有趣的火柴棒遊戲
（排火柴棒找數學公式）

高小組數學科第一名

高雄縣鳥松國民小學　　作　　者：劉承慶、謝仕淵
王幸德、劉和鑫
指導教師：曾憲宏、黃信吉

一、研究動機

(一)在五上課本裏「三角形中任意兩邊的和大於第三邊」，我們用竹籤三根實際操作理解了！「三根相等的竹籤可以排成什麼圖形？我們用火柴棒做爲代替同長的三邊去圍圖形！

(二)在排圖形中，我們以爲一個等長的火柴棒，排出來的正方形，可以連成兩個正三角形，結果成了「⧄」這樣有趣的現象！

(三)下課後，我們隨意排出許多相等的正三角形，並與同學比賽，誰排得多，誰排得快！「同樣的正三角形數」，用乘法公式去數，很方便！

(四)對了！公式！公式！我們何不利用排火柴棒去找數學公式呢？

二、研究目的

(一)火柴棒能連成那些多邊形？多邊形中那些可以連成正三角形數？

(二)依次加大邊數，內部單位數有什麼變化或發現？

(三)在圖形操作中，能否找得數學公式或新公式？

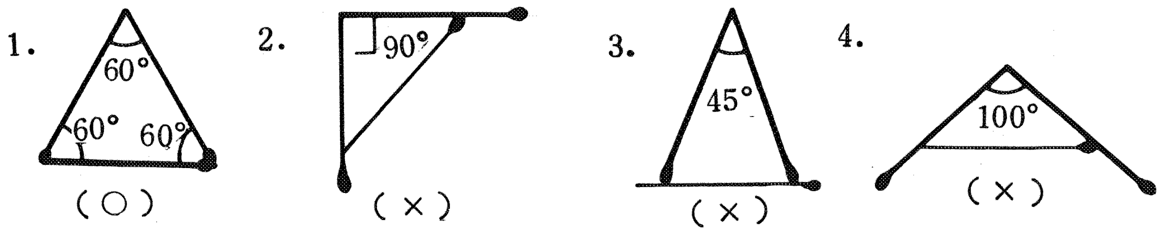
三、研究設備器材

1.火柴二包；2.量角器；3.三十公分或四十五公分直尺（塑膠質）一或二枝；4.藍寶樹脂一瓶；5.剪貼簿；6.原子筆或鉛筆一枝；7.剪刀或小刀一把；8.彩色筆一盒等。

四、研究過程

〔活動一〕：三根等長的火柴棒可以圍成什麼圖形？

〔操　作〕：



發現及討論：

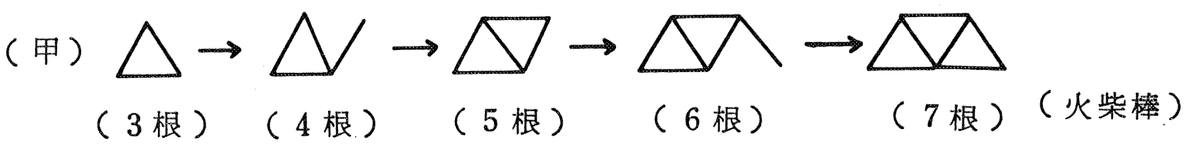
1. 三根等長的火柴棒可以圍成一個三角相等（內角各爲 60°）的正三角形。
2. 一角等於 90°，小於 60° 或大於 60° 均不能圍成正三角形。

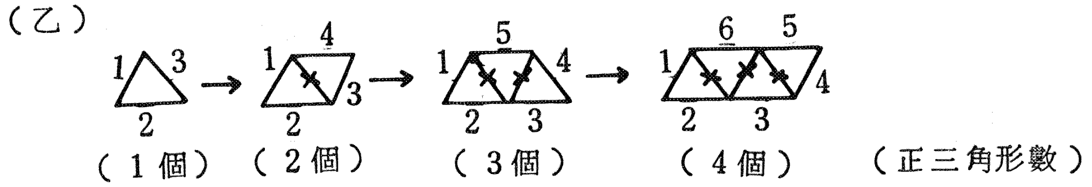
結果：

三根火柴棒因爲長度相等（各約 5 公分）只能圍成一個正三角形

〔活動二〕：

〔操　作〕：





發現及討論：

1. 由（甲）操作圖形中發現：火柴棒三根圍成一個正三角形後每加二枝便多一個正三角形數。
2. 凡火柴棒「總根數」是 3，5，7，9，11 ……等奇數根時，可以排成完整的正三角形圖形。
3. 偶數總根數如 2，4，6，8，10，12 ……等，不能排成完整的正三角形。
4. 在完整的正三角形圖形中，奇數正三角形數如 3、5、7 ……等，所圍的圖形是「梯形」。偶數正三角形數如 2、4、6、8 ……等，

所圍的圖形是「平行四邊形」。

5. 由（乙）操作圖形中，外圍根數和正三角形數相差 2，即（外圍根數）－（正三角形數）＝ 2；（正三角形數）＝（外圍根數）－ 2。

（外圍根數 3，得正三角形數 1，相差是 3－1＝2）

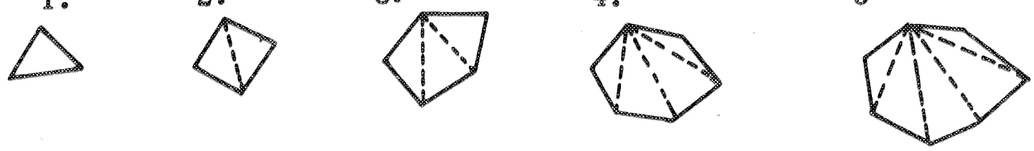
結果：

得　公式：設有□根外圍根數時：$\boxed{\text{正三角形數}=\square-2}$

〔活動三〕：火柴棒可以排成那些多邊形（一根爲一邊），各可連成多少個三角形數（不一定是正三角形）。

〔操　作〕：

1.　2.　3.　4.　5



（外圍邊數）	3	4	5	6	7	8	9	□
（三角形數）	1	2	3	4	5	6	7	□－2

發現及討論：

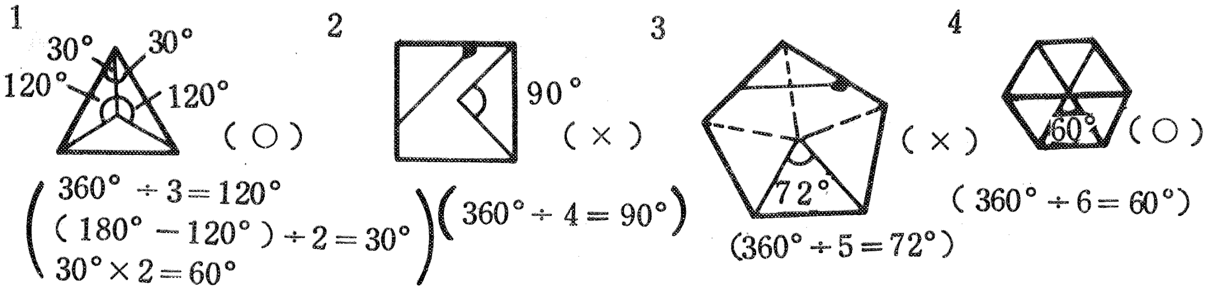
1. 火柴棒三根可以排成一個三邊形，是一個正三角形。
2. 4 根、5 根、6 根……等無論單數或是偶數均可圍成多邊形，其內部可以用虛線連成三角形。
3. 多邊形四邊，叫四邊形，五邊叫五邊形……□根（邊）得□邊形。

結果：

得　公式：$\boxed{\text{多邊形連成三角形數}} = \underset{\text{（邊數）}}{\overset{\text{（根數）}}{\square}} - 2$

〔活動四〕：火柴棒圍成那些正多邊形（等邊又等角）？又正多邊形中有那些可以連成（火柴棒爲準）——約 5 公分的正三角形？

〔操　作〕：



討論及發現：

1. 正多邊形中只有三邊相等圍成一個正三角形；六邊相等圍成六個正三角形。（證明：$360° \div 6 = 60°$，圓心角 60°，其餘各爲 2 個 60°，成正三角形）

2. $360° \div 7 = 51.428\cdots$（約 51.43°）（$\neq 60$）
$360° \div 8 = 45°$（$\neq 60°$）；$360° \div 9 = 40°$（$\neq 60°$）；$360° \div 10 = 36°$（$\neq 60°$）；$360° \div 11 = 32.727\cdots\cdots$（約 32.73°）（$\neq 60°$）；$360° \div 12 = 30°$（$\neq 60°$）

3. 正三角形能連成正三角形；正四邊形（正方形）不能連成正三角形；正六邊形能連成六個正三角形。七邊形以上圓心角越來越小，無法連成正三角形。

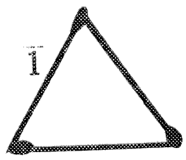
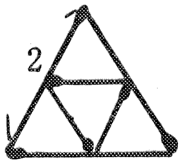
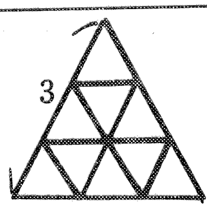
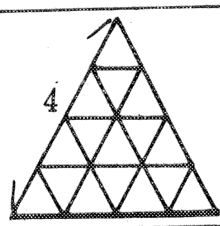
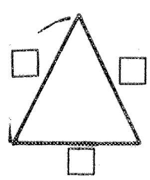
結果：

1. 等邊等角的正多邊形中只有三等邊和六等邊，可以圍成正三角形，其他正多邊形均不能圍成正三角形。

2. 利用圓周角 360° 除以邊數所得圓心角爲 60° 或 120°，可以檢驗是否可以得出所要連成的正三角形數。

〔活動五〕：正三角形依擴大 1、2、3、4、5、6 倍……後，擴大面積是原來的多少倍？又擴大後，內部可以連成多少個正三角形單位數？

〔操　作〕：

圖形	1 	2 	3 	4 	

說	每邊根數	1	2	3	4	□
	內部三角形數	$1=1^2$	$4=2^2$	$9=3^2$	$16=4^2$	□×□
明	計算	1	1 +3 4 $4\div 1=4$(倍)	1 3 +5 9 $9\div 1=9$(倍)	1 3 5 +7 16 $16\div 1=16$(倍)	□²(倍) □²÷1=□²

討論及發現：

1. 外圍根數是一邊一根，得（$1\times 3=3$）三根，一邊□根，得□ × 3＝3□（根）

2. 內部三角形數擴大後發現呈奇數排列 1、3、5、7、9……等。

3. 擴大 2 倍（外圍根數）內部三角形數爲 2^2 即 $2\times 2=4$，3 倍時，得 $3^2=9$；□倍（或□根）時爲□²（倍）。

4. 擴大後面積是原來正三角形數 1 的多少倍？經操作後發現，擴大 2 倍，擴大面積是原來的 $2^2\div 1=4$（倍），擴大□倍時，爲原來面積的□²倍。

結果：得公式

1. 正三角數（奇數連續數和）＝（項×項）或（層數×層數）或（□²）（□代表層或項）

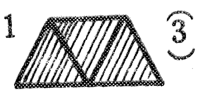
   例：$1+3+5+7+9+11+13=?$

   □＝ 7 ，□² ＝$7\times 7=49$　　答：和是 49

2. 正三角形面積經推理得：（單位面積值）×邊數²〔單位面積值以 1 公分爲 1 根火柴棒，$1\times 0.85\div 2=0.425$；$0.425\times$（邊數）²。公分數代表邊數〕和實測面積比較有誤差，平均 1 個小正三角形面積誤差爲 0.00268 平方公分～0.003 平方公分。（討論：略）

〔活動六〕：三個小正三角形成爲梯形，擴大倍數有什麼發現？

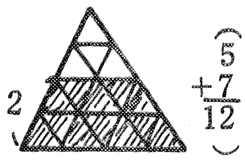
〔操　作〕：



（側面）1根：（1倍）

（正三角形數）：3

$2^2-1^2=4-1=3$



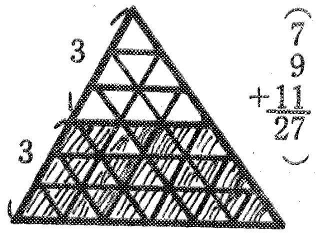
（側面）2根（擴2倍）

（正三角形數）：12

$4^2-2^2=16-4=12$

$12\div3=4$（倍）

即 2^2（倍）



（側面）3根（擴3倍）

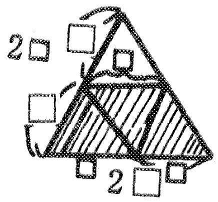
（正三角形數）：27

$6^2-3^2=36-9$

$=27$

$27\div3=9$（倍）

即 3^2（倍）



（側面）□根

（擴大□倍）

$(2□)^2-□^2=4□^2-□^2=3□^2$

正三角形數是 $3□^2$，即 $□^2$ 倍

發現及討論：

1. 梯形內部至少要三個小正三角形數構成。
2. 梯形上底□根，下底則爲□＋□根，或2□根。
3. 梯形擴大後單位數是原單位數的 $□^2$ 倍。
4. 上底根數＝〔（上底層正三角形數）＋1〕÷2－1

　　（如：上底層數是5，根數2）

　下底根數＝〔（下底層正三角形數）＋1〕÷2

　　（如下底層數是11，根數6）

結果：

1. 擴大□倍後之梯形正三角形數公式是：

　（下底根數）^{2}－（上底根數）^{2}＝等腰梯形內部小正三角形數

　設上底爲□根

　　下底爲（□＋□）根＝2□根

依公式：$2\square^2-\square^2=(2\square\times2\square)-(\square\times\square)$

$=4\times\square^2-1\times\square^2=(4-1)\times\square^2$

$=3\times\square^2$

應用：如：$3+5+7+9+11+13=48$

（缺項）：上底根數：$(3+1)\div2-1=1$；〔或$(3-1)\div2=1$〕

（全項）：下底根數：$(13+1)\div2=7$；〔或$(13-1)\div2+1=7$〕

（根數＝項數＝層數）

$7^2-1^2=7\times7-1\times1=49-1=48$

2. 梯形面積：

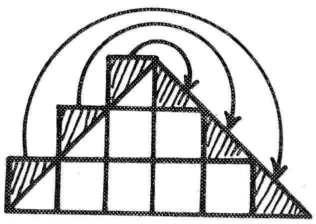
等腰梯形面積：（如果下底公分數－上底公分數＝側面等腰公分數）

即 $0.425\times[(\text{下底公分數})^2-(\text{上底公分數})^2]$

3. 缺項公式：$(\text{全部項數})^2-(\text{空缺項數})^2$

（奇數缺項）

〔活動七〕:正三角形單位數常呈 1、3、5、7、9……等奇數形態堆積；其和爲（邊長公分數）² 或（項數）²、或（層數）²，正方形單位數如做奇數排列會相同嗎？



$1+3+5=9$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3 \\ +\ 5 \\ \hline 9 \end{array}$$

層數：3

$3\times3=9$，$\left(\begin{array}{l}\square^2=3\times3\\ \quad=9\end{array}\right)$

答：9

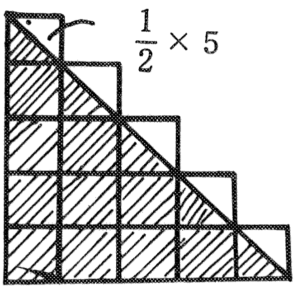
發現及討論：

1. 正方形單位數以奇數排列後可以用切成半個正方形補成 45° 等腰金字塔形時和正三角形數和完全一樣。可見奇數連續數和是一種正三角形數或 45° 等腰三角形數排成的。

〔活動八〕：依上述方法求 $1+2+3+4+5=?$

〔操　作〕

圖解：



$5^2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times5$

$=25\times0.5+0.5\times5$

$=12.5+2.5$

$=15$

討論：

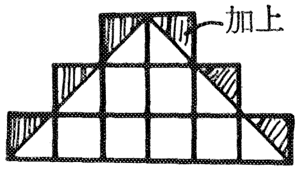
1.應用切成半個金字塔形後再加多餘的半個正方形數和。

結果：

公式：□代表項，$1+2+3+4+\cdots\cdots\square=？$

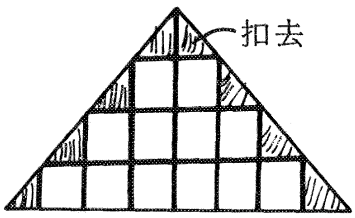
$$\square=\square^{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\square$$

〔活動九〕：$2+4+6=？$（偶數連續數和怎樣求？）



$3^{2}+3=9+3$ （$\square^{2}+\square$）（原層）

$=12$ （公式一）



$(3+1)^{2}-(3+1)$ 〔$(\square+1)^{2}-(\square+1)$〕

$=4^{2}-4$ （加一層）

$=16-4$ （公式二）

$=12$

結果：得公式：

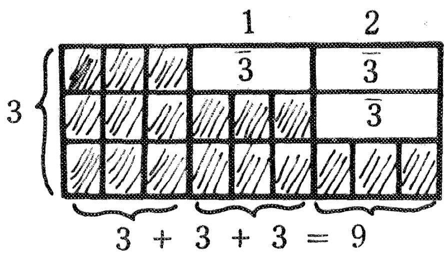
原　層：偶數連續和$=\square^{2}+\square$

加一層：偶數連續和$=(\square+1)^{2}-(\square+1)$

〔活動十〕：$3+6+9=？$

〔操　作〕：應用金字形公式無法對應求出。

經「切補」方法推理出下列方法：



$3\times9-3\times(1+2)$

$=27-9$

$=18$

答：18，即□代表項；

得公式：

$\square\times(3\times\square)-3\times[1+2+\cdots(\square-1)]$

結果：

1.得公式：$\square\times(3\times\square)-3\times[1+2+3+\cdots(\square-1)]$

2.以切補法使它成為長方形再扣去空缺數。

五、結 論

此次排火柴棒活動經過十項操作活動，使我們得到許多新發現及新方法即新公式。整理如下：（較重要的）

(一)正三角形數＝□－2（□代表邊數）

(二)金字形公式＝$□^2$　（□代表邊數，或層數）

(三)奇數連續數和＝$□^2$（□代表項數）

(四)偶數連續數和＝$□^2+□$　（公式一）

或 $(□+1)^2-(□+1)$　（公式二）

(五)整數連續數和＝$□^2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times□$　（□代表層或項）

(六)等差3連續數和（$3+6+9+\cdots$）＝$□\times(3\times□)-3\times[1+2+\cdots+(□-1)]$

六、參考資料

(一)國小數學課本第九冊、十冊、十一冊、十二冊等。

(二)歷屆全國展有關數學部份如「二十屆」「二十一屆」等有關資料。

評 語

透過排火柴棒的遊戲發現數學公式，學生對於本研究的動機與方法的了解甚為透徹，並且具有很強的分析與歸納的能力，學生對於各種問題之反應甚為靈敏。