

堆堆看，誰最遠？

初小組數學科第三名

高雄市瑞祥國民小學

作者：黃于修、黃世澤

楊一郎、梁純華

指導教師：萬國興、潘秀娥

一、研究動機

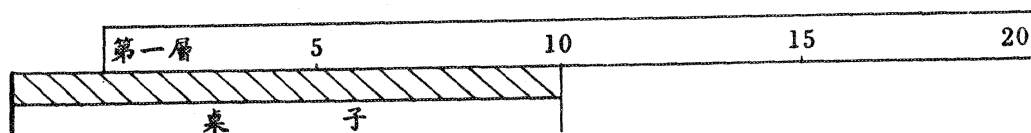
星期日下午，我和黃同學一起到老師家的菜園烤蕃薯，起先，我們各自分開做土窯，看誰做得又快又不會倒。老師一聲令下，我們就開始做了。黃同學堆土塊時，土塊和土塊重疊的部分太少了，做到一半的時候，就倒下來了，黃同學做了又做，都是倒下來，可是我的土窯卻不會倒下來，因為土塊和土塊重疊的部分大，等我做完了，黃同學才做到一半卻又倒下，真傷腦筋，他問老師：為什麼他做的土窯會倒？我做的土窯卻不會倒？怎麼堆才不會倒下來呢？於是，在老師的指導下，做了下面的實驗。

二、研究目的

- (一)由堆堆看的遊戲中，操作壓克力積木，並整理所有的記錄，發現其中的數據變化，而求得積木向前推的最長距離的方法。
- (二)比較長寬不同或厚度不同的壓克力積木，從實際操作和發現的方法，互相印證。
- (三)操作各種材料不同的積木或方塊，去比比看誰堆得最遠？
- (四)從操作的過程中，了解分數和小數的關係，並且培養計算的能力和歸納整理分數的規律性。
- (五)從操作中，了解在生活中各種工程、建築、材料、測量等運用，更引發濃厚研究的興趣。

三、研究過程方法

(一)製作長方體壓克力積木，積木長 20 公分，寬 4 公分，厚 0.5 公分，共五塊，每塊壓克力積木都記上刻度。操作時，把壓克力積木平放在桌上，積木下面墊上課本，避免桌子邊緣不平，然後，以桌子邊緣為起點，一公分一公分往前推，並記錄突出桌子的最長距離。



1. 祇有一塊壓克力積木時堆得突出桌子最長的距離。如記錄表。

單位：公分

突出桌子的距離 層次 \ 次別	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	十三	十四
第一層	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	10.5	10.1
最長的距離	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
結果	沒倒	沒倒	沒倒	沒倒	沒倒	沒倒	沒倒	沒倒	沒倒	沒倒	沒倒	沒倒	倒下	倒下

2. 祇有二塊壓克力積木時，堆得突出桌子的距離。如記錄表

突出桌子的距離 層次 \ 次別	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	十三	十四	十五	十六	十七	十八	十九	二十	二十一	二十二
第一層	10	10	9	9	8	8	7	7	6	6	5	5	4	4	4	3	3	2	5	5	5	15
第二層	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15	15	16	16	15	14	14	13	13	15.5	15.2	15.1	5
最長的距離	10		11		12		13		14		15			14		13						15
結果	沒倒	倒下	沒倒	倒下	沒倒	倒下	沒倒	倒下	沒倒	倒下	沒倒	倒下	倒下	倒下	沒倒	倒下	沒倒	倒下	倒下	倒下	倒下	沒倒

3. 祇有三層壓克力積木時，堆得突出桌子的最長距離。如記錄表

突出桌子的距離 層次 \ 次別	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	十三	十四	十五
第一層	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	5	8	7	7
第二層	10	10	9	9	8	8	7	7	6	6	5	10	5	5	5
第三層	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15	15	15	18	17	18
最長的距離	10		11		12		13		14		15	15			
結果	沒倒	倒下	沒倒	倒下	沒倒	倒下	沒倒	倒下	沒倒	倒下	沒倒	倒下	沒倒	倒下	倒下

突出桌子的距離 層次	次別	十六	十七	十八	十九	二十	二十一	二十二	二十三	二十四	二十五	二十六	二十七	二十八	二十九	三十
		第一層	7	6	5	4	3.8	3.8	3.9	3.7	3.6	3.5	3.5	3.4	3.3	3.4
第二層	5	5	8	8	8.1	8	7.9	8	8.1	8.1	8.2	8.3	8.3	8.2	8.3	
第三層	19	19	18	18	18.1	18.2	18.2	18.3	18.3	18.3	18.3	18.3	18.3	18.3	18.4	18.4
最長的距離				18	18.1									18.3		
結果		倒下	倒下	倒下	沒倒	沒倒	倒下	倒下	倒下	倒下	倒下	倒下	倒下	沒倒	倒下	倒下

4. 祇有四層壓克力積木時，堆得突出桌子的最長距離。如記錄表

突出桌子的距離 層次	次別	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	十三	十四	十五	十六	十七
		第一層	10	10	10	10	10	3.3	2	3	4	5	4	3	10	2	4	4
第二層	10	10	10	10	3.3	8.3	8	7	6	6	5	5	10	6	6	5	6	
第三層	10	10	8	5	8.3	10	11	12	11	10	11	12	9	13	11	11	11	
第四層	10	11	12	15	18.3	18	19	19	19	19	19	19	11	19	19	20	20	
最長的距離		10		12	15		18					19		11				20
結果		沒倒	倒下	沒倒	沒倒	倒下	沒倒	倒下	倒下	倒下	倒下	沒倒	倒下	沒倒	倒下	倒下	倒下	沒倒

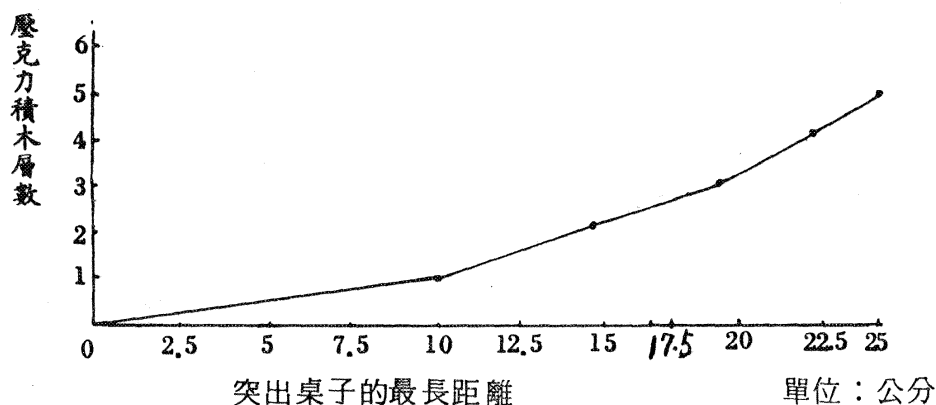
突出桌子的距離 層次	次別	十八	十九	二十	二十一	二十二	二十三	二十四	二十五	二十六	二十七	二十八	二十九	三十	三十一	三十二	三十三	三十四
		第一層	2	3	3	2.6	2.5	2.6	2.5	2.4	2.6	2.6	2.5	2.6	2.5	2.5	2.6	2.5
第二層	6	5	5.5	5.6	5.6	5.7	5.8	5.7	5.6	5.8	5.9	5.7	5.7	5.8	5.7	5.8	5	
第三層	12	10	10.5	10.6	10.7	10.7	10.7	10.7	10.7	10.7	10.7	10.7	10.8	10.8	10.9	10.9	11	
第四層	20	20	20	20.1	20.2	20.3	20.4	20.5	20.6	20.7	20.7	20.8	20.8	20.8	20.9	20.9	21	
最長的距離			20	20	20.1	20.2	20.3	20.4	20.5	20.6	20.7	20.7	20.8		20.8			
結果		倒下	沒倒	沒倒	沒倒	沒倒	沒倒	沒倒	沒倒	沒倒	沒倒	沒倒	沒倒	倒下	沒倒	倒下	倒下	倒下

5. 祇有五層壓克力積木時，堆得突出桌子的最長距離。如記錄表

突出桌子的距離 層次	次別																
	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	十三	十四	十五	十六	十七
第一層	10	10	10	5	3	5	5	4	4	4	2.5	2.5	3	2	3	2	2
第二層	10	10	10	5	6	8	5	6	5	4	5.8	5.8	5	5	5	5	5
第三層	10	10	10	7	8	7	6	9	8	8	10.8	10	10	9	8	9	8
第四層	10	9	8	10	11	11	11	10.7	11	12	20.8	10.8	11	12	12	11	12
第五層	10	11	12	19	20	19	20	20.3	21	21	10	20.8	21	22	22	23	23
最長的距離	10	11	12	19	20	19	20	20.3	21	21			21	22			
結果	沒倒	沒倒	沒倒	沒倒	沒倒	沒倒	沒倒	沒倒	沒倒	沒倒	倒下	倒下	沒倒	沒倒	倒下	倒下	倒下

突出桌子的距離 層次	次別																
	十八	十九	二十	二十一	二十二	二十三	二十四	二十五	二十六	二十七	二十八	二十九	三十	三十一	三十二	三十三	三十四
第一層	2	2	2.2	2.3	2	2.2	2.1	2.1	2.2	2.1	2	2	2.1	2.2	2	2	2
第二層	5	4.5	5	5	4.9	4.4	4.3	4.5	4.6	4.5	4.5	4.4	4.3	4.3	4.4	4.3	4.4
第三層	9	8	7.6	7.5	7.6	7.7	7.8	7.7	7.8	7.8	7.8	7.8	7.7	7.6	7.5	7.7	7.6
第四層	11.5	12	12.6	12.6	12.7	12.7	12.7	12.7	12.8	12.8	12.8	12.8	12.7	12.8	12.8	12.7	12.8
第五層	22.5	22	22.6	22.7	22.7	22.8	22.8	22.8	22.8	22.8	22.8	22.9	22.9	22.9	23	23	23
最長的距離	22.5	22	22.6		22.7							22.8					
結果	沒倒	沒倒	沒倒	倒下	沒倒	倒下	倒下	倒下	倒下	倒下	倒下	沒倒	倒下	倒下	倒下	倒下	倒下

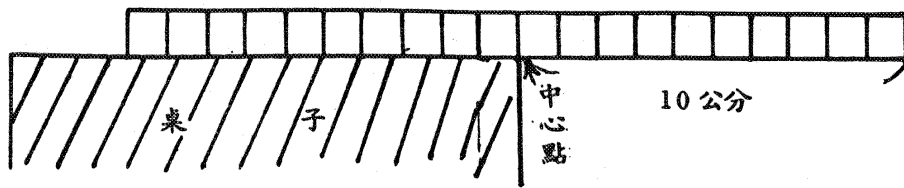
6. 我們將各層壓克力積木突出桌子的最長距離，列出一個統計表。



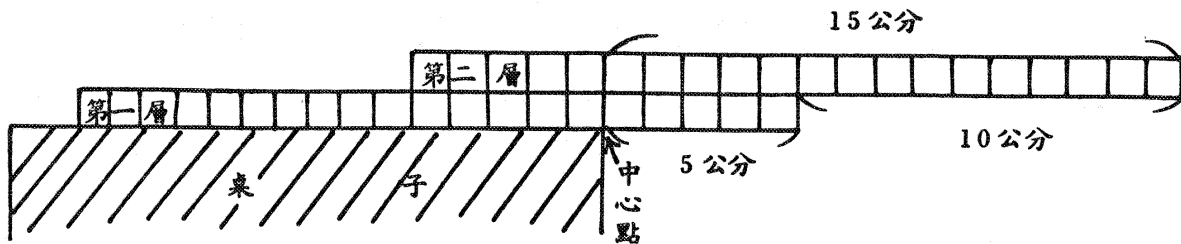
7. 我們的想法和發現

(1) 壓克力積木操作的實驗，就好像坐蹺蹺板一樣，兩邊重量要

一樣重一樣長，才能保持平衡。所以我們以桌子的邊緣為中心點，堆得最長的距離恰好是壓克力積木全長的一半。如下圖。設 1 個格子為 1 公分，剛好兩邊各是 10 格。



(2) ㄅ、操作兩層時，我們發現突出最長的距離，如下圖



ㄨ、我們以桌子的右側邊緣為中心點，發現沒有突出桌子的格子數恰好等於突出桌子的格子數（ $15 + 5 = 20$ 格）所以 $5 + 15 = 15 + 5$ ，而突出桌子的格子數恰好是全部各層格子的總合數的一半， $(20 + 20) \div 2 = 20$ 格。因此，我們每次操作所想出的格子數都以不超過全部各層格子總數的一半為原則。但是我們也想突破這個記錄。

(3) 操作到祇有三層壓克力積木時，我們想到用小數點來記錄結果，但是祇能算到小數點以下第一位（公厘）。這樣，可以算得比較精確，但是仍然有誤差。如操作到祇有三層時，突出桌子的格子總數還差 0.1 格，即 $3.3 + 8.3 + 18.3 = 29.9$ 。

(4) 我們從統計表發現到：

ㄅ、我們每次操作到最上面的一層壓克力積木，都是在十公分的地方（全長積木的 $\frac{1}{2}$ ）最難堆好，幾乎每次都掉下來。

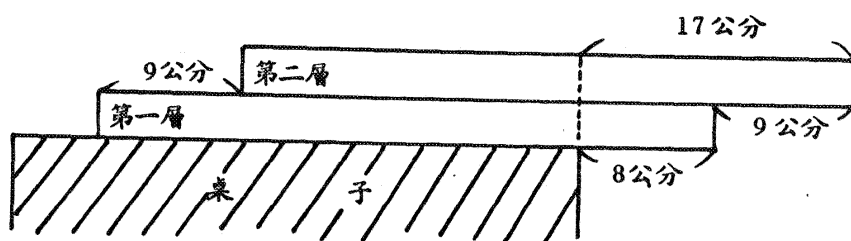
ㄨ、我們發現到最上面的一層和次一層，突出桌子最長的距離都相差 10 公分，而次一層和次二層都差 5 公分，而次二層和次三層都差 3.3 公分，而形成一個規則性。

丁、當我們操作到祇有五層時，第五層突出桌子的最長距離 22.8 公分，與第四層突出桌子的距離 12.8 公分，恰好相差 10 公分，就是全長壓克力積木的 $\frac{1}{2}$ 。而第四層突出桌子的距離與第三層突出桌子的距離相差 5 公分，恰好是全長壓克力積木的 $\frac{1}{4}$ 。第三層突出桌子的距離與第二層突出桌子的距離相差 3.3 公分，恰好是全長壓克力積木的 $\frac{1}{6}$ ；由此，我們可以推得全長的 $\frac{1}{8}$ ， $\frac{1}{10}$ ……等。

戊、因此，我們求得最長的距離是：如圖(六)

$$\begin{aligned}
 & \frac{\text{每塊積木全長的距離}}{2} + \frac{\text{每塊積木全長的距離}}{4} \\
 & + \frac{\text{每塊積木全長的距離}}{6} + \frac{\text{每塊積木全長的距離}}{8} \\
 & + \frac{\text{每塊積木全長的距離}}{10} \\
 & = \left(\begin{array}{l} \text{第五層與第四} \\ \text{層突出桌子距} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{第四層與第三} \\ \text{層突出桌子距} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{第三層與第二} \\ \text{層突出桌子距} \end{array} \right) \\
 & \quad \quad \quad \text{離的差} \quad \quad \quad \text{離的差} \quad \quad \quad \text{離的差} \\
 & \quad \quad \quad \left(\begin{array}{l} \text{第二層與第一} \\ \text{層突出桌子距} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{第一層突出桌子的距離} \\ \text{離的差} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

己、第一層突出桌子的距離和第二層突出桌子距離的差，恰好是壓克力積木另一邊向前推進的距離。如下圖。



去、我們可以算出各層突出桌子的距離，可以很快就排出突出桌子的最長距離。

8. 製作尺寸長 10 公分，寬 2 公分，厚 0.5 公分的壓克力積木，共十塊，依照我們的發現的方法求突出桌子的最長距離，並和實

際操作互相印證。(誤差 0.2 公分)

$$\begin{aligned}\text{最長的距離} &= \frac{10}{2} + \frac{10}{4} + \frac{10}{6} + \frac{10}{8} + \frac{10}{10} + \frac{10}{12} + \frac{10}{14} + \frac{10}{16} + \frac{10}{18} + \frac{10}{20} \\ &= 14.6 \text{ 公分}\end{aligned}$$

(二)長寬不同或厚度不同的壓克力積木，求突出桌子的最長距離。由我們發現的方法和實際操作互相印證。

1.寬度不同的壓克力積木：寬 4 公分，長 10 公分，厚 0.5 公分二塊，求突出桌子的最長距離。

$$\frac{10}{2} + \frac{10}{4} = 7.5 \text{ 公分}$$

2.厚度不同的壓克力積木：長 10 公分，寬 2 公分，厚 0.25 公分二塊，求突出桌子的最長距離。

$$\frac{10}{2} + \frac{10}{4} = 7.5 \text{ 公分}$$

(三)材料不同的積木或方塊，比比看，誰堆得最遠？

1.壓克力積木：如上面做的。

2.鐵片：長 10 公分，寬 2 公分，厚 0.1 公分，共十塊，由公式求得 14.6 公分，操作的結果却有一些誤差(差 0.3 公分)。

3.磚頭：長 23 公分，寬 11 公分，厚 6 公分，共三塊，因質料不均勻，誤差較大。操作的結果，突出桌子最長的距離是 16.1 公分。

4.木板：長 10 公分，寬 1.8 公分，厚 0.4 公分，共二塊，操作的結果，突出桌子最長的距離是 7.4 公分(誤差 0.1 公分)。

四、結 論

(一)操作到祇有二層時，我們發現到加法的交換律 $5 + 15 = 15 + 5$ 。

(二)長寬不同或厚度不同的壓克力積木，突出桌子的最長距離和積木全長相比，仍然是一樣。我們用實際操作來證明我們發現的方法是正確的。

(三)不同材料的積木或方塊，由於積木本身的結構不同，操作的結果會有些不同。壓克力積木質料比較均勻，實驗操作起來，結果比較精確。

(四)突出桌子的最遠距離是

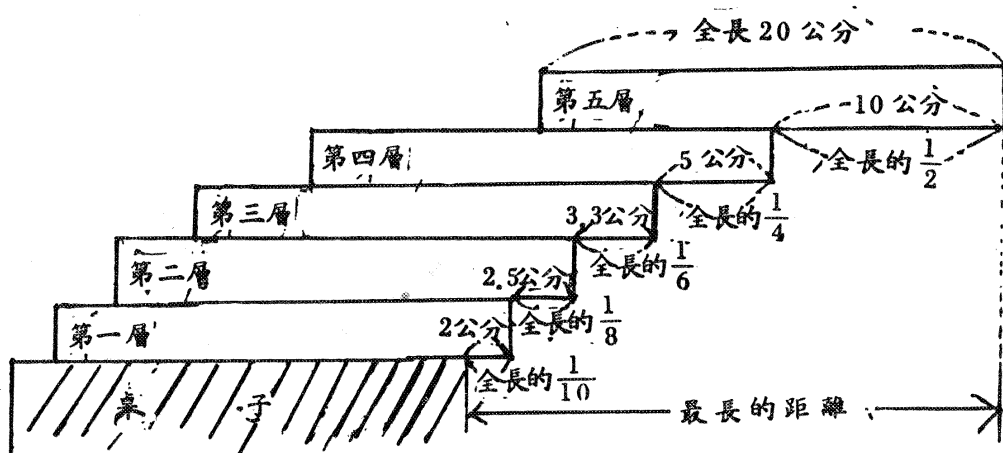
$$\frac{\text{每塊積木全長的距離}}{2 \times 1} + \frac{\text{每塊積木全長的距離}}{2 \times 2}$$

$$+ \frac{\text{每塊積木全長的距離}}{2 \times 3} + \frac{\text{每塊積木全長的距離}}{2 \times 4} + \frac{\text{每塊積木全長的距離}}{2 \times 5}$$

$$+ \dots + \frac{\text{每塊積木全長的距離}}{2 \times \text{ㄅ}} \quad (\text{ㄅ是代表積木的塊數})$$

(五)我國古代造橋、蓋房子樑柱支撐的問題，可能和這個有關，這個實驗對土木、工程、建築、材料等運用上有很大的貢獻。由操作中引發我們濃厚的興趣，等我們長大，再加以研究探討。

(六)用圖來表示，我們更容易了解。



五、推 論

(一)假如我們把已經疊好的部分往上移，然後一層一層往底下加，這樣；突出桌子的距離會愈加愈長，而最底下的一層突出桌子的距離愈接近於零（接近與桌子邊緣對齊）。

(二)操作祇有二層時，突出桌子的距離不一定上面一層長，下面一層短，而下面一層長，上面一層短，也不會倒下來。

(三)假如積木左邊沒有突出桌子部分的重量比右邊突出桌子部分的重

量還重，或兩邊的重量相等，這樣；就不會倒下來。

六、參考資料

- (一) 國小數學課本教學指引第七、八冊「小數與分數」，國立編譯館。
。 P.200
- (二) 新數學·羅鴻翔譯·赫登斯著·國教之友社出版。 P.257、P.326
- (三) 數學選粹第二集·數理問題一則·李植孔著·台北市科學出版事業基金會出版。 P.54
- (四) 物理學基本原理第二冊·Halliday 著·王唯農、王明建譯·東華書局出版。 P.1~P.15

評 語

題目新穎，但經實驗後，無法得到一個數學理論，所以無法做預測，是其缺點。