 ～ 15 。

2.以號碼（棋號）代替棋子，按不同棋數加以組合。

3.算出棋數為 1 ～ 15 時分別造成的排列情形。

4.把所有的排列情形（排列數）加起來即是答案了。

㈢過程：

1.棋數為 1 時，可能的排列方式：

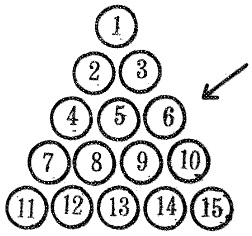
(1)算法：1 號～ 15 號棋子都可以個別出現，如表一：

表　一

開頭的棋號	排列數
1	1
2	1　ㄅ.
3	1　ㄆ.
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1
11	1
12	1
13	1
14	1
15	1

(2)算式：$1 \times 15 = 15$

(3)例圖：



這一顆棋子可以出現在圖中任何一個位置。

(4)結果：棋數為 1 時有 15 種排列方式。

2.棋數為 2 時，可能的排列方式：

(1)算法：

ㄅ.先拿 1 號棋子與其他棋子中的一顆來組合，則此時的“排列數”就等於 14 顆棋子中取 1 顆棋子的排列數。

（即表一中虛線部份的總和）

ㄆ.再拿 2 號棋子與 1 號棋子以外的其他棋子來組合，則此時的“排列數”就等於 13 顆棋子中取 1 顆棋子的排列數。

（即表一中實線部份的總和）

ㄇ.底下以此類推到 14 號棋子

ㄈ.請參閱表二：

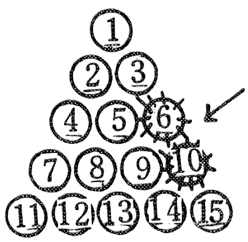
表　二

開頭的棋　號	配　對　的　棋　號	排列數	
1	2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15	14	
2	3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15	13	ㄅ.
3	4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15	12	ㄆ.
4	5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15	11	
5	6 7 8 9 10 11 12 13 14 15	10	
6	7 8 9 10 11 12 13 14 15	9	
7	8 9 10 11 12 13 14 15	8	
8	9 10 11 12 13 14 15	7	
9	10 11 12 13 14 15	6	
10	11 12 13 14 15	5	
11	12 13 14 15	4	
12	13 14 15	3	
13	14 15	2	
14	15	1	

⑵算式：把上表中的“排列數”加起來，等於：

$$14+13+12+11+\cdots\cdots+1=105\text{（種）}$$

⑶例圖：



棋數爲 2 時可以出現在⑥⑩或其他任何兩個位置。

⑷結果：棋數爲 2 時有 105 種排列方式。

3.棋數爲 3 時，可能的排列方式：

⑴算法：

ㄅ.先拿棋號爲 1 的棋子與其他棋子中的兩顆來組合，此時的排列數就等於14顆棋子中取 2 顆棋子的排列數，也就等於表二中虛線部份排列數的總和。

ㄆ.再拿棋號爲 2 的棋子與 1 號棋子以外的其他棋子組合，此時的排列數就等於13顆棋子中取 2 顆棋子的排列數，也就等於表二中實線部份排列數的總和。

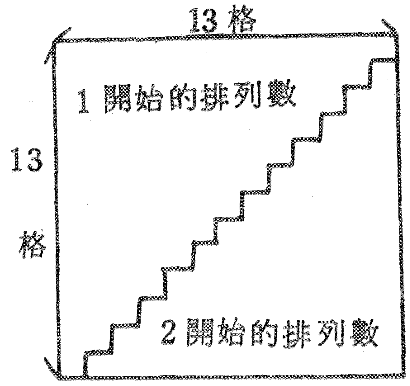
ㄇ.底下以此類推到 13 號棋子。

ㄈ.請參閱表三：

表　三

開頭的棋　號	排　　列　　數	
1	13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	
2	12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	ㄅ.
3	11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	ㄆ.
4	10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	
5	9+8+7+6+5+4+3+2+1	
6	8+7+6+5+4+3+2+1	
7	7+6+5+4+3+2+1	
8	6+5+4+3+2+1	
9	5+4+3+2+1	
10	4+3+2+1	
11	3+2+1	
12	2+1	
13	1	

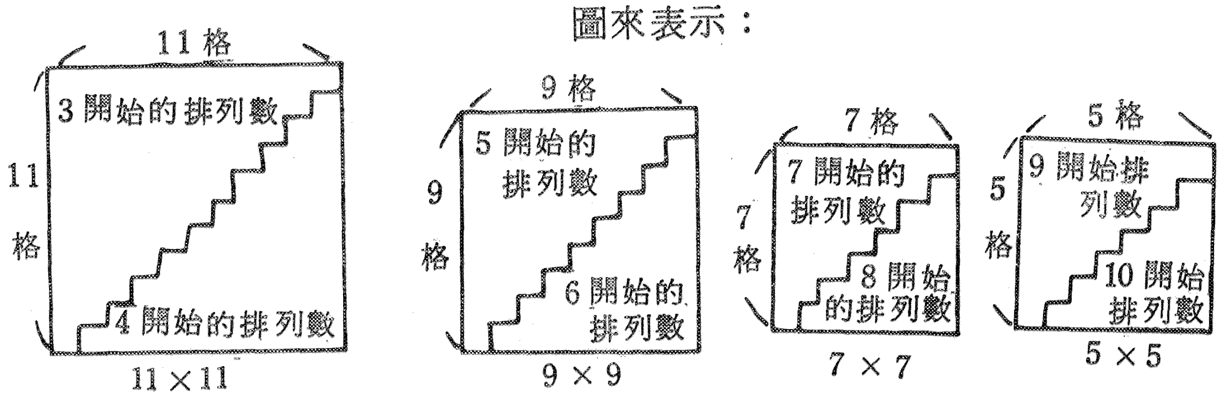
ㄉ.棋數 3 的排列數就等於表三中所有排列數的總和，但這麼多式子加起來很繁複，因此我們又把表三中13 個式子簡化成一個式子，方法如下：

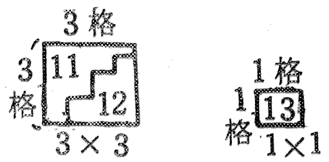


由左圖可知：$(13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1)+(12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1)$

$=13\times13$（即正方形的面積）

同理，棋數 3 中其他的式子可用下圖來表示：



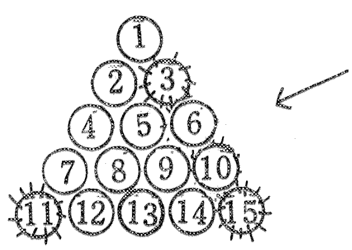


所以，棋數爲 3 的總排列數就等於這些正方形面積的和。

⑵算式：上列正方形面積的和即等於：

$$13^2+11^2+9^2+7^2+5^2+3^2+1^2=455\text{（種）}$$

⑶例圖：



棋數爲 3 時，可能出現在③⑪⑮或圖中任何位置。

⑷結果：棋數爲 3 時有 455 種排列方式。

4.棋數爲 4，5，6，7，8 時各有多少種排列方式：

⑴算法：比照棋數爲 1，2，3 時的算法

(2)算式：

ㄅ.棋數為 4 時：

$12^2+11^2+2(10^2+9^2)+3(8^2+7^2)+4(6^2+5^2)+5(4^2+3^2)$
$+6(2^2+1^2)=1365$（種）

ㄆ.棋數為 5 時：

$11^2+2\times10^2+4\times9^2+6\times8^2+9\times7^2+12\times6^2+16\times5^2+20\times4^2$
$+25\times3^2+30\times2^2+36\times1^2=3003$（種）

ㄇ.棋數為 6 時：

$10^2+3\times9^2+7\times8^2+13\times7^2+22\times6^2+34\times5^2+50\times4^2$
$+70\times3^2+95\times2^2+125\times1^2=5005$（種）

ㄈ.棋數為 7 時：

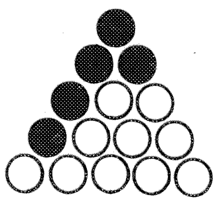
$9^2+4\times8^2+11\times7^2+24\times6^2+46\times5^2+80\times4^2+130\times3^2$
$+200\times2^2+295\times1^2=6435$（種）

ㄉ.棋數為 8 時：

$8+5\times7^2+16\times6^2+40\times5^2+86\times4^2+166\times3^2+296\times2^2$
$+491\times1^2=6435$（種）

(四)討論：

1.在 15 顆棋子中，n 顆棋子的排列數應與（$15-n$）顆棋子的排列數相等。如例圖：



5 顆黑棋有多少排列方式，相對的 10 顆白棋也有多少種排列方式。

2.我們已算出棋數 7 和棋數 8 的排列方式都是 6435 種，證明前面的計算無誤。

3.棋數 8 以後的排列數不必再計算，因為棋數 9 的排列數與棋數 6 的相同，以此類推就可算出所有的排列方式。

(五)所有的排列方式：

$(15+105+455+1365+3003+5005+6435)\times2+1=32767$(種)

研究問題三：怎樣控制輸贏？

(一)問題說明：

在實際情況中，棋手控制輸贏的能力各有不同，但是到底我們最早可以從何時開始掌握勝負的關鍵呢？

(二)方法：

1. 爲了便於分析，我們針對棋子造成的效果，歸納出六種性質：

(1)平安棋：對勝負還看不出影響。

(2)準勝棋：如步驟正確必贏，但若失誤則喪失準勝機會。

(3)準敗棋：客觀局勢已無勝算，但若對方失誤，仍有可能挽回局勢。

(4)必勝棋：必勝無疑。

(5)必敗棋：必敗無疑。

(6)失誤棋：步驟錯誤，可使勝轉敗，敗轉勝。

2. 我們從分析中發現，勝負的關鍵在於準敗棋。因爲棋手能控制的是對方將面臨的局勢，只要先將對方陷於準敗棋，就可獲得準勝的優勢，進而求得勝利。

3. 爲了要控制勝負，我們製作了準敗棋棋譜（篇幅有限，恕不刋出），製作的原則如下：

(1)先根據勝負的規則推出棋數少的準敗棋。再由棋數少的準敗棋推出棋數多的準敗棋，直到推不出爲止。

(2)每一個準敗棋棋譜都需加以證明，棋數少的用勝負規則來證明，棋數多的用棋數少的來證明。

(3)推出的準敗棋棋數越多，我們越早能控制勝負。

(三)過程：（即棋譜，因篇幅有限未能刋出）

(四)結果：根據棋譜，勝負在剛開始即已決定，棋手劃的顆數和位置對勝負均有決定性的影響。因此這並非一個公平的遊戲。

四、結　論

(一)這個遊戲最多可玩 8 回，最少可玩 3 回。總排列數有 32767 種。

(二)我們可將棋子分成平安、準勝、準敗、必勝、必敗及失誤棋 6 種

，這對用來分析戰況有極大幫助。

㈢勝負在剛開始便已決定。只要先下者下對了位置和顆數，就能獲勝；倘若剛開始下錯或中間有失誤則可能失敗。

㈣除非改變規則，否則這不是個公平的遊戲。

㈤勝負的法則：

1.就棋子排列而言：

熟記準敗棋譜，令對方陷入準敗，就能致勝。

2.就棋子顆數而言：

要精確控制剩下的棋數。例如不能留給對方 5 顆棋子的格局，否則極易造成失利。

3.就劃的次數而言：

要搶雙留單。由於劃最後一次者敗，劃倒數第二次者勝，所以要計算玩的次數。結束之前玩到雙數次者勝，玩到單數次者敗。所以要儘量搶到玩雙數次，且留單數次給對方玩。

評　語

對“拈”的遊戲頗有研究，學生對於決勝之策略有完整之歸納，充分表現出分析與歸納之能力。