

怎樣一筆畫？

初小組數學科第二名

新竹縣華興國民小學

作 者：彭鍊穩、劉志龍

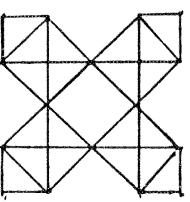
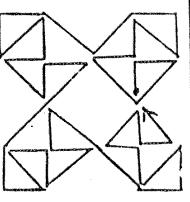
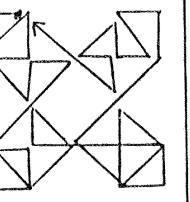
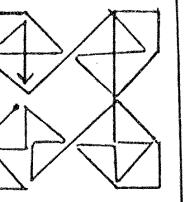
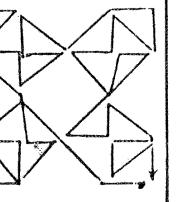
邱子惠、王黎葦

指導教師：陳智華、古富禎

一、研究動機

國語日報上有時候會刊載著一種由線段組成的圖形，要我們只用一筆畫，就把這個圖形畫好。每當看到這種題目，班上同學就比賽，看誰畫得對、畫得快。結果我們都能把那些圖形用一筆畫成，但是畫法不一定和報上公佈的「標準答案」完全相同，而且有很多種的畫法。例如：74年9月12日的題目及我們的畫法如下表。

表一

題 目	我 們 的 畫 法				
					

報上每次刊出的圖形，我們都能用一筆畫成，這使我們產生了幾個疑問？

- (一)是不是任何圖形都可以一筆畫成？
- (二)可以一筆畫的圖形，有沒有秘訣可以很快的畫好？
- (三)那些圖形可以一筆畫好？那些不能？
- (四)不能以一筆畫好的圖形，至少需幾筆才能畫好？

在老師的指導下，我們對上面的問題分別做了研討。

二、研究過程

[問題一]是不是任何圖形都可以一筆畫成？

(一)首先試試幾個比較簡單的圖形。

下表是同學們提出的圖形（如表二）

表二

編號	①	②	③	④	⑤
圖形	A house-shaped polygon with a trapezoidal base and a triangular top.	An equilateral triangle.	A square with a horizontal line segment from the midpoint of one side to the midpoint of the opposite side.	An equilateral triangle with internal lines connecting vertices to midpoints and midpoints to midpoints.	A square with a diagonal line segment from one corner to the opposite corner.

編號	⑥	⑦	⑧	⑨
圖形	An equilateral triangle with internal lines connecting vertices to midpoints and midpoints to midpoints.	A complex polygon with many sides and vertices.	An equilateral triangle with internal lines connecting vertices to midpoints and midpoints to midpoints.	A five-pointed star shape.

①號圖形經過大家的研討，至少有以下各種畫法（如表三）

表三

類型	1	2	3	4	5	其他
畫法	Diagram showing a house-shaped polygon with arrows indicating a single continuous path starting from the leftmost vertical line and ending at the rightmost vertical line.	Diagram showing a house-shaped polygon with arrows indicating a single continuous path starting from the top vertex and ending at the bottom vertex.	Diagram showing a house-shaped polygon with arrows indicating a single continuous path starting from the leftmost vertical line and ending at the rightmost vertical line.	Diagram showing a house-shaped polygon with arrows indicating a single continuous path starting from the top vertex and ending at the bottom vertex.	Diagram showing a house-shaped polygon with arrows indicating a single continuous path starting from the leftmost vertical line and ending at the rightmost vertical line.	省略

②號圖形也有許多種畫法（如表四）

表四

類型	1	2	3	4	5	其他
畫法	Diagram showing an equilateral triangle with arrows indicating a single continuous path starting from the top vertex and ending at the bottom vertex.	Diagram showing an equilateral triangle with arrows indicating a single continuous path starting from the leftmost vertex and ending at the rightmost vertex.	Diagram showing an equilateral triangle with arrows indicating a single continuous path starting from the top vertex and ending at the bottom vertex.	Diagram showing an equilateral triangle with arrows indicating a single continuous path starting from the leftmost vertex and ending at the rightmost vertex.	Diagram showing an equilateral triangle with arrows indicating a single continuous path starting from the top vertex and ending at the bottom vertex.	省略

③號圖形的畫法（如表五）

表五

類型	1	2	3	4	其他
畫法					省略

(4)號圖形的畫法(如表六)

表六

類型	1	2	3	4	其他
畫法					省略

(8)、(9)號圖形也可以一筆畫成。

而(5)(6)(7)三個圖形，不管用什麼方法，都無法一筆畫好。

(二)結果：在表二各圖中，有(1)(2)(3)(4)(8)(9)號的圖形能一筆畫好，而

(5)(6)(7)三個圖形却無法一筆畫成。因此我們可以得到一個結論：

「不是任何圖形都能用一筆畫好。」

〔問題二〕可以一筆畫的圖形，有沒有秘訣可以很快的畫好？

(一)研討一：以(1)(2)(3)(4)號圖為例

觀察(表三)(表四)(表五)(表六)所列出的各種畫法，可以發現以下特性：

- 1.假如以奇點為起點，則終點是偶點，若以偶點為起點，則奇點是終點。
- 2.各圖中，只有奇、偶兩點是由一條線(3圖)或三條線(1②圖)或五條線(4圖)所交接而成。(我們稱它為奇頂點)
- 3.其他各點由二條線或四條線交接而成(我們稱它為偶頂點)。
- 4.若是偶頂點為起點，則無法一筆完成。

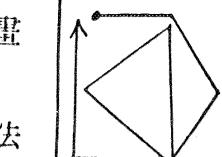
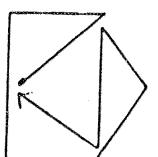
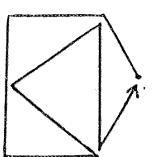
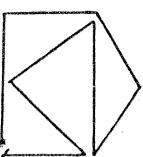
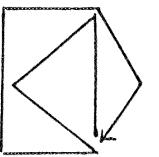
根據①、②、③、④號圖的觀察，我們可以得到一個結果：「一個可以一筆畫好的圖形，若只有二個奇頂點，則一定要以其中一

個奇頂點爲起點，才能一筆畫好，並且以另一個奇頂點爲終點」

(二)研討二：

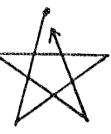
1.看看⑧號圖形的畫法(表七)

表七

類型	①	②	③	④	⑤	其他
畫法						省略

2.⑨號圖形的畫法至少有下列幾種(表八)

表八

類型	①	②	③	④	⑤	其他
畫法						省略

3.觀察⑧⑨兩圖的畫法，我們發現有下列共同特性：

- (1)無論以那個點爲起點，都能一筆畫好，同時回到該點。
- (2)再進一步觀察，發現每一個頂點都是由二條線或四條線交接而成(偶頂點)，沒有奇數條線交接而成的頂點(奇頂點)。
- (3)因此我們可以得到一個結論：「一個圖形，假如頂點都是偶頂點，則能以任一頂點爲起點，很快的一筆畫好，並且回到該點」。
- (4)9月12日國語日報上的圖形，就是這種情形，因此可以從任何一點開始，很快的一筆畫好，並且回到該點。

(三)綜合討論

一個能以一筆畫完成的圖形，必須依下列規則去畫。

- 1.若圖形各頂點都是偶頂點，則以任何一點開始都能很快的一筆畫好，並且以該點爲終點。
- 2.若圖形有兩個奇頂點，而其他都是偶頂點，則必須以其中一個

奇頂點爲起點，而另一個奇頂點爲終點，才能一筆畫好。

[問題三] 那些圖形可以一筆畫好？那些不能？

(一) 把表二中各圖形的頂點數（奇頂點或偶頂點）列入下表

類 別	能 一 筆 劃 好					不 能 一 筆 劃 好			
	(1)	(2)	(3)	(4)	(8)	(9)	(5)	(6)	(7)
奇頂點數	2	2	2	2	0	0	4	4	4
偶頂點數	3	3	6	5	6	10	1	0	0

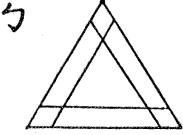
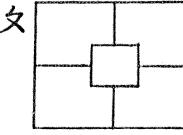
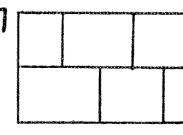
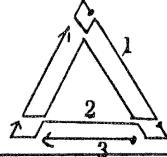
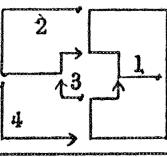
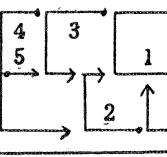
(二) 由上表可以發現奇頂點數都是 0 或偶數。

(三) 奇頂點數若是 0 或 2，則可以一筆畫好。

(四) 奇頂點數若超過 2（如 4、6、8）則不能一筆畫好。

[問題四] 不能一筆畫好的圖形，至少需幾筆才能畫好？

(一) 下面幾個圖形都無法一筆畫好：

圖 形			
畫 法			
最少筆數	3	4	5

(二) 勾圖最少需 3 筆，爻圖至少需 4 筆，口圖至少要 5 筆才能畫好。

(三) 回頭看看圖⑤⑥⑦最少都要 2 筆才能畫好。

(四) 進一步探討筆數和奇頂點數的關係（如下表）。

圖 形	(5)	(6)	(7)	勾	爻	口
奇頂點數	4	4	4	6	8	10
最少筆數	2	2	2	3	4	5

(五) 由上表可以發現，不能一筆畫好的圖形，其需要的最少筆數是它奇頂點數的一半。而且也必須以奇頂點爲起點，才能以最少筆數

畫好。

三、結論

綜合這些問題的研討，我們有下列的結論。

- (一)並不是任何圖形都能一筆畫好，要看它所包含的「奇頂點」數目而定。
- (二)如果奇頂點的數目是 0 或 2，則可以一筆畫好，且一定要以其中一個奇頂點為起點，而結束於另外一個奇頂點。
- (三)若頂點都是偶頂點，則可從任何一點開始而回到該點，很快的一筆畫好。
- (四)不能一筆畫好的圖形，所需要畫好的最少筆數是該圖所含奇頂點數的一半。且必須以其中一個奇頂點為起點，才能以最少筆數畫成。
- (五)「一筆畫原理」可應用在一個新社區的道路設計，各街道的交點是「奇頂點」的情形越少越好。則垃圾車繞行街道收集垃圾時，重覆走的路就越少。

四、參考資料

- (一)光復圖鑑。
- (二)數字遊戲大觀。

評語

雖然這是已知的後果，但小孩子由遊戲中自己摸索，得到了判定的結果，對此結果有深入的瞭解。