七巧板與多邊形

國中組數學科第一名

高雄縣立五甲國民中學　　作　　者：李明章・張榮貴
指導教師：柯秀貞・秦芷芷

一、研究動機

一年級上學期上數學課時，老師曾教我們製作七巧板，還利用作好的七巧板來拼多邊形，當時大家排出了三角形、長方形、梯形、平行四邊形，還有人排出了五邊形、六邊形，但是過幾天又排不出來了。到第三册數學上商高定理時學到了等腰直角三角形三邊長之比爲 $1:1:\sqrt{2}$，於是又想到：七巧板有五個等腰直角三角形，那麽是不是也可以由邊長的關係來考慮七巧板所排出的多邊形呢？我們把這個想法告訴老師，老師鼓勵我們動腦筋，想想看，還提示我們七巧板每塊的角度都是 45°，90° 或 135°，可以把角度也加進去考慮，有問題再來找老師討論，於是我們就開始着手研究。

二、研究目的

(一)七巧板可以排出多少種不同的凸多邊形？
(二)七巧板所能排出的多邊形其各邊邊長及拼法爲何？

三、文獻探討

七巧板如果要追究它的起源，該溯自一千多年前，它是我國發明的一種平面造形遊戲，但是儘管七巧板在我國的來源甚早，却一直沒有留下任何文字記載，它的發明年代與發明者已無從查考，至今爲止爲人所知的最古老的出版物是在嘉慶十八年（一八一三年）出版的，歐洲和美國所出版的拼圖書籍，多半是我國書籍的複製品，其中最出名者爲嘉慶二十五年（一八二〇年）以後出版的「七巧初篇合璧」一

書。

四、研究過程

(一)七巧板與多邊形之特性：

因爲七巧板的七塊圖形之角度均爲 45° 的倍數，所以我們可以假設由七巧板所排出的凸多邊形之 45° 角有 a 個，90° 角有 b 個，135°角有 c 個，則此凸多邊形之內角總和卽爲 $45a+90b+135c$ 度。（∵凸多邊形的每一內角均小於 180°，又 a、b、c 均爲自然數或 0，∴只可能有這三種角度）

又假設由七巧板排出之凸多邊形爲 n 邊形，則其內角和恰爲 $(n-2)\times 180$ 度，且由多邊形之特性可得 $a+b+c=n$（∵任一 n 邊形必有 n 個內角）

故 $\begin{cases} a+b+c=n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ 45a+90b+135c=(n-2)\times 180 \cdots ② \end{cases}$

①代入②化簡可得　$a+2b+3c=4(a+b+c)-8$

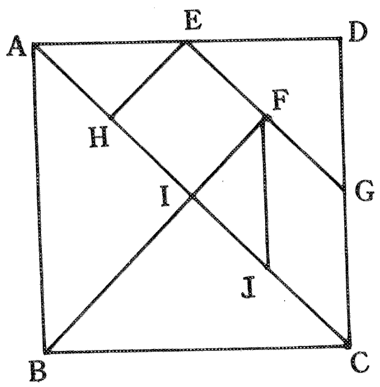
卽　$3a+2b+c=8$（其中 a、b、c 均爲自然數或 0）

則

a	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2
b	0	1	2	3	4	0	1	2	0	1
c	8	6	4	2	0	5	3	1	2	0
n	8	7	6	5	4	6	5	4	4	3

共十種可能

(二)七巧板之規格：



由等腰直角△三邊之比 $1:1:\sqrt{2}$ 的關係我們可假設七塊七巧板之各邊邊長如下：

$\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{EH}=\overline{FI}=\overline{AH}=\overline{HI}=\overline{IJ}=\overline{JC}=1$

$\overline{AE}=\overline{ED}=\overline{DG}=\overline{GC}=\overline{FJ}=\sqrt{2}$

$\overline{AI}=\overline{IC}=\overline{BI}=\overline{EG}=2$

$\overline{AB}=\overline{BC}=2\sqrt{2}$

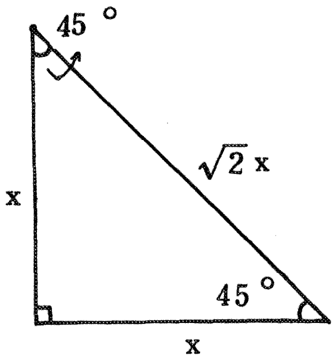
則七塊七巧板之面積總和 $=2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=8$（平方單位）

㈢用七巧板拼組多邊形的方法：

拼組時我們可先由代數的方法，求出各多邊形的邊長和內角，則拼組時可較為簡便。

1. 三角形的拼組——$n=3$（$a=2$，$b=1$，$c=0$）

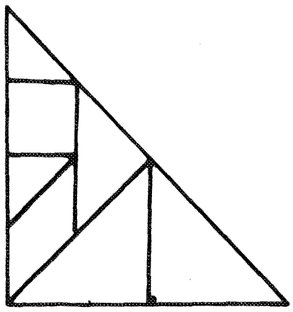
設其圖形為



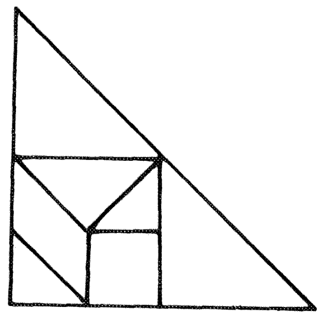
則 $\dfrac{x^2}{2}=8$

$\Rightarrow x=4$

即由七巧板排出之三角形必為兩股長均為 4，斜邊長 $4\sqrt{2}$ 之等腰直角三角形，拼法如下：



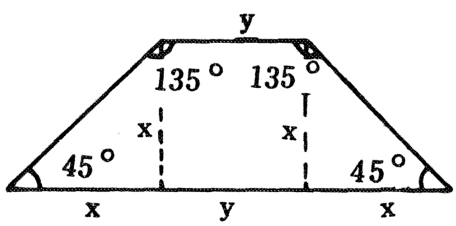
或



2. 四邊形的拼組——$n=4$（(1) $a=2$，$b=0$，$c=2$ (2) $a=1$，$b=2$，$c=1$ (3) $a=0$，$b=4$，$c=0$）

(1) $a=2$，$b=0$，$c=2$

設其圖形為



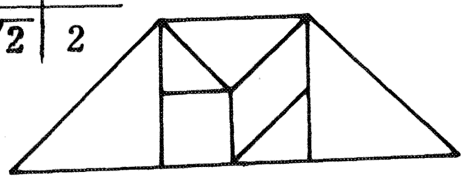
則 $x^2+xy=8$，x，y 必同為 n 或 $m\sqrt{2}$ 之形式（m，n 為自然數）又欲使七塊七巧板統統排入，則圖中之高 x 必大於或等於最大塊等腰直角△之最小高 $\sqrt{2}$。

又上圖中 $y\neq 0$　$\therefore x^2<8$

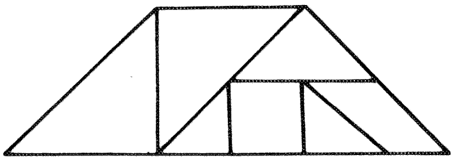
即 $\sqrt{2}\leqslant x<2\sqrt{2}$

得

x	$\sqrt{2}$	2
y	$3\sqrt{2}$	2



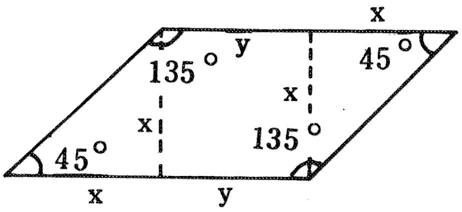
或



當 $x=\sqrt{2}$，$y=3\sqrt{2}$ 時，則較小之五塊七巧板必得排成一高爲 $\sqrt{2}$ 之等腰梯形或平行四邊形，但這是不可能的。

當 $x=2$，$y=2$ 時，拼法如左上：

又若其圖形爲



則 $x^2+xy=8$，此時 y 可爲 0 故

$x^2 \leqslant 8$

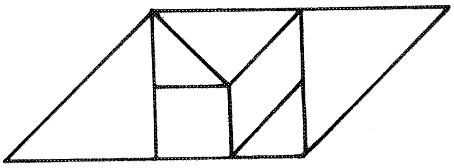
卽 $\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2\sqrt{2}$

得

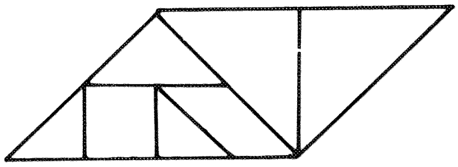
x	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$
y	$3\sqrt{2}$	2	0

當 $x=\sqrt{2}$，$y=3\sqrt{2}$ 時，七巧板無法排成（同上）

當 $x=2$，$y=2$ 時，拼法如下：



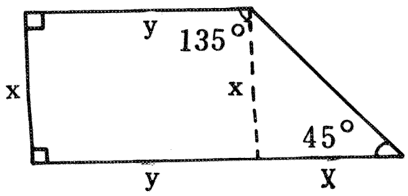
或



當 $x=2\sqrt{2}$，$y=0$ 時拼出之圖形卽 $x=2$，$y=2$ 之圖形

(2) $a=1$，$b=2$，$c=1$

設其圖形爲



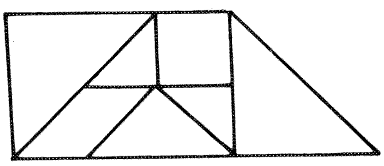
則 $\dfrac{x^2}{2}+xy=8 \Rightarrow x^2+2xy=16$

$y \neq 0$，　　$\therefore \sqrt{2} \leqslant x < 4$

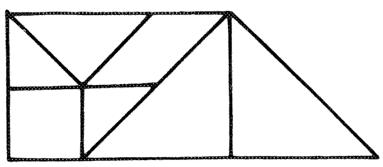
得

x	2	$2\sqrt{2}$
y	3	$\sqrt{2}$

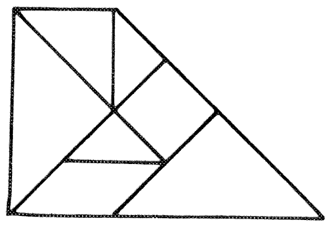
當 $x=2$，$y=3$ 時拼法如下



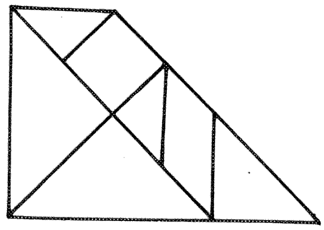
或



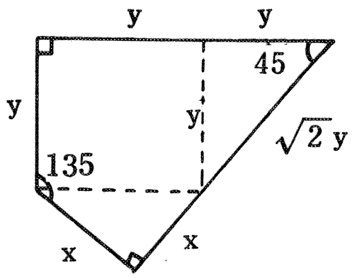
當 $x=2\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$ 時拼法如下



或



又若其圖形爲



則 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\sqrt{2}xy=8 \Rightarrow x^2+y^2+2\sqrt{2}xy=16$，$xy \neq 0$

x 若爲自然數則 y 必爲 $\sqrt{2}$ 之倍數，

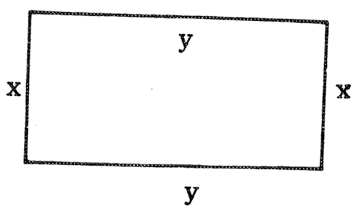
又 x 若爲 $\sqrt{2}$ 之倍數則 y 必爲自然數

且 $x<4$，但無法找到滿足上列條件之 x、y

故七巧板無法排成此種圖形。

(3) $a=0$，$b=4$，$c=0$

設其圖形爲



則 $xy=8$，$x \geqslant \sqrt{2}$，$y \geqslant \sqrt{2}$

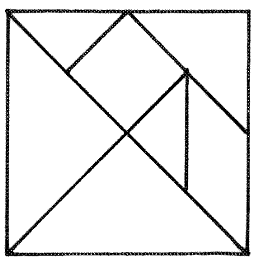
$\therefore \sqrt{2} \leqslant x \leqslant 4\sqrt{2}$

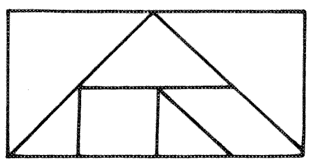
得

x	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$
y	$4\sqrt{2}$	4	$2\sqrt{2}$

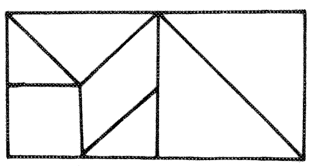
當 $x=\sqrt{2}$，$y=4\sqrt{2}$ 時，則較小之五塊七巧板，必得排成兩個或三個三角形，但這是不可能的。

當 $x=2$，$y=4$ 時，拼法如下





或

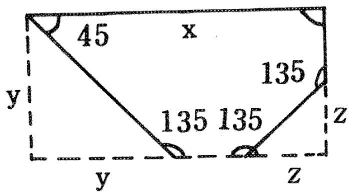


當 $x=2\sqrt{2}$，$y=2\sqrt{2}$ 時，拼法如左上

3.五邊形的拼組——$n=5$（(1) $a=1$，$b=1$，$c=3$，(2) $a=0$，$b=3$，$c=2$）

(1) $a=1$，$b=1$，$c=3$

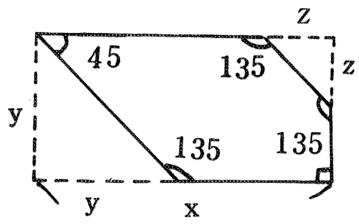
設其圖形爲



則 $\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}+8=xy \Rightarrow y^2+z^2+16=2xy$

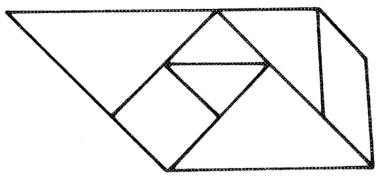
$y+z<x$ 且 $z<y$，又 x 必爲自然數或 $\sqrt{2}$ 之倍數，而 y、z 則可爲自然數或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的倍數，但經反覆代入我們仍無法找到同時滿足上列條件之 x，y，z 故七巧板無法排成此種圖形。

又若其圖形爲



則 $\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}+8=xy \Rightarrow y^2+z^2+16=2xy$

$z<y$，$z<x$，$y<x$，又 x，y，z 可同爲自然數或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的倍數。



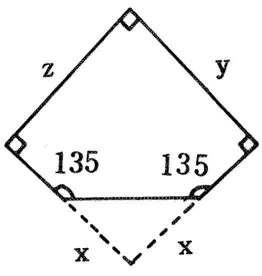
得

x	y	z
$\frac{7\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

拼法如左

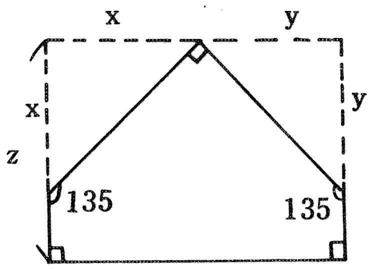
(2) $a=0$，$b=3$，$c=2$

設其圖形爲

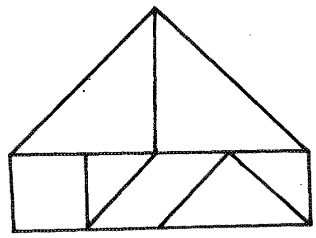


則 $\frac{x^2}{2}+8=yz \Rightarrow x^2+16=2yz$，$x<y$ 且 $x<z$，又 x，y，z 必同爲自然數或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 之倍數，但經反覆代入，我們仍無法找到滿足上列條件之 x，y，z 故七巧板無法排成此種圖形。

又若其圖形爲



則 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+8=(x+y)\cdot z \Rightarrow x^2+y^2+16=2(x+y)\cdot z$，$x<z$，$y<z$，x，y，z 必同爲自然數或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的倍數。



得

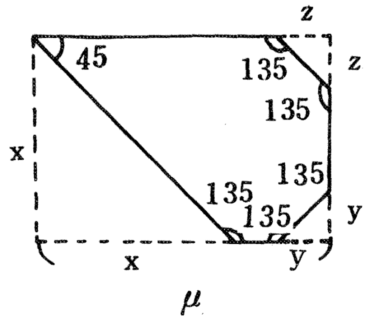
x	y	z
2	2	3

拼法如左

4. 六邊形的拼組——n ＝ 6（(1) a ＝ 1，b ＝ 0，c ＝ 5 (2) a ＝ 0，b ＝ 2，c ＝ 4）

(1) a ＝ 1，b ＝ 0，c ＝ 5

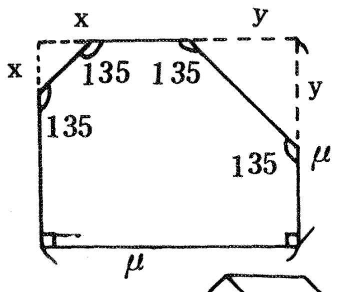
設其圖形爲



則 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}+8=x\mu \Rightarrow x^2+y^2+z^2+16=zx\mu$，$y+z<x$，$x+y<\mu$，$z<\mu$，x，y，z，μ 必同爲自然數或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的倍數，但經反覆代入仍找不到滿足上列條件之 x，y，z，μ，故七巧板無法排成此種圖形。

(2) a ＝ 0，b ＝ 2，c ＝ 4

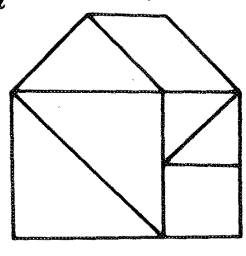
設其圖形爲



則 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+8=\mu\nu \Rightarrow x^2+y^2+16=z\mu\nu$，$x<\nu$，$y<\nu$，$x+y<\mu$

x，y，ν 必同爲自然數或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的倍數

而 μ 則須爲自然數或 $\sqrt{2}$ 的倍數。

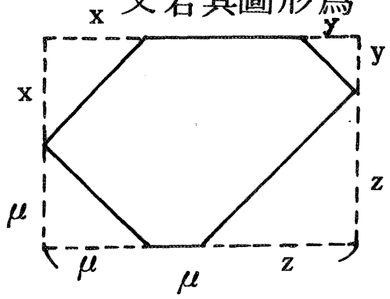


得

x	y	μ	ν
1	1	3	3

拼法如左

又若其圖形爲



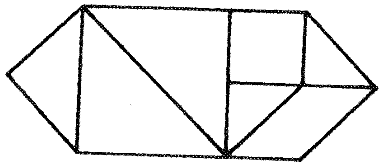
則 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}+\frac{\mu^2}{2}+8=(x+\mu)\nu\ (=(y+z)\cdot\nu)$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+\mu^2+16=2(x+\mu)\cdot\nu$

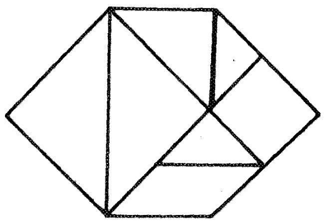
$x+\mu=y+z$，x，y，z，μ 均小於 ν，又 x、y、z、μ、ν 必同為自然數或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 之倍數

得

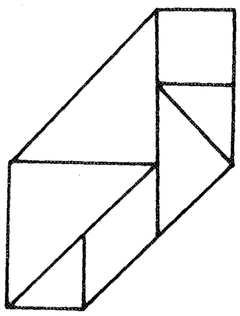
x	1	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
y	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
z	1	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
μ	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
ν	5	$3\sqrt{2}$	$\frac{7\sqrt{2}}{2}$



(一)



(二)



(三)

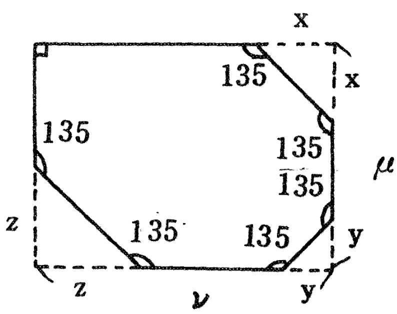
當 $x=1$，$y=1$，$z=1$，$\mu=1$，$\nu=5$ 時，拼法如左(一)。

當 $x=\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$，$z=\sqrt{2}$，$\mu=\sqrt{2}$，$\nu=3\sqrt{2}$ 時，拼法如左(二)。

當 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$y=\sqrt{2}$，$z=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\mu=\sqrt{2}$，$\nu=\frac{7\sqrt{2}}{2}$ 時拼法如左(三)。

5. 七邊形的拼組——$n=7$（$a=0$，$b=1$，$c=6$）

設其圖形為

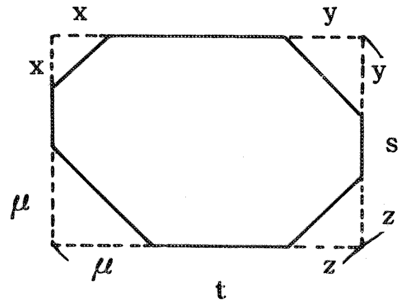


則 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}+8=\mu\nu$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+16=2\mu\nu$，$x+y<\mu$，$z<\mu$，$x<\nu$，$y+z<\nu$，x，y，z，$\mu$，$\nu$ 必同為自然數或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的倍數，但經反覆代入仍無法找到滿足上列條件之 x，y，z，μ，ν 故七巧板無法排成七邊形。

6. 八邊形的拼組——$n=8$（$a=0$，$b=0$，$c=8$）

設其圖形為



則$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}+\frac{\mu^2}{2}+8=st$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+\mu^2+16=2st$

$x+y<t$，$\mu+z<t$，$x+\mu<s$

$y+z<s$，x，y，z，μ，s，t

必同爲自然數或$\frac{\sqrt{2}}{2}$的倍數，但反覆代入仍找不到滿足上列條件之x，y，z，μ，s，t故七巧板無法排成八邊形。

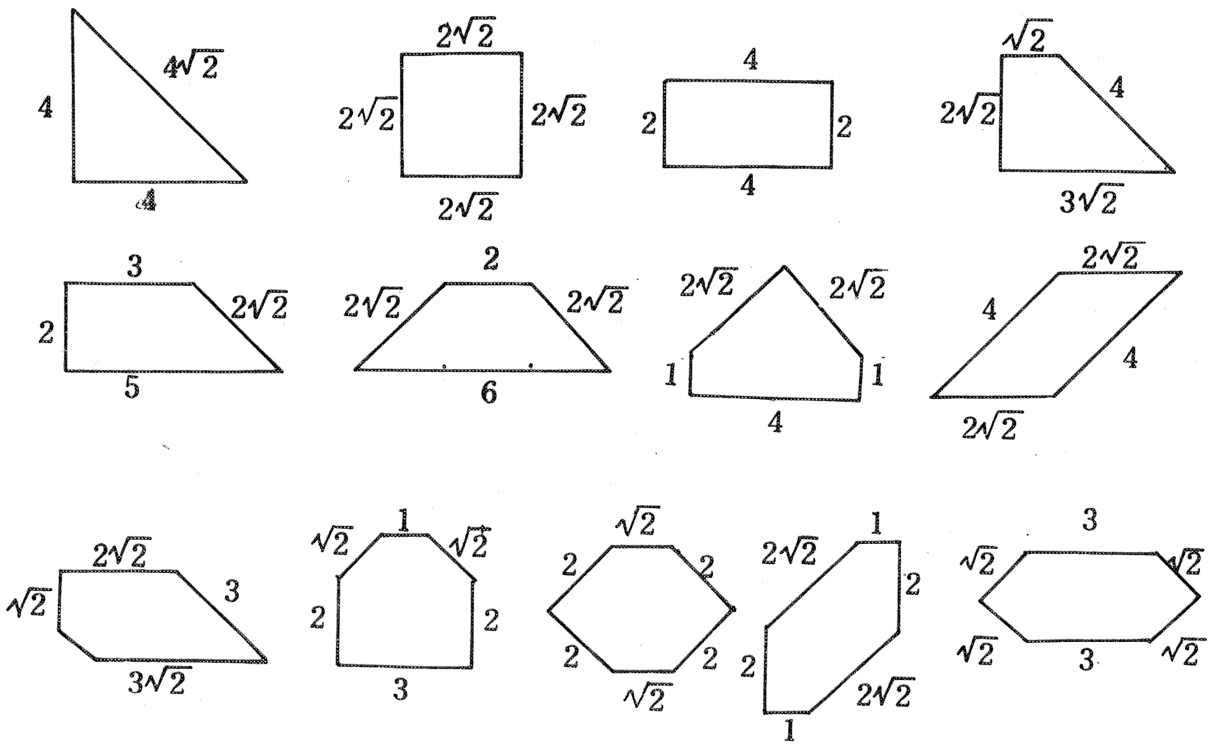
五、結　論

若外形相同（即各邊長及角度均相同）但拼法不同之凸多邊形，視爲同一種類，那麼我們可以得到以下的結果：

㈠七巧板所能排出的凸多邊形，邊數至多六邊，共十三種如下表所示：

形狀	三角形	正方形	長方形	梯形	平行四邊形	五邊形	六邊形
種類	1	1	1	3	1	2	4

㈡每一凸多邊形之邊長如下：



㈢拼排時，只需先將七塊七巧板之各邊長照規格標上 1，$\sqrt{2}$，2 或 $2\sqrt{2}$，再配合上結論之各圖形之邊長，即可很快排出所要之凸多邊形。

六、參考資料

㈠王香完：「七巧板」一書，益群書店印行。

㈡徐道寧：「七巧板與幾何」一文，數學傳播季刊第五卷第一期。

評　語

㈠已具有系統性研究問題的初步能力。

㈡選題適中。

㈢能分辨必要條件與充分條件。

㈣學習態度誠懇，基礎踏實。