數學的哈雷彗星—奇妙的費馬點

國中組數學科第三名

台北市立中正國民中學

作　　者：鄭弘旻・林保艮

指導教師：張吉生・林秀珍

一、研究動機

學過三角形五心後，許多應用的問題很容易就可求出，以下有兩個問題，又應如何求解？

(一)有三戶人家住在山上，喝水都需下山挑水上山，現在想在這三戶人家所形成的三角形中挖一口井，要如何選擇開井的地點，使人們走到井的路程最短？

(二)爲了使農村文化水準提高，平原區的四個農村準備合建一所中學，如果觀察這地區，發現A村有100個小學畢業生，B村有120個畢業生，C村有200個，D村有84個畢業生，要怎樣選擇地點建中學，使學生到學校所花的時間最少？

以上第一個問題，可以視爲一個幾何問題：

在△ABC內求一點P，使$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$之值爲最小，法國數學家費馬（P・Fermat，1601～1665）曾向托里析里（E・Torricelli 1608～1647）提出這一個問題，這△ABC內的P點稱作「費馬點」

二、研究目的

研究費馬點的求法及各種性質、應用。

三、研究器材

尺、圓規、滑輪、鐵絲、棉線。

四、研究過程

求作費馬點：

(一)作法：

以下爲五十年前英國人霍夫曼（J.E.Hofmann）及匈牙利數學

家笛波、伽累依（Tibor Gallai）先後想出同樣一個解法

已知：△ ABC　∠A，∠B，∠C，皆不大於 120°。

求作：△ ABC 內一 P 點使 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ 值最小

作法：1. 以 AB 爲一邊作一正△ ADB(如圖一)

2. 在△ ABC 內任取一 P′，以 $\overline{P'B}$ 爲一邊長作正△ P′EB

3. 連接 $\overline{DE}$，$\overline{AP'}$，$\overline{CP'}$

4. $\overline{BD}=\overline{BA}$，$\overline{BE}=\overline{BP'}$

5. ∠ DBE ＝ 60° －∠ EBA

∠ ABP′＝ 60° －∠ EBA

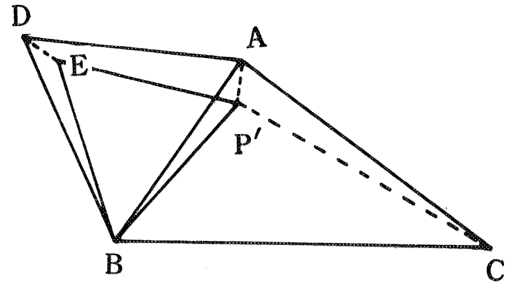
＝∠ DBE

6. △ DBE ≅△ ABP′(SAS)

7. $\overline{AP'}=\overline{DE}$，$\overline{BP'}=\overline{P'E}$

8. $\overline{P'A}+\overline{BP'}+\overline{CP'}=\overline{DE}+\overline{EP'}+\overline{P'C}$

9. 若使 $\overline{P'A}+\overline{BP'}+\overline{CP'}$ 值爲最小卽使 $\overline{DE}$，$\overline{EP'}$，$\overline{P'C}$ 成一直線



圖(一)

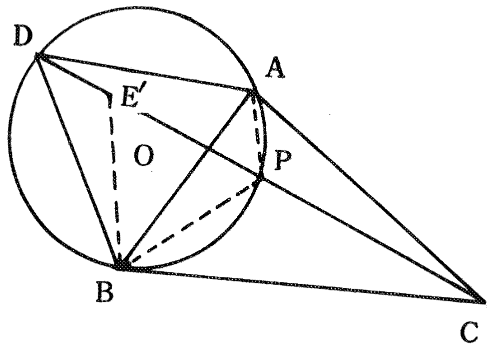
10. 如圖二

作△ABD 的外接圓

圓 O，作 $\overline{DC}$ 與圓 O 交於 P

11. $\angle DPB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$ 的度數＝

∠ DAB ＝ 60°



圖(二)

12. 以 $\overline{BP}$ 爲邊長，以 $\overline{BP}$，$\overrightarrow{PD}$ 爲兩邊可作一正△ BPE′

13. P 卽爲所求。

(二)作法：

以下由托里析里及後來匈牙利數學家李茲（Frederick Riesz）分別用同樣方法解出。

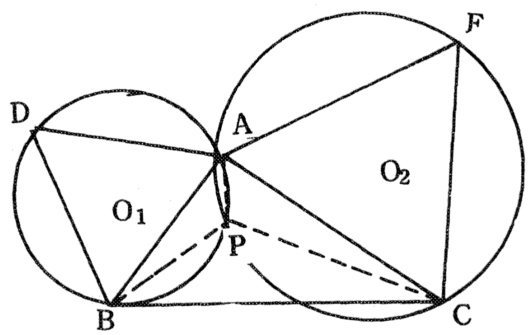
已知：△ ABC

求作：△ ABC 內一點 P，使 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ 之值最小

作法：1. 以 $\overline{AB}$ 爲一邊向外作一正△ ADB，作△ ADB 外接圓 O，

2. 以 $\overline{AC}$ 為一邊向外作一正△AFC，作△AFC外接圓 O_2

3. 兩圓交於P點，P即為所求。



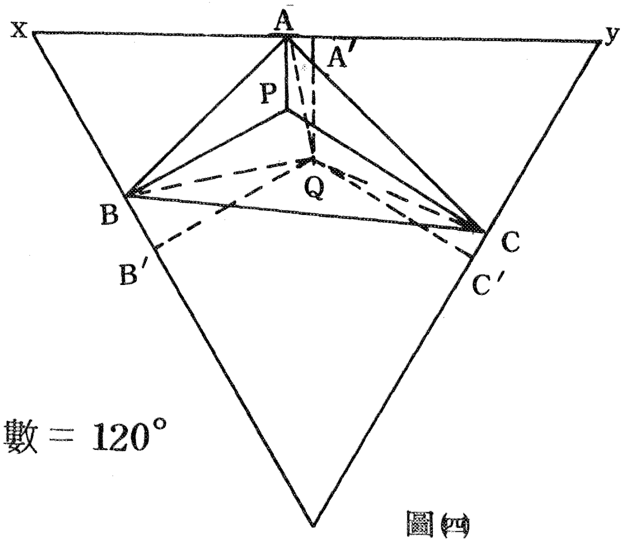
圖(三)

證明：1. 過A，B，C分別作垂直 $\overline{PA}$，$\overline{PB}$，$\overline{PC}$ 的線段 $\overline{xy}$，$\overline{xz}$，$\overline{yz}$

2. $\angle yxz = 360° - \angle APB - \angle PAX - \angle PBX$
$= 360° - 120° - 90° - 90°$
$= 60°$

※$\angle APB = \frac{1}{2}\widehat{ADB}$ 度數 $= 120°$

（如圖三）



圖(四)

3. 同理 $\angle xyz = 60°$，$\angle yzx = 60°$

4. △xyz 為正△

5. 作 $\overline{QA}' \perp \overline{xy}$ 於A′，連接 $\overline{QA}$，$\overline{QB}$，$\overline{QC}$
$\overline{QB}' \perp \overline{xz}$ 於B′
$\overline{QC}' \perp \overline{xz}$ 於C′

6. 根據維維亞尼（Viviani 1622～1703）定理，在正△xyz中 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = \overline{QA}' + \overline{QB}' + \overline{QC}'$

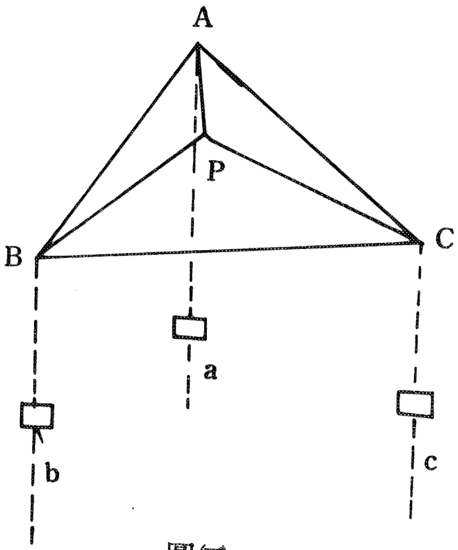
7. △QAA′，△QBB′，△QCC′ 皆為直角△
$\overline{QA} + \overline{QB} + \overline{QC} > \overline{QA}' + \overline{QB}' + \overline{QC}'$
$\therefore \overline{QA} + \overline{QB} + \overline{QC} > \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$

8. 得證P為費馬點

觀察1：由作法一作法二觀察得知 $\angle APB$，$\angle BPC$，$\angle APC$ 皆為120°。

㈢對費馬點的求法，也可以物理方法求得。做一三角形，在每個頂點上放置一個滑輪，每個滑輪穿過一個重量m的重物，吊物體另一端的線都綁在一起，這結點稱爲P（如圖五）

當重物垂掛下來，這P點最初會移動，但過一會就不會再移動。這時正是整個系統處於平衡狀態，這時P點即爲費馬點假設三角形與地面距離是h。滑輪A，B，C掛的重物與地面距離分別爲a，b，c。綁重物的所有繩子長是t。令整個系統的重心是G，並且距地面是r。



圖㈤

則系統的勢能是$m \cdot a + m \cdot b + m \cdot c = 3(m \cdot r)$

$$r = \frac{1}{3}(a+b+c)$$

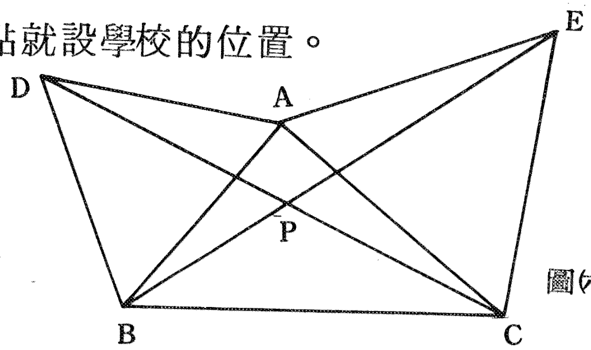
在平衡時，重心最靠近地面，因爲如此它的勢能才是最小，因此$a+b+c$也最小，吊在滑輪下的繩子共長$(h-a)+(h-b)+(h-a)$即$3h-(a+b+c)$。因此在△ABC裏的平面繩子長。

$S = t - [3h-(a+b+c)] = (t-3h)+(a+b+c)$ $(t-3h)$爲一定數因此當系統平衡時，$a+b+c$最小，S也最小，結點位置卽是「費馬點」。

※在動機的第二個問題，也可用物理方法求得，按比例大小做一四邊形，然後懸掛各重物爲100單位，120單位，200單位，84單位最後平衡時的結點就設學校的位置。

㈣作法三：

1. 作正△ADB，正△AEC
2. 連接$\overline{BE}$，$\overline{DC}$交於P
3. P卽爲費馬點

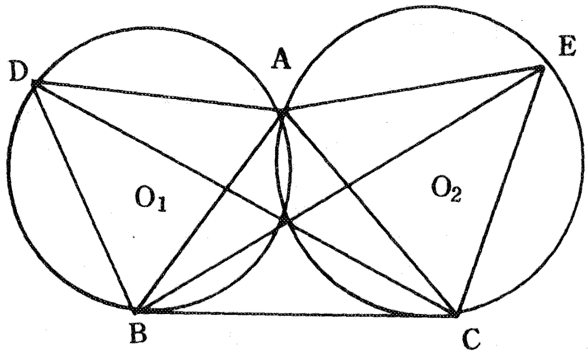


圖㈥

證明：

1. 如圖七作$\triangle ABD$外接圓O_1交$\overline{DC}$於P，由作法一知P爲費馬點

2. 作$\overline{PB}$，$\overline{PE}$，由作法二得知圓O_1，與$\triangle ACE$外接圓O_2交於P爲費馬點。



圖(七)

3. $\angle DPB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$ 度數 $= 60°$

$\angle EPC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{EC}$ 度數 $= \angle EAC = 60°$

$\angle DPE = 180° - \angle EPC = 120°$

$\angle DPB + \angle DPE = 60° + 120° = 180°$

B、P、E在同一直線$\overline{BE}$上。

4. P即爲$\overline{DC}$與$\overline{EB}$交點爲費馬點。

五、討　論

(一)△內是否只有一個費馬點

討論：

1. 設$\triangle ABC$內另有一Q點也爲費馬點，$Q \neq P$

2. 如圖八，$\angle AQB = \angle AQC = \angle BQC = 120°$

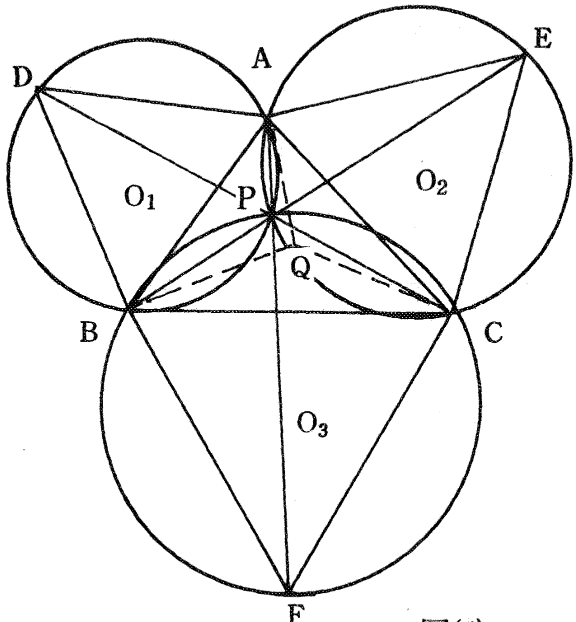
3. ∴Q必在圓O_1上也必在圓O_2上。

4. 兩不同圓相交最多只有兩交點

5. 圓O_1，O_2交於A及P兩點，Q在$\triangle ABC$內

∴$P = Q$與假設不合。

6. $\triangle ABC$內只有一費馬點。



圖(八)

觀察：

1.由以上討論得知

圓O_1，O_2會交於P點，圓O_2，O_3也會交於P點，圓O_1，O_3交於P點，$\overline{DC}$，$\overline{BE}$交於P，$\overline{FA'}$，$\overline{BE}$交於P，$\overline{DC}$，$\overline{FA}$交於P，故圓O_1，O_2，O_3，$\overline{AF}$，$\overline{DC}$，$\overline{BE}$會交於P點。

(二)在作法一、二、三得知，費馬點與各頂點連線的三個夾角都爲120°，若三角形有一角大於或等於120°，則費馬點的位置爲何？

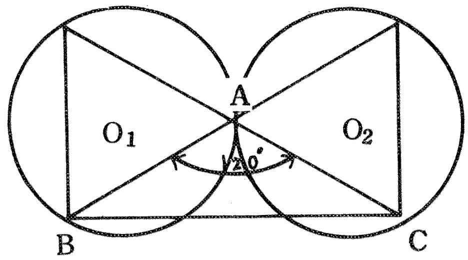
討論：

1.△ABC　∠A = 120°

(1)△ABD爲正△，∠DAB = 60°

∠BAC = 120°，60° + 120° = 180°

∴D，A，C共線



圖(九)

(2)根據作法一得費馬點爲$\overline{DC}$與圓O_1交點即爲A

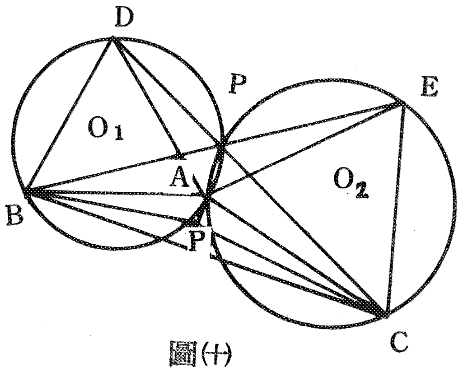
(3)根據作法二、作法三求得皆爲A點。

(4)∴當∠A = 120°　費馬點即爲A。

2.△ABC　∠A > 120°

(1)根據作法一、二、三皆求得「費馬點」在△ABC外一點P

(2)在△ABC內取一P′使$\overline{P'A} < \overline{PA}$



圖(十)

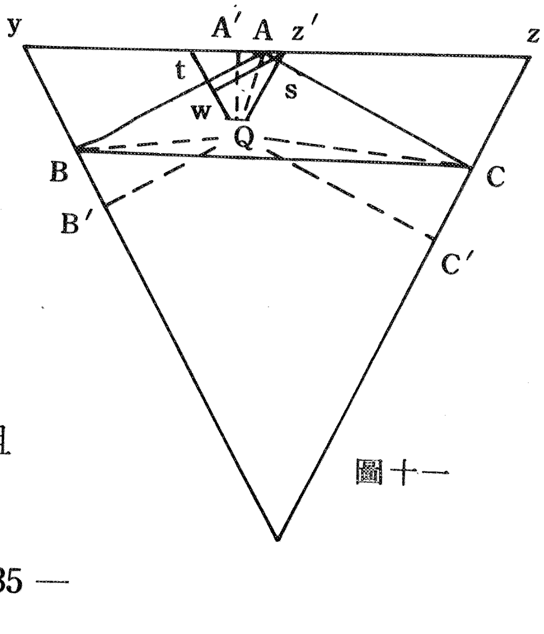
(3)作$\overline{P'B}$，$\overline{P'C}$，$\overline{P'A}$

$\overline{PB} + \overline{PC} > \overline{P'B} + \overline{P'C}$

(4)$\overline{P'A} + \overline{P'B} + \overline{P'C} < \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$

(5)由以上得知P至A，B，C的距離和並非最小。

(6)過B作$\overline{xy} \perp \overline{AB}$，過C作$\overline{xz} \perp \overline{AC}$，使$\overline{xy} = \overline{xz}$且A在$\overline{yz}$上。



圖十一

(7)在△ABC內任取一Q點，作$\overline{QA}$，$\overline{QB}$，$\overline{QC}$

(8)作$\overline{QB'}\perp\overline{xy}$於$B'$，作$\overline{QC'}\perp\overline{xz}$於$C'$，$\overline{QA'}\perp\overline{yz}$於$A'$

(9)作$\overline{QY'}\parallel\overline{yx}$交$\overline{yz}$於$y'$交$\overline{AB}$於t

作$\overline{Qz'}\parallel\overline{zx}$交$\overline{yz}$於$z'$交$\overline{AC}$終s

(10) $\overline{tB}$，$\overline{Xy}$，$\overline{QB}$，$\overline{yx}$，tBBQ爲矩形$\overline{tB}=\overline{QB}$

同理$\overline{SC}=\overline{QC'}$

(11) $\overline{y'Q}\parallel\overline{xy}$，$\overline{z'Q}\parallel\overline{xz}$　$\triangle y'Qz'\backsim\triangle yxz$　$\overline{y'Q}=\overline{z'Q}$

(12) $\angle BAC>120°$　$\angle ABx=\angle ACx=90°$

$\therefore\angle yxz<60°$　$\angle yQz'<60°$　$\angle Qy'z'=\angle Qz'y'>60°$

(13)作$\overline{y'Q}$的高$\overline{z'w}$　$\overline{At}+\overline{As}=\overline{zw}$

$\angle Qz'y'>\angle y'Qz'$　$\therefore\overline{z'w}<\overline{A'Q}$

(14) $\therefore\overline{tB}+\overline{tA}+\overline{As}+\overline{sC}=\overline{AB}+\overline{AC}<\overline{QA'}+\overline{QB'}+\overline{QC'}$

(15) $\overline{QB'}\perp\overline{xy}$　$\triangle QB'B$爲直角△，$\overline{QB}>\overline{QB'}$

同理$\overline{QC}>\overline{QC'}$，$\overline{QA}>\overline{QA'}$

(16) $\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}>\overline{QA'}+\overline{QB'}+\overline{QC'}>\overline{AB}+\overline{AC}$

(17) $\therefore\overline{AB}+\overline{AC}$爲一極小値

(18)當$\angle A>120°$　A卽爲費馬點

發現：△ABC當$\angle A\geqslant 120$　費馬點卽爲A

$\angle A>120°$時費馬點與三個頂點連線的三個夾角皆不等於120°

(三)當△ABC，$\angle A>120°$以作法一、二、三所求得的點並非費馬點，爲什麼？

討論：

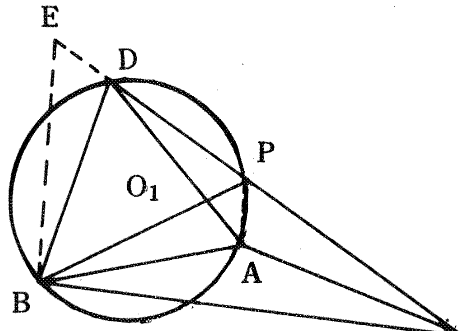
1. 由作法一得知費馬點到A，B，C的距離和等於$\overline{CD}$

2. $\because\angle BAC>120°$

正△BAD中$\angle BAD=60°$

$\therefore\angle DAC=360°-\angle DAB-\angle BAC<180°$

D、C的連線在△ABC外



圖十二

3. 正△PBE中$\overline{PB}=\overline{PE}$

4. △ABP中$\angle BPA=\frac{1}{2}\widehat{BA}$度數$=\angle BDA=60^\circ$

$\angle BAP=\angle BAD+\angle DAP=60^\circ+\angle D>\angle BPA$

$\therefore BP>BA$

5. △APD中$\angle APD=\frac{1}{2}\widehat{ABD}$度數$=120^\circ>\angle PAD$

$\therefore \overline{AD}>\overline{OP}$

6. 由4，5得$\overline{PE}=\overline{PB}>\overline{AB}=\overline{AD}>\overline{PD}$　$\overline{PE}>\overline{PD}$

7. $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}=\overline{PE}+\overline{PA}+\overline{PC}>\overline{DC}$

8. P與作法一不合，故P不是費馬點。

(四) 1. 由作法二得知P在△ABC外

2. 根據作法二的證明

過B作$L_1\perp\overline{PB}$

過C作$L_2\perp\overline{PC}$

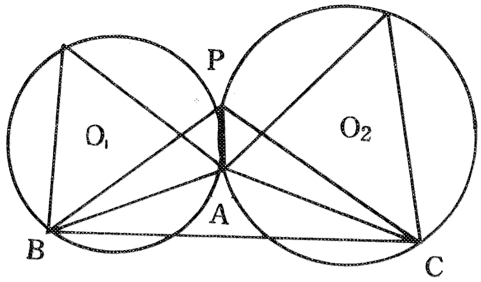
過A作$L_3\perp\overline{PA}$

L_1交L_2於x

L_2交L_3於y

L_1交L_3於z

△xyz爲正△



圖十三

3. 正△xyz內任一點到三邊距離和爲一定數這一定數卽爲費馬點到△ABC三邊點的距離和

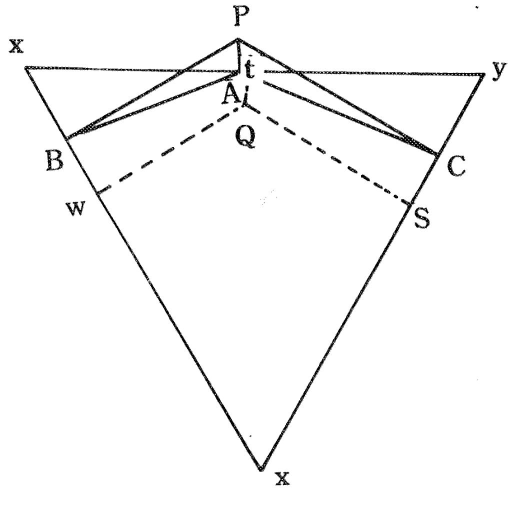
4. 假設此一定數爲k

5. 在△xyz內任取一Q此Q到$\overline{yz}$的距離小於PA且Q在$\overline{Px}$上

作$\overline{Qt}\perp\overline{yz}$於t

作$\overline{Qw}\perp\overline{xz}$於w

作$\overline{Qs}\perp\overline{xy}$於s



圖十四

6. $\because \overline{PB} \perp \overline{xz}$ ，$\overline{Qw} \perp \overline{xz}$

$\therefore$ 在直角△PBx 中　$\overline{PB} \parallel \overline{Qw}$　$\overline{PB} > \overline{Qw}$

7. 同理 $\overline{PC} > \overline{Qs}$

8. $\overline{Qt} + \overline{Qw} + \overline{Qs} = k$

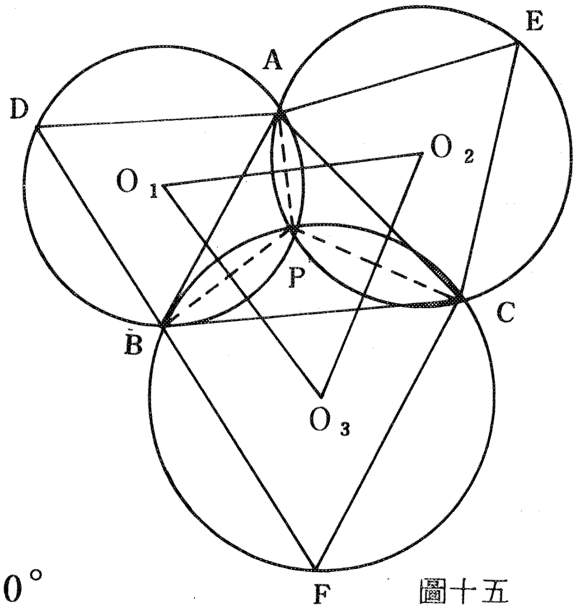
$\overline{PB} + \overline{PA} + \overline{PC} > \overline{Qw} + \overline{Qt} + \overline{Qs} = k$

9. 故 P 點與作法二的證明不合

六、研究發展

(一)拿破崙發現從任意三角形 ABC 的三邊向外作三個正△，它們的中心形成一正△

證明：



圖十五

1. 如右圖 $O_1O_2O_3$ 分別是正△ABD，正△ACE，正△BCF 的中心，也是外接圓圓心

2. 作 $\overline{PB}$　$\overline{PA}$　$\overline{PC}$

3. $\overline{PB}$ 爲圓 O_1，O_2 的公弦

$\therefore \overline{PB} \perp \overline{O_1O_2}$

4. P 爲三圓交點 $\angle BPC = 120^\circ$

5. $\angle O_3O_1O_2 = 360^\circ - 120^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 60^\circ$

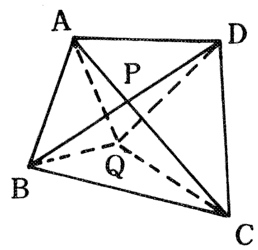
6. 同理 $\angle O_1O_3O_2 = 60^\circ$　$\angle O_1O_2O_3 = 60^\circ$

7. 得證 $\triangle O_1O_2O_3$ 爲正△

(二)在一四邊形中，如何求一點使這點到四個頂點的距離和最小？

已知：四邊形 ABCD

求作：在四邊形 ABCD 內求一點 P 使 $\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} + \overline{DP}$ 之值最小



作法：

1. 作 $\overline{AC}$　$\overline{BD}$ 兩線交於 P

2. P 即爲所求

證明：

1. 在 ABC 內任取一點 Q，$Q \neq P$

2. 作 $\overline{QA}$，$\overline{QB}$，$\overline{QC}$，$\overline{QD}$

3. $\overline{QA}+\overline{QC}>\overline{AP}+\overline{PC}$ $\quad \overline{QB}+\overline{QD}>\overline{BP}+\overline{PD}$

4. $\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}+\overline{QD}>\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$

5. $\therefore \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$ 爲一極小值

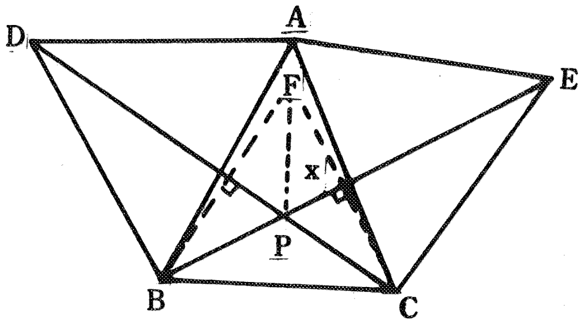
(三) $\triangle ABC$ 爲一等腰△，$\overline{AB}=\overline{AC}$ $\quad A<120°$

$\triangle ABD$，$\triangle ACE$ 爲正△ $\quad \overline{EB}$ $\overline{DC}$ 交於 P

$\overline{BF}\perp\overline{DC}$ $\quad \overline{CF}\perp\overline{BE}$

發現：$\triangle BCF$ 爲正△

P 也爲 $\triangle BCF$ 的費馬點



證明：

1. 設 $\angle ABC=\angle ACB=x>30°$

$\angle BAC=180°-2x°$

（因 $\angle A<120$ ）

2. 正 $\triangle ACE$ 中 $\quad \overline{AE}=\overline{AC}=\overline{AB}$

$\angle AEB=\angle ABE$

3. $\angle BAE=60°+180°-2x°=240°-2x°$

$\angle AEB=\frac{1}{2}(180°-240°+2x°)=x°-30°$

4. $\angle CEP=60°-(x°-30°)=90°-x°$

$\angle CxE=90°$ $\quad \angle xCE=90°-(90°-x°)=x°$

$\angle BCE=x°+60°$ $\quad \angle BCF=60°$

5. 同理 $\angle FBC=60°$ $\quad \angle BFC=60°$ $\quad \triangle BFC$ 爲正△

6. $\triangle ABC$ 爲等腰△，P 爲 $\triangle ABC$ 的費馬點

$\overline{PB}=\overline{PC}$ $\quad \angle BPC=120°$

$\angle PBC=\angle PCB=30°=\angle FBP=\angle FCP$

7. P、F 皆在 BC 的中垂線上 $\quad \overline{FP}$ 平分 $\angle BFC$

$\angle BFP=\angle PFC=30°$

8. $\angle BPF=180°-30°-30°=120°=\angle BPC=\angle CPF$

9. P 爲 $\triangle FBC$ 的費馬點

(四)設P為任一多邊形的費馬點

討論：

1.正△ABC　$\angle APB = \angle APC = \angle BPC = 120°$

P為正△ABC的中心點（即內切圓，外接圓圓心）

2.正方形ABCD，P為$\overline{AC}$、$\overline{BD}$的交點

P為正方形的中心點

3.正五邊形ABCDE，P，Q，R，S，T分別為$\overline{AB}$ $\overline{BC}$ $\overline{CD}$ $\overline{DE}$ $\overline{EA}$的中點取正五邊形ABCDE的中心點O

則$\overline{OP} \perp \overline{AB}$ $\overline{OQ} \perp \overline{BC}$ $\overline{OR} \perp \overline{CD}$ $\overline{OS} \perp \overline{DE}$ $\overline{OT} \perp \overline{AE}$，

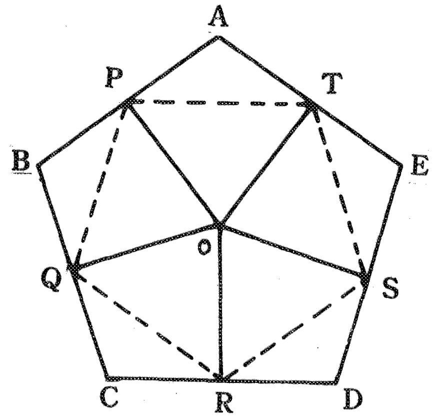
O到P，Q，R，S，T的距離和最小

連接$\overline{PQ}$ $\overline{QR}$ $\overline{RS}$ $\overline{ST}$ $\overline{TP}$

則PQRST也為正五邊形，

O也為正五邊形PQRST的中心點

一正五邊形的中心點到各頂點距離和最小



※同理可證正六邊形，正七邊形……等的中心點到各頂點的距離和最小。

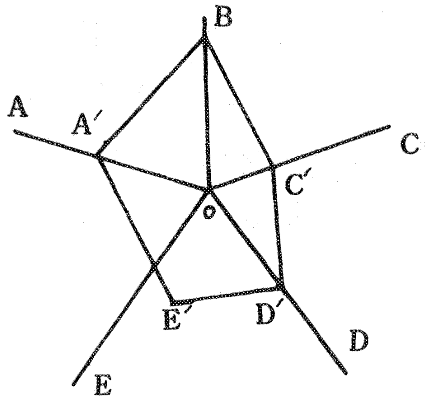
(五)五邊形、四邊形的費馬點到各頂點的連線所形成的夾角，是否和三角形一樣有一定的角度。

討論：

1.作$\overline{OA}$ $\overline{OB}$ $\overline{OC}$ $\overline{OD}$ $\overline{OE}$使

$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOA = 72°$

2.分別在$\overline{OA}$ $\overline{OB}$ $\overline{OC}$ $\overline{OD}$上取A，B，C，D 4點，而點E不在$\overline{OE}$上

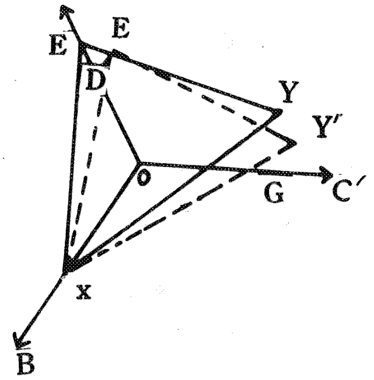


3.連$\overline{AB}$ $\overline{BC}$ $\overline{CD}$ $\overline{DE}$ $\overline{EA}$

4.則無論如何調整，A B C D E必不全在$\overline{OA}$ $\overline{OB}$ $\overline{OC}$ $\overline{OD}$ $\overline{OE}$上

5. 故五邊形的費馬點到各頂點的連線所形成的交角沒有一定的角度。

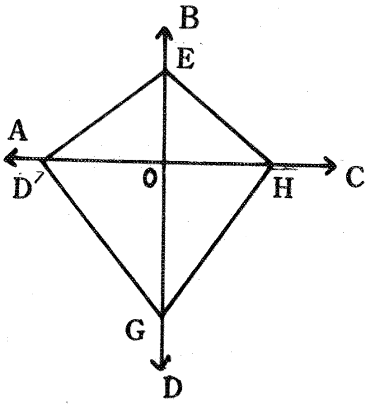
再看三角形：



1. 作$\overline{OA}$ $\overline{OB}$ $\overline{OC}$ ，使 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120°$
2. 分別在$\overline{OA}$ $\overline{OB}$上取X、E兩點，而Y不在$\overline{OC}$上。
3. 連$\overline{XE}$ $\overline{EY}$ $\overline{YX}$
4. 將△XEY轉動形成△XE′Y′使X仍在$\overline{OB}$上，E′Y′在同一區。
5. 作DE∥GY∥OB ，調整到$\overline{YG}$ = DE
6. 把△XEY順者$\overline{OB}$調整，則X，E，Y將分別在$\overline{OB}$ $\overline{OA}$ $\overline{OC}$上

四邊形：

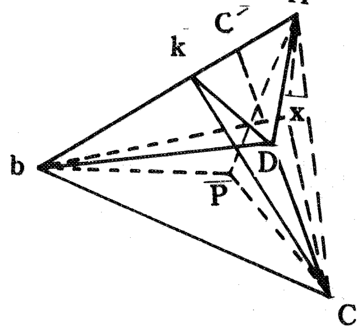
1. 若四邊形DEHG內有一點O，使$\angle DOG = \angle GOH = \angle HOE = \angle EOD = 90$ ，則$\angle EOD + \angle EOH = 180°$
   則$\angle EOD + \angle EOH = 180°$
   O在$\overline{DH}$上，同理O在$\overline{EG}$上，O爲$\overline{GE}$ $\overline{HD}$的交點



2. 若四邊形的對角線不相互垂直，則不能在此四邊形內取一點，使它到各頂點所成的夾角皆爲90°

(六)四邊形ABCD，內角$\angle ADC > 180°$ 其費馬點在那？

討論：



1. (1)設P爲四邊形ABCD內任一點
   (2)作$\overline{PA}$ $\overline{PB}$ $\overline{PC}$ $\overline{PD}$
   (3)$\overline{PA} + \overline{PC} > \overline{AD} + \overline{DC}$（D爲△PAC內部一點）
   (4)$\overline{PB} + \overline{PD} > \overline{BD}$

(5) $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}>\overline{AD}+\overline{BD}+\overline{CD}$

2.(1)設X爲ABCD外一點（X，A在$\overline{BD}$同側）

(2)作$\overline{XA}$ $\overline{XB}$ $\overline{XC}$ $\overline{XD}$

(3) $\overline{XA}+\overline{XD}>\overline{AD}$

(4) $\overline{XB}+\overline{XC}>\overline{BD}+\overline{CD}$（D爲△BXC內部一點）

(5) $\overline{XA}+\overline{XB}+\overline{XC}+\overline{XD}>\overline{AD}+\overline{BD}+\overline{CD}$

(6) X，A在$\overline{BD}$異側時也可用同樣的方法證明：

$\overline{XA}+\overline{XB}+\overline{XC}+\overline{XD}>\overline{AD}+\overline{BD}+\overline{CD}$

3.(1)作$\overline{AC}$

(2) $\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{BD}+\overline{DC}$（D爲△ABC內部一點）

(3) $\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}>\overline{BD}+\overline{CD}+\overline{AD}$

(4) B，C亦可用同理證明到另三頂點的距離和大於D到A，B，C的距離和。

4.(1)設$\overrightarrow{CD}$交$\overline{AB}$於C′，在$\overline{BC'}$上任取一點K，作$\overline{KD}$ $\overline{KC}$

(2) $\overline{KA}+\overline{KC}>\overline{DA}+\overline{DC}$（D爲△AKC內部一點）

(3) $\overline{KB}+\overline{KD}>\overline{BD}$ $\overline{KA}+\overline{KB}+\overline{KC}+\overline{KD}>\overline{DA}+\overline{DB}+\overline{DC}$

(4)四邊形上任何一點K′也可用同樣方法證明：

$\overline{K'A}+\overline{K'B}+\overline{K'C}+\overline{K'D}>\overline{AD}+\overline{BD}+\overline{CD}$

由 1. 2. 3. 4. 可得知：D爲四邊形ABCD的費馬點

註：（此爲問題 2.物理解法的說明）

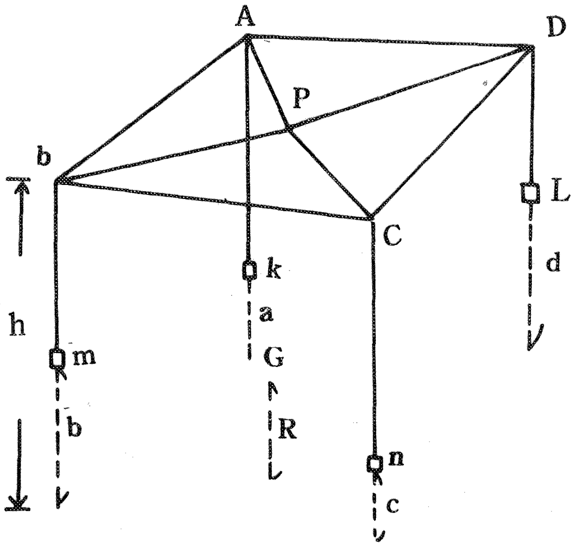
設掛重物的四段線長皆爲 t

A下掛 k 單位的重物，k 距地面的高度爲 a 。

B 下掛 m 單位的重物，m 距地面的高度爲 b

C 下掛 n 單位的重物，n 距地面的高度爲 c

D 下掛 L 單位的重物，L 距地面的高度爲 d



四邊形 ABCD 距地面的高度

爲h 。

系統的重心爲G，G距地面高度爲r 。

$k \cdot \overline{AP} + m \cdot \overline{BP} + n \cdot \overline{CP} + L \cdot \overline{DP} = S$

則系統的勢能爲 $r(k+m+n+L) = ka+mb+nc+Lc$

$$r = \frac{ka+mb+nc+Ld}{k+m+n+L}$$

$(k+m+n+L)$爲一定數。

當系統平衡時G的位置最低，r 最小

$\therefore ka+mb+nc+Ld$ 也最小

$\overline{Ak} = h-a \quad \overline{Bm} = h-b \quad \overline{Cn} = h-c \quad \overline{DL} = h-d$

$S = k[t-(h-a)]+m[t-(h-b)]+n[t-(h-c)]+L[t-(h-d)]$

$= kt-kh+ka+mt-mh+mb+nt-nh+nc+Lt-Lh+Ld$

$= t(k+m+n+L)-h(k+m+n+L)+(ka+mb+nc+Ld)$

$= (t-h)(k+m+n+L)+(ka+mb+nc+Ld)$

$(t-h)(k+m+n+L)$爲定數

當r 最小，$(ka+mb+nc+Ld)$最小，S也最小

$\therefore$當系統平衡時 $k \cdot \overline{AP} + m \cdot \overline{BP} + n \cdot \overline{CP} + L \cdot \overline{DP}$最小

七、結　論

㈠費馬點：

定義	三角形中一點到各頂點距離和最小	
位置	三內角皆小於 120°	△內
	一角等於 120°	鈍角頂點上
	一角大於 120°	鈍角頂點上
性質	三角形三內角皆小於 120° 則費馬點到三頂點連線所形成的張角皆爲 120°	

㈡任意多邊形皆可用物理方法求得一點到各頂點的距離和最小

㈢正多邊形內切圓外接圓的圓心即爲到各頂點距離和最小的一點

八、參考書籍

數學和數學家的故事　（六藝出版社）
P 1.～P 12.　古爲今用的幾個幾何問題

評　語

有關在平面上一點到三角形三頂點距離和爲最小值的問題，已有許多不同之解法，唯作者所提之法，從前尚無發現，不過作者强調他的方法不必用圓規，其實是不正確的，希望他的解釋應于注意。