神奇的鏡反數

國中組數學科第二名

台北市立華江國民中學

作　　者：黃帝綸・白淑華

黃玫瑄・江瑩華

指導教師：蔡秋穎・李玉珠

一、研究動機

我們每天都會照鏡子，鏡子之影像與自己是左右相反，那天突然把幾個特殊的數在鏡中反映，結果發現有趣的現象，例如：

$$12 \quad 21 \qquad\qquad 112 \quad 211$$

$$(12)^2=144 \quad 441=(21)^2\text{，}(112)^2=12544 \quad 44521=(211)^2$$

這些數的平方與它的鏡子反映的數平方在鏡子中的反映恰巧相等。我們給這樣的數一個名稱“平方鏡反數”。

我們起了些疑問：

㈠怎樣的數才是平方鏡反數？

㈡在自然數系中有幾個平方鏡反數？

二、研究內容

㈠我們先找小於 100 的平方鏡反數：

小於 100 的二位數可表成 $(xy)_{10}$，x，y 皆是整數，$1 \leq x \leq 9$，$0 \leq y \leq 9$

則　$(xy)_{10}^2=(10x+y)^2=100x^2+20xy+y^2$

$(yx)_{10}^2=(10y+x)^2=100y^2+20xy+x^2$

如果 $(xy)_{10}$ 是平方鏡反數，則 y 必須大於 0

1. $x=1$

$(1y)_{10}^2=100+20y+y^2$ ……………………①

$(y1)_{10}^2=100y^2+20y+1$ ……………………②

由②知 $(y1)_{10}^2$ 之個位數字是 1，因此在①中，$20y<100$，

否則加上 100，$(1y)^2_{10}$ 的百位數將 ≥ 2，那麼 $(1y)^2_{10}$ 的鏡子數的個位數字不會是 " 1 " 了。再看②中 $100y^2$，如果 $y=4$，則 $1600 = 100 \times 4^2$，$(y1)^2_{10}$ 是個 4 位數，而 $(1y)^2_{10}$ 卻是百位數，如此 $(1y)^2_{10}$ 不是平方鏡反數了。

因此 y 只能從 { 1，2，3 } 三個數中選擇，$11^2 = 121$，$12^2 = 144$，和 $21^2 = 441$，$13^2 = 169$ 和 $31^2 = 961$，∴ 11，12，13 是平方鏡反數。

2. $x = 2$

$(2y)^2_{10} = 400 + 40y + y^2$ ……………………③

$(y2)^2_{10} = 100y^2 + 40y + 4$ ……………………④

由④中，$(y2)^2_{10}$ 之個位數字是 4，則③中 $y < 3$，否則 $400 + 40 \times 3 > 500$，那麼 $(2y)^2_{10}$ 之鏡子數的個位數字不會是 4。所以 y = 1 or 2。

$21^2 = 441$ 和 $12^2 = 144$，$22^2 = 484$，21，22 是平方鏡反數。

3. $x = 3$

$(3y)^2_{10} = 900 + 60y + y^2$ ……………………⑤

$(y3)^2_{10} = 100y^2 + 60y + 9$ ……………………⑥

由⑥知，$(y3)^2_{10}$ 之個位數字是 9，所以⑤中 $y < 2$，否則 $900 + 60 \times 2 > 1000$，$(3y)^2_{10}$ 之鏡子數的個位數字不會是 9，所以 $y = 1$，$31^2 = 961$ 和 $13^2 = 169$，31 是平方鏡反數。

4. $x = 4$

$(4y)^2_{10} = 1600 + 80y + y^2$ ……………………⑦

$(y4)^2_{10} = 100y^2 + 80y + 16$ ……………………⑧

由⑧中 $(y4)^2_{10}$ 之個位數字是 6，而⑦中即使 $y = 9$，$1600 + 80 \times 9$ 不可能大於 6000，所以 $x = 4$ 沒有平方鏡反數。

5. $x = 5$

$(5y)^2_{10} = 2500 + 10y + y^2$ ……………………⑨

$(y5)^2_{10} = 100y^2 + 10y + 25$ ……………………⑩

與 $x=4$ 之情況相同，y 即使等於 9 ，$2500+10\times 9$ 不可能大於 5000 ，所以 $x=5$ 也沒有平方鏡反數。$x=6$ ，7 ，8 ，9 亦是如此，所以超過 40 以上的二位數沒有平方鏡反數。

(二)三位數

$(xyz)_{10}$ 表示成 $100x+10y+z$ ，$1\le x\le 9$ ，$0\le y$ ，$z\le 9$ ，x ，y ，z 皆是整數。

$$(xyz)_{10}^2=(100x+10y+z)^2=10^4x^2+10^3(xy+yx)+10^2(xz+y^2+zx)+(yz+zy)+z^2$$

$$(zyx)_{10}^2=10^4z^2+10^3(yz+zy)+10^2(xz+y^2+zx)+10(xy+yx)+x^2$$

1. $x=1$

$$(1yz)_{10}^2=10^4+2000y+(100y^2+200z)+20yz+z^2 \cdots\cdots ①$$

$$(zy1)_{10}^2=10^4z^2+2000yz+(100y^2+200z)+20yz+1 \cdots\cdots ②$$

由②知 $(zy1)_{10}^2$ 之個位數字是 1 ，∴①中，$2000y<10000 \Rightarrow y<5$ ，②中 $0<z^2<10\Rightarrow z<4$ ，否則 $(zy1)_{10}^2$ 爲六位數，而 $(1yz)_{10}^2$ 爲五位數。

①中 $100y^2+200z<1000\Rightarrow y^2+2y<10$ ，且 $yz<5$

因此有可能的情形如下：(1) $y=0$ ，$z=1$ (2) $y=0$ ，$z=2$ (3) $y=0$ ，$z=3$ (4) $y=1$ ，$z=1$ (5) $y=1$ ，$z=2$ (6) $y=1$ ，$z=3$ (7) $y=2$ ，$z=1$ (8) $y=2$ ，$z=2$

所以平方鏡反數有 101 ，102 ，103 ，111 ，112 ，113 ，121 ，122 等。

2. $x=2$

$$(2yz)_{10}^2=4\times 10^4+4000y+(400z+100y^2)+20yz+z^2 \cdots\cdots ③$$

$$(yz2)_{10}^2=z^2\times 10^4+2000yz+(400z+100y^2)+40y+4 \cdots\cdots ④$$

由④知，$(zy2)_{10}^2$ 之個位數字是 4 ，所以③中 $4000y<10000$

$\Rightarrow y < 3$，④中 $0 < z^2 < 10 \Rightarrow z < 4$，否則 $(zy2)_{10}^{2}$ 爲六位數，而 $(2yz)_{10}^{2}$ 爲五位數。

④知 $2000\ yz < 10000 \Rightarrow yz < 5$，且 $y^2 + 4z < 10$。

所以有可能之情形如下：(1) $y = 0$，$z = 1$ (2) $y = 0$，$z = 2$ (3) $y = 1$，$z = 1$ (4) $y = 1$，$z = 2$ (5) $y = 2$，$z = 1$ 所以平方鏡反數有 201，202，211，212，221。

3. $x = 3$

$$(3yz)_{10}^{2} = 9 \times 10^4 + 6000\ y + (600\ z + 100\ y^2) + 20\ yz + z^2 \cdots\cdots ⑤$$

$$(zy3)_{10}^{2} = z^2 \times 10^4 + 2000\ yz + (600\ z + 100\ y^2) + 60\ y + 9 \cdots\cdots ⑥$$

由⑤知，$6000\ y < 1000 \Rightarrow y < 2$ 且 $y^2 + 6z < 10$，$yz < 5$，$z < 4$。

可能的情形有：(1) $y = 0$，$z = 1$ (2) $y = 1$，$z = 1$，∴平方鏡反數有 301，311。

4. $x = 4$

$$(4yz)_{10}^{2} = 16 \times 10^4 + 8000\ y + (100\ y^2 + 800\ z) + 20\ yz + z^2 \cdots\cdots ⑦$$

$$(zy4)_{10}^{2} = z^2 + 10^4 + 2000\ yz + (100\ y^2 + 800\ z) + 80\ y + 16 \cdots\cdots ⑧$$

由⑧知 $(zy4)_{10}^{2}$ 之個位數字是 6，而 $(4yz)_{10}^{2}$ 之鏡子數之個位數字不可能出現 6，所以沒有平方鏡反數。

5. $x = 5$

$$(5yz)_{10}^{2} = 25 \times 10^4 + 10000\ y + (100\ y^2 + 1000\ z) + 20\ yz + z^2$$

$$(zy5)_{10}^{2} = z^2 \times 10^4 + 2000\ yz + (100\ y^2 + 1000\ z) + 100\ y + 25$$

與 $x = 4$ 的情形相同，沒有平方鏡反數，所以大於 400 的三位數沒有平方鏡反數。

㈢四位數

$(x_1x_2x_3x_4)^2_{10} = 10x^6x_1^2 + 10^5(x_1x_2 + x_2x_1) + 10^4(x_1x_3 + x_2^2 + x_3x_1) + 10^3(x_1x_4 + x_2x_3 + x_3x_2 + x_4x_1) + 10^2(x_2x_4 + x_3^2 + x_4x_2) + 10(x_3x_4 + x_4x_3) + x_4^2$

$(x_4x_3x_2x_1)^2_{10} = 10\ x_4^2 + 10^5(x_3x_4 + x_4x_3) + 10^4(x_2x_4 + x_3^2 + x_4x_2) + 10^3(x_1x_4 + x_2x_3 + x_3x_2 + x_4x_1) + 10^2(x_1x_3 + x_2^2 + x_3x_1) + 10(x_1x_2 + x_2x_1) + x_1^2$

1. $x_1 = 1$

$(1x_2x_3x_4)^2_{10} = 10^6 + 10^5(x_2 + x_2) + 10^4(x_3 + x_2^2 + x_3) + 10^3(x_4 + x_2x_3 + x_3x_2 + x_4) + 10^2(x_2x_4 + x_3^2 + x_4x_2) + 10(x_3x_4 + x_4x_3) + x_4^2$ ……………… ①

$(x_4x_3x_21)^2_{10} = 10^6x_4^2 + 10^5(x_3x_4 + x_4x_3) + 10^4(x_2x_4 + x_3^2 + x_4x_2) + 10^3(x_4 + x_2x_3 + x_3x_2 + x_4) + 10^2(x_3 + x_2^2 + x_3) + 10(x_2 + x_2) + 1$ ……………… ②

由②知$(x_4x_3x_2x_1)^2_{10}$的個位數字是1，∴$(1x_2x_3x_4)^2_{10}$中，$10^5(x_2 + x_2) < 10^6 \Rightarrow 2x_2 < 10$，$x_2 < 5$。

由①②知　$x_2^2 + 2x_3 < 10$

$2x_2x_3 + 2x_4 < 10 \Rightarrow x_2x_3 + x_4 < 5$

$2x_2x_4 + x_3^2 < 10$　　$2x_3x_4 < 10 \Rightarrow x_3x_4 < 5$

$0 < x_4^2 < 10 \Rightarrow x_4 < 4$

則有可能的情形如下：

x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	0	1
1	0	0	2
1	0	0	3
1	0	1	1
1	0	1	2
1	0	1	3
1	0	2	1
1	0	2	2
1	0	3	1

1	1	0	1
1	1	0	2
1	1	0	3
1	1	1	1
1	1	1	2
1	1	1	3
1	1	2	1
1	1	2	2
1	2	0	1
1	2	0	2
1	2	1	1 皆是平方鏡反數
1	2	1	2
1	3	0	1

2. $x_1 = 2$

$(2x_2x_3x_4)^2_{10} = 10^6 \times 4 + 10^5(2x_2 + 2x_2) + 10^4(2x_3 + x_2^2 + 2x_3) + 10^3(2x_4 + x_2x_3 + x_3x_2 + 2x_4) + 10^2(x_2x_4 + x_3^2 + x_4x_2) + 10(x_3x_4 + x_4x_3) + x_4^2 \cdots ③$

$(x_4x_3x_2 2)^2_{10} = 10^6x_4^2 + 10^5(x_3x_4 + x_4x_3) + 10^4(x_2x_4 + x_3^2 + x_4x_2) + 10^3(2x_4 + x_2x_3 + x_3x_2 + 2x_4) + 10^2(2x_3 + x_2^2 + 2x_3) + 10(2x_2 + 2x_2) + 4 \cdots\cdots ④$

由③④知 $4x_2 < 10 \Rightarrow x_2 < 3$

$x_2^2 + 4x_3 < 10$ $\quad$ $2x_2x_3 + 4x_4 < 10 \Rightarrow x_2x_3 + 2x_4 < 5$

$2x_2x_4 + x_3^2 < 10$ $\quad$ $2x_3x_4 < 10 \Rightarrow x_3x_4 < 5$

$0 < x_4^2 < 10 \Rightarrow x_4 < 4$

3. $x_1 = 3$

$(3x_2x_3x_4)^2_{10} = 10^6 \times 9 + 10^5(3x_2 + 3x_2) + 10^4(3x_3 + x_2^2 + 3x_3) + 10^3(3x_4 + x_2x_3 + x_3x_2 + 3x_4) + 10^2(x_2x_4 + x_3^2 + x_4x_2) + 10(x_3x_4 + x_4x_3) + x_4^2 \cdots\cdots ⑤$

$(x_4x_3x_2 3)_{10}^2 = 10^6x_4^2 + 10^5(x_3x_4 + x_4x_3) + 10^4(x_2x_4 + x_3^2 + x_4x_2) + 10^3(3x_4 + x_2x_3 + x_3x_2 + 3x_4) + 10^2(3x_3 + x_2^2 + 3x_3) + 10(3x_2 + 3x_2) + 9$ ⋯⋯⋯⋯⑥

由⑤⑥知　$6x_2 < 10 \Rightarrow x_2 < 2$　$x_2^2 + 6x_3 < 10$

$2x_2x_3 + 6x_4 < 10 \Rightarrow x_2x_3 + 3x_4 < 5$

$2x_2x_4 + x_3^2 < 10$

$2x_3x_4 < 10 \Rightarrow x_3x_4 < 5$　$0 < x_4^2 < 10 \Rightarrow x_4 < 4$

4. $x_1 = 4$

$(4x_2x_3x_4)_{10}^2 = 10^6 \times 16 + 10^5(4x_2 + 4x_2) + 10^4(4x_3 + x_2^2 + 4x_3) + 10^3(4x_4 + x_2x_3 + x_3x_2 + 4x_4) + 10^2(x_2x_4 + x_3^2 + x_4x_2) + 10(x_3x_4 + x_4x_3) + x_4^2$ ⋯⋯⑦

$(x_4x_3x_2 4)_{10}^2 = 10^6x_4^2 + 10^5(x_3x_4 + x_4x_3) + 10^4(x_2x_4 + x_3^2 + x_4x_2) + 10^3(4x_4 + x_2x_3 + x_3x_2 + 4x_4) + 10^2(4x_3 + x_2^2 + 4x_3) + 10(4x_2 + 4x_2) + 16$ ⋯⋯⋯⑧

由⑧知 $(x_4x_3x_2 4)_{10}^2$ 的個位數字是 6，而 $(4x_2x_3x_4)_{10}^2$ 的鏡子數的個位數字不可能出現 6，所以沒有平方鏡反數，$x_1 = 5$，6，7，8，9 亦沒有平方鏡反數，∴大於 4000 的四位數沒有平方鏡反數。

㈣當我們把它推到 n 位數的情形又如何呢？

$(x_1x_2\cdots\cdots x_{n-1}x_n)_{10}^2 = (10^{n-1}x_1 + 10^{n-2}x_2 \cdots\cdots + 10x_{n-1} + x_n)^2 = 10^{2n-2}x_1^2 + 10^{2n-3}(x_1x_2 + x_2x_1) + 10^{2n-4}(x_1x_3 + x_2^2 + x_3x_1) + 10^{2n-5}(x_1x_4 + x_2x_3 + x_3x_2 + x_4x_1) + \cdots\cdots + 10^3(x_{n-3}x_n + x_{n-2}x_{n-1} + x_{n-1}x_{n-2} + x_nx_{n-3}) + 10^2(x_{n-2}x_n + x_{n-1}{}^2 + x_nx_{n-2}) + 10(x_{n-1}x_n + x_nx_{n-1}) + x_n^2$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯①

$(x_nx_{n-1}\cdots\cdots x_2x_1)_{10}^2 = 10^{2n-2}x_n{}^2 + 10^{2n-3}(x_{n-1}x_n + x_nx_{n-1}) + 10^{2n-4}(x_{n-2}x_n + x_{n-1}{}^2 + x_nx_{n-2}) + 10^{2n-5}(x_{n-3}x_n + x_{n-2}x_{n-1} + x_{n-1}x_{n-2} + x_nx_{n-3}) + \cdots\cdots + 10^2(x_1x_3 + x_2^2 + x_3x_1) + 10(x_1x_2 + x_2x_1) + x_1^2$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯②

討論：

1.如果$(x_1x_2\cdots\cdots x_n)_{10}$是平方鏡反數，則每一$x_1$，$x_2$，$x_3\cdots\cdots\cdots$，$x_{n-1}$，$x_n$必是$\leq 3$，不然的話，$\exists x_i>3$則$x_i\geqslant 4$ $i=1$，2，……n則$(x_1x_2\cdots\cdots,x_n)_{10}^2$展開中必有一項爲$10^{2n-2i}(x_1x_{2i-1}+x_2x_{2i-2}+\cdots\cdots+x_{i+1}x_{i-1}+x_i{}^2+x_{i-1}x_{i+1}\cdots\cdots+x_{2i-1}x_1)$

$\because x_i>3\quad\therefore x_1x_{2i-1}+\cdots\cdots+x_i{}^2+\cdots\cdots+x_{2i-1}x_1>10$

則必進位到前一項$10^{2n-(2i-1)}(x_1x_{2i-2}+\cdots+x_{i-1}x_i+x_ix_{i-1}+\cdots\cdots+x_{2i-2}x_1)$，如此與$(x_nx_{n-1}\cdots\cdots x_1)_{10}^2$的鏡子數中$10^{2n-(2i-1)}$項的係數並不相等，則$(x_1x_2\cdots\cdots x_n)_{10}$不是平方鏡反數，與已知矛盾，所以$(x_1\cdots\cdots x_n)_{10}$是鏡反數的話，則$x_1$，$x_2\cdots\cdots x_n\in\{0,1,2,3\}$

2.由討論1.知平方鏡反數的組成皆由0，1，2，3構成，但由這些數字構成的數不一定是平方鏡反數，例如1032，3201皆不是平方鏡反數。位數少的數或許可以用計算器算出平方，如果是位數很大，無法用計算器算出，又該如何判斷是否爲平方鏡反數？

方法：由$(x_1x_2\cdots\cdots x_n)_{10}^2=10^{2n-2}+10^{2n-3}(x_1x_2+x_2x_1)+10^{2n-4}(x_1x_3+x_2^2+x_3x_1)+10^{2n-5}(x_1x_4+x_2x_3+x_3x_2+x_4x_1)+\cdots\cdots+10^3(x_{n-3}x_n+x_{n-2}x_{n-1}+x_{n-1}x_{n-2}+x_nx_{n-3})+10^2(x_{n-2}x_n+x_{n-1}^2+x_nx_{n-2})+10(x_{n-1}x_n+x_nx_{n-1})+x_n^2$

知：$x_1^2<10$，$x_1x_2+x_2x_1<10$，$x_1x_3+x_2^2+x_3x_1<10$，$x_1x_4+x_2x_3+x_3x_2+x_4x_1<10$，……，$x_1x_n+x_2x_{n-1}+\cdots\cdots+x_{n-1}x_2+x_nx_1<10$，……，$x_{n-2}x_n+x_{n-1}{}^2+x_nx_{n-2}<10$，$x_{n-1}x_n+x_nx_{n-1}<10$及$x_n^2<10$。如果一個n位數完全符合上述條件，就是一個平方鏡反數。

3.《推廣》：立方鏡反數　我們給定一個數$(a_1a_2\cdots\cdots a_k)_{10}$用$m[(a_1a_2\cdots\cdots a_k)_{10}]$表示其鏡反數，即$m[(a_1a_2\cdots$

$a_k)_{10}] = (a_k \cdots\cdots a_2a_1)_{10}$ 。

《定義》：一個自然數$(a_1a_2 \cdots\cdots a_k)_{10}$稱爲立方鏡反數，則$\{m[(a_1 \cdots a_k)_{10}]\}^3 = m[(a_1 \cdots a_k)_{10}^3]$那我們如何找所有小於 10000 的立方鏡反數？我們可用以上的方法，利用分類歸納，一一求出限制條件，很快便能找出答案。

4.《推廣》：4 方鏡反數　　依照前面的方法，我們可推出：

(1)二位數的 4 方鏡反數爲 11 。

(2)三位數的 4 方鏡反數爲 101……n 位數的 4 方鏡反數爲

$1\overbrace{0\cdots\cdots0}^{n-2}1$ 。

∴所有的 4 方鏡反數有 11 ，101 ，1001 ，……$1\overbrace{0\cdots\cdots0}^{n-2}1$有無限多個。

5.《推廣》：5 方鏡反數　　$(x_1 \cdots\cdots x_n)_{10}^5 = (10^{n-1}x_1 + 10^{n-2}x_2 + \cdots\cdots + 10x_{n-1} + x_n)^5 = (10^{5n-5}x_1{}^5 + 10^{5n-4}((\overbrace{x_1 \cdots\cdots x_1}^{4}x_2 + \cdots\cdots + x_2\overbrace{x_1 \cdots\cdots x_1}^{4}) + \cdots\cdots + x_n{}^5$ ，考慮二位數時，即$(10x_1 + x_2)^5 = 10^5x_1^5 + 5 \cdot 10^4x_1^4x_2 + 10 \cdot 10^3x_1^3x_2^2 + 10 \cdot 10^3x_2^3x_1^2 + 5 \cdot 10x_1x_2^4 + x_2^5$ ，其限制條件：$x_1^5, x_2^5 < 10$ ，x_1 ，$x_2 \in \{0, 1, \cdots\cdots 9\}$ ，$10(x_1^3x_2^2) < 10 \Rightarrow x_1^3x_2^2 < 1$ ，$5(x_1^4x_2) < 10 \Rightarrow x_1^4x_2 < 2$
$10(x_1^2x_2^3) < 10 \Rightarrow x_1^2x_2^3 < 1 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$ ，$5(x_1x_2{}^4) < 10 \Rightarrow x_1x_2{}^4 < 2$ 。同理可推得 n = 5 時，5 方鏡反數不存在。

6.《推廣》：m 方鏡反數　　$m \geq 5$ ，$m \in N$ ，$\because (x_1 \cdots\cdots x_n)_{10}^m = (10^{n-1}x_1 + 10^{n-2}x_2 + \cdots\cdots + x_n)^m = 10^{m(n-1)} \cdot x_1{}^m + 10^{m(n-1)-1}(\underbrace{\overbrace{x_1 \quad}^{m-1}x_1x_2 + \cdots\cdots + x_2\overbrace{x_1 \quad x_1}^{m-1}}_{m\text{個}}) + \cdots\cdots$

$10(\underbrace{x_{n-1}x_n{}^{m-1}x_n + \cdots\cdots + \overbrace{x_n \quad x_n}^{m-1}x_{n-1}}_{m\text{個}})$ ，其限制條件：

使每一項皆小於 0 。但在展開式中，除首項、末項外，其他中間項的係數，必有某些項之係數超過 10 ，使得 $x_1 = 1$ 時，$x_2 = \cdots\cdots = x_n = 0$ ，也就是說 $m \geqslant 5$ 時，便沒有 m方鏡反數之

存在。

三、結　論

1 爲找出平方鏡反數，設 n 位數 $(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)^2_{10}$ 之平方鏡反數 $=(x_n x_{n-1} \cdots\cdots x_1)^2_{10}$ 是一創舉，使我們很容易去研究平方鏡反數，進而推廣到m方鏡反數。

2 如果 $(x_1 x_2 \cdots\cdots x_n)$ 爲平方鏡反數，則平方鏡反數必由 {0，1，2，3}四個數字的組合。而如果 $(x_1 x_2 \cdots\cdots x_n)$ 爲立方鏡反數，則立方鏡反數必由 {0，1} 二個數字組合。

3 同時我們也發現，由這些數字構成的數不一定是平方鏡反數。

4 位數少的數，或許可用計算機、電腦算出，或檢驗平方鏡反數，但如果位數很大，計算器算不出時，我們可求出其限制條件，是一大收穫。

5 由二位數，三位數，四位數……，n位數，我們發現平方鏡反數的排列有規則性，只要加上限制條件，很快可寫出任何位數的平方鏡反數。

6 平方鏡反數由 101，1001，10001，……… $10\overbrace{\cdots\cdots}^{n}01$ ，……，皆是，如有無限多個平方鏡反數，同時這些數也是立方鏡反數，所以也有無限多個立方鏡反數。

7 當我們推廣到m方鏡反數時，我們可發現：當 $m \geqslant 5$ 時，便沒有m方鏡反數。

8 依照平方鏡反數的方法，我們可推知：四方鏡反數有 11，101，1001，……， $10\overbrace{\cdots\cdots}^{n-2}01$ ，有無限多個。

9 發現平方鏡反數的一般性和特性及自然數一點小奧秘是吾人所願意而努力的方向。

評　語

分析技巧熟練，條件歸納完整。