

電腦處理函數圖形及其研究

高中組應用科學科第二名

台南一中

作 者：林昇輝、施相宏
指導教師：林 家 模

一、研究動機

在上數學課時，常常被一些複雜的函數圖形與圓錐曲線的處理搞得暈頭轉向。因此我們便想到利用電腦來處理這些函數圖形，以節省一些浪費的時間，並增加了解。

二、研究目的

研究電腦處理函數圖形的方法，以解決找根、旋轉、平移等問題，及應用視窗處理圖形。把數學的處理公式轉換成電腦可利用的公式，以便於處理函數，解決數理、應用科學上的問題。

三、研究設備

宏基MPF-522 EPSON FX-85

四、研究過程

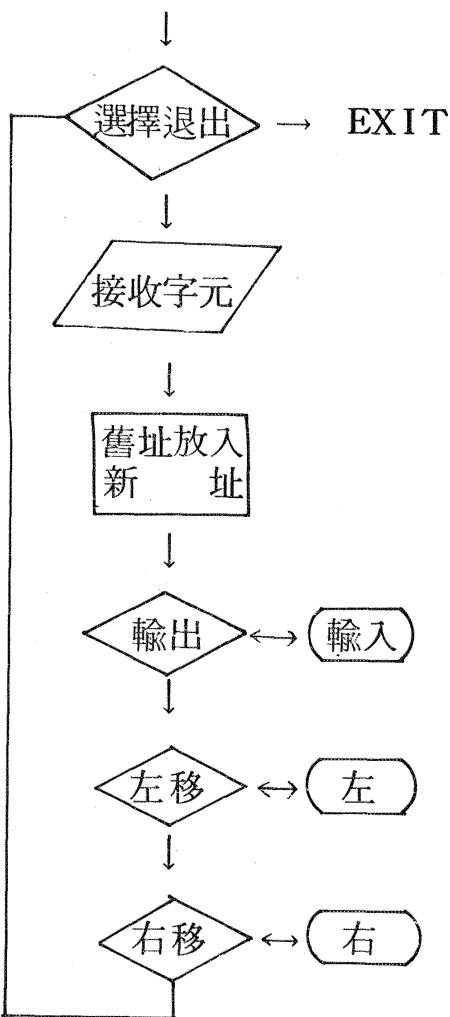
(一)交談式輸入函數係數，處理圓錐曲線。

↓
印出提示
字 串

FOR I=1 TO 6:LOCATE 1,2+
(I-1)*4:PRINT A\$(I):NEXT

↓
將第一子
串塗反白

LOCATE 1,2:COLOR 0.7 (反白)
PRINT A\$(I):COLOR 7,0 (正常)



WHILE NOT (CHOICE\$=CHR\$
(27)

CHOICE\$=INKEY\$

OLOC=LOC

IF CHOICE\$=CHR\$(13) THEN
GOSUB Enter

CODE=ASC(RIGHT\$(CHOICE\$,
1))

IF CODE=75 THEN GOSUB Left

IF CODE=77 THEN GOSUB Right
WEND

左(右) 位置向
左(右)一位
(Right)

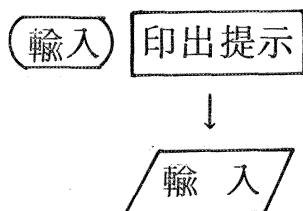
Left : LOC=LOC-1
(Right)

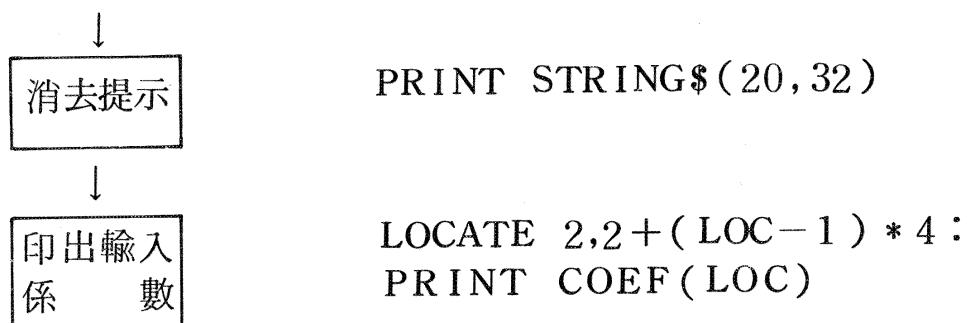
COLOR 0,7 : LOCATE 1, (LOC-1)*
4+2 : PRINT A\$(LOC)

COLOR 7.0 : PRINT A\$ (OLOC)

PRINT "Enter the coefficient":

INPUT " coefficient "; COEF(LOC)





變數表： LOC , OLOC 目前、上次之位置

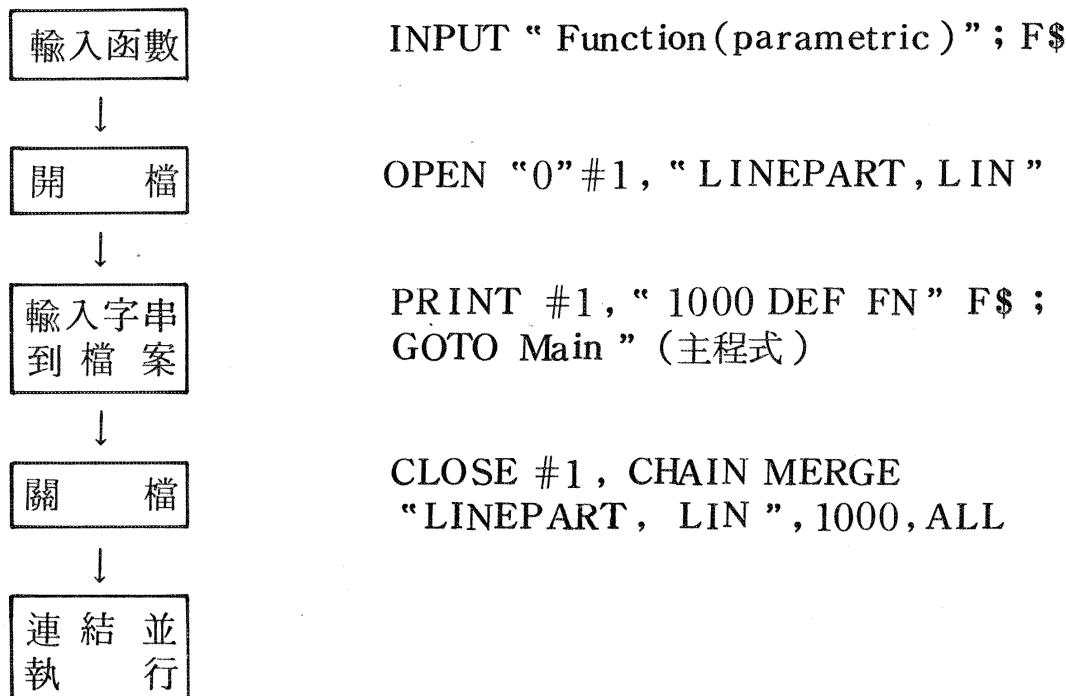
CODE 輸入字元的碼

COEF(n) 係數的陣列

字串表： A\$ (n) 項數字串的陣列

CHOICE\$ 接收的字串

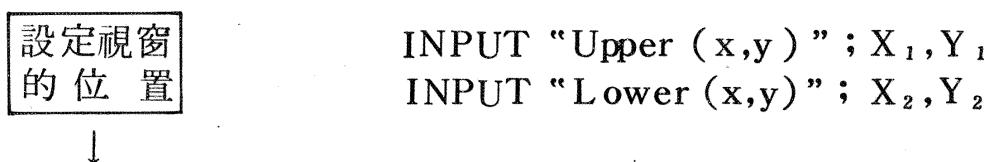
(二) 輸入參數式 (parametric) 函數並與程式連結

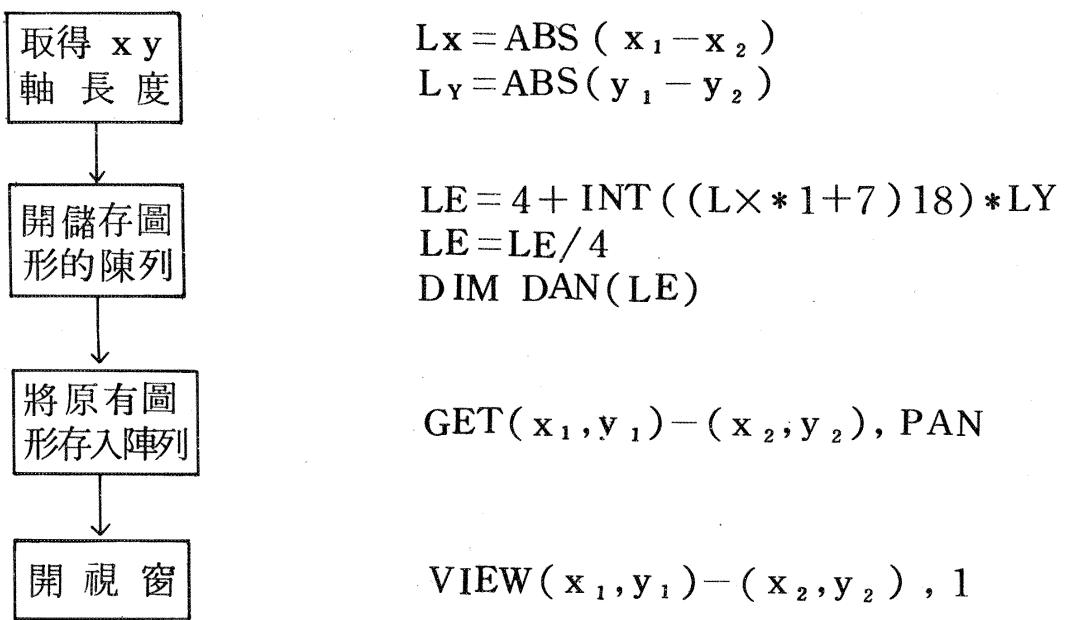


字串表： F \$

鍵入函數

(三) 視窗的使用：





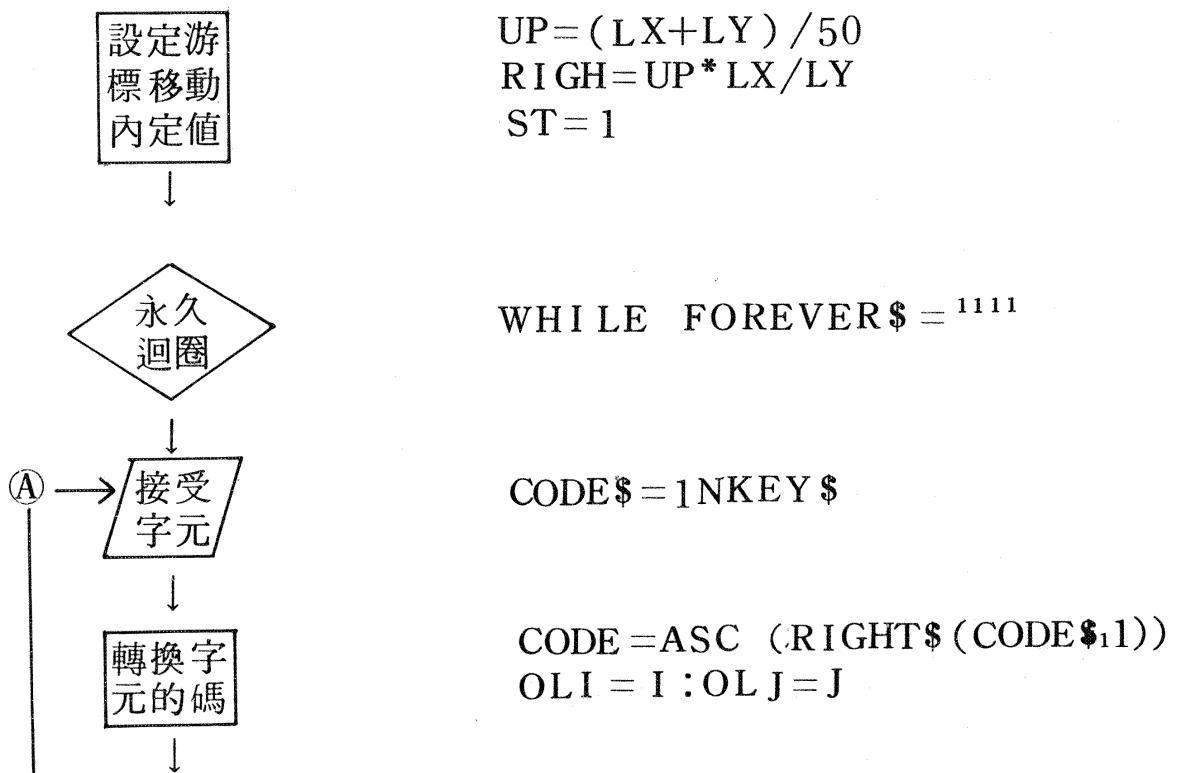
變數表： X_1, Y_1, X_2, Y_2 右上、左下角坐標值

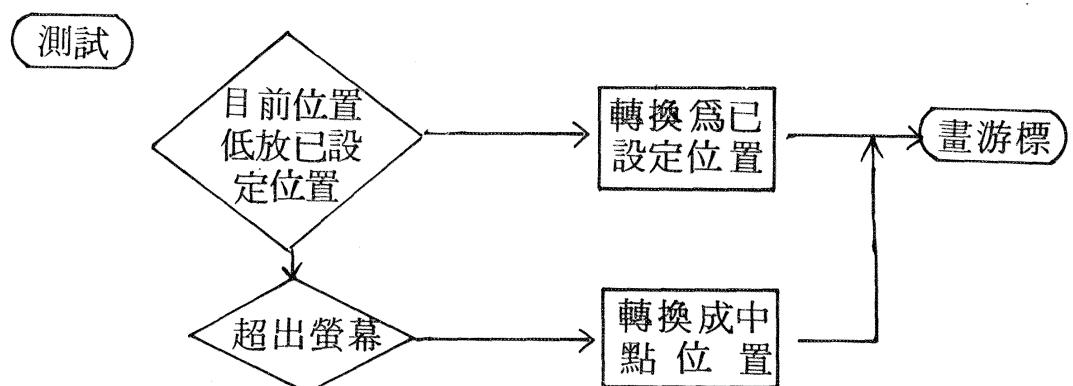
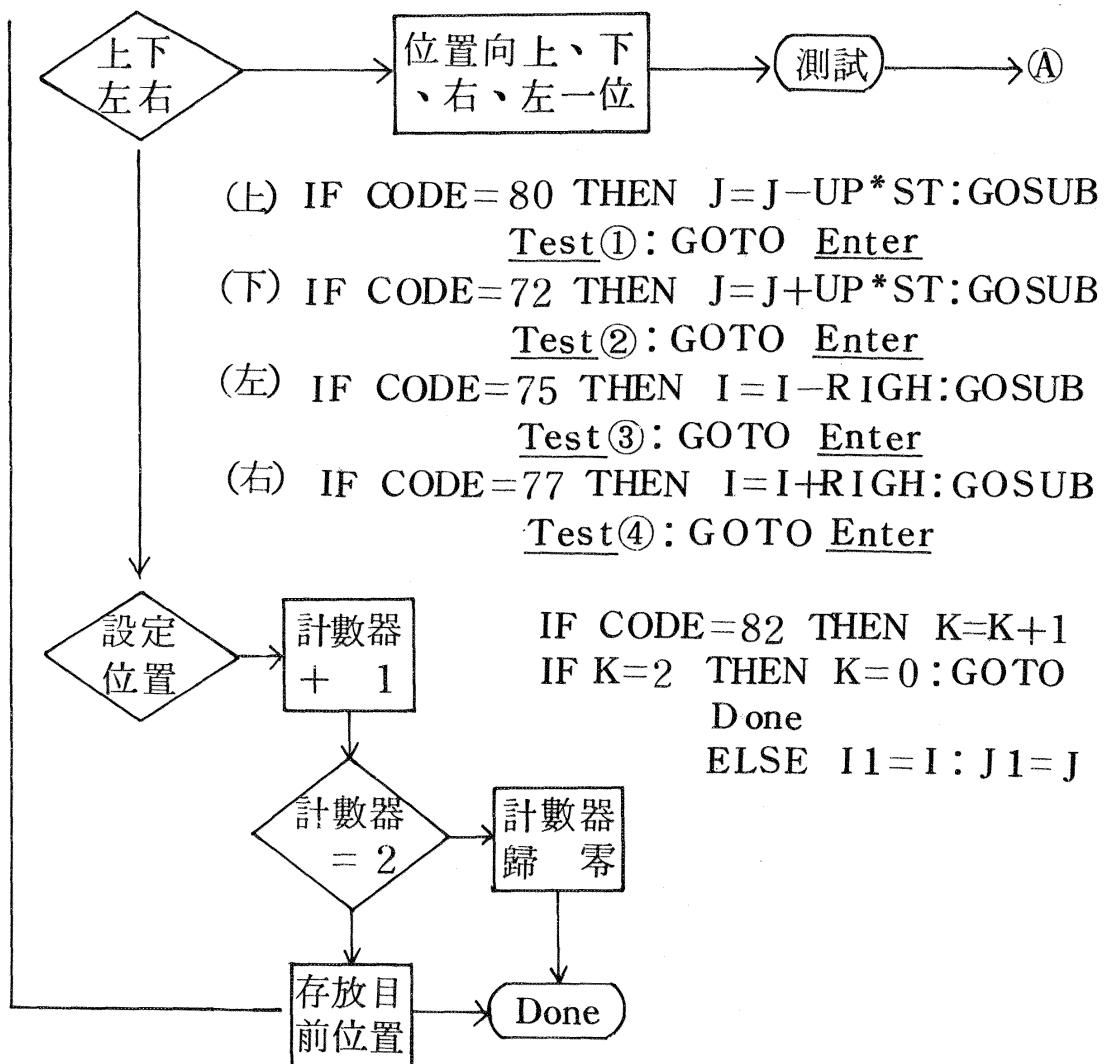
L_x, L_y x, y 軸長度

L_E 陣列長度

PAN 儲存圖形的陣列

(四)游標 (CUSOR) 的移動：





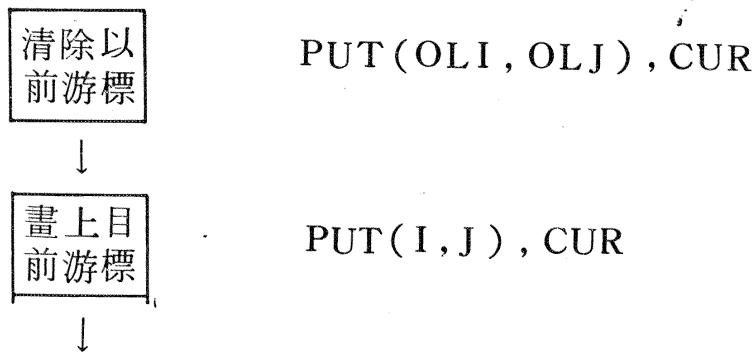
測試①

```

    IF J>J2 AND K=1 THEN J=J1:GOTO Cursor
    ELSE IF J>J2 THEN J=MJ:GOTO Cursor
    ELSE Cursor
  
```

測試②③④同理

畫游標



變數表： UP , RIGH 游標上下左右移的間距

LX , LY x , y 軸長度

ST 間距加乘值

CODE 接收字元碼

I , J 目前位置

OLI , OLJ 上次位置

I1, J1 I2, J2 設定之位置

MI , MJ 螢幕中點位置

K 計數器

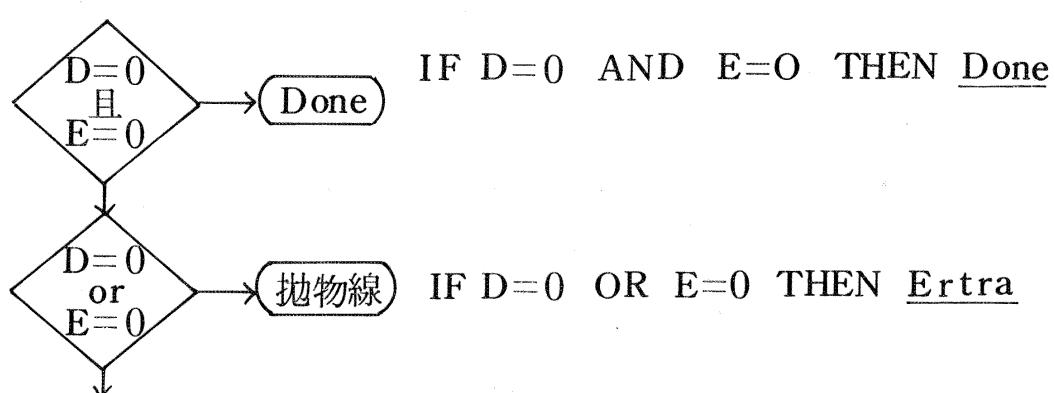
CUR 存放游標圓形的陣列

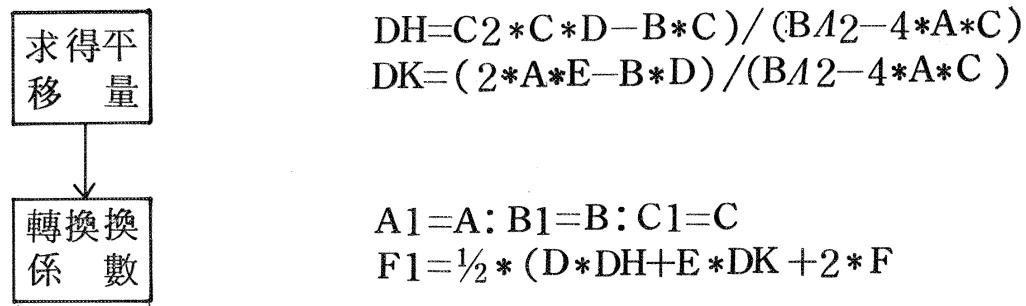
字串表： FOREVER\$ 控制永久迴圈的字串

CODE \$ 輸入的字串

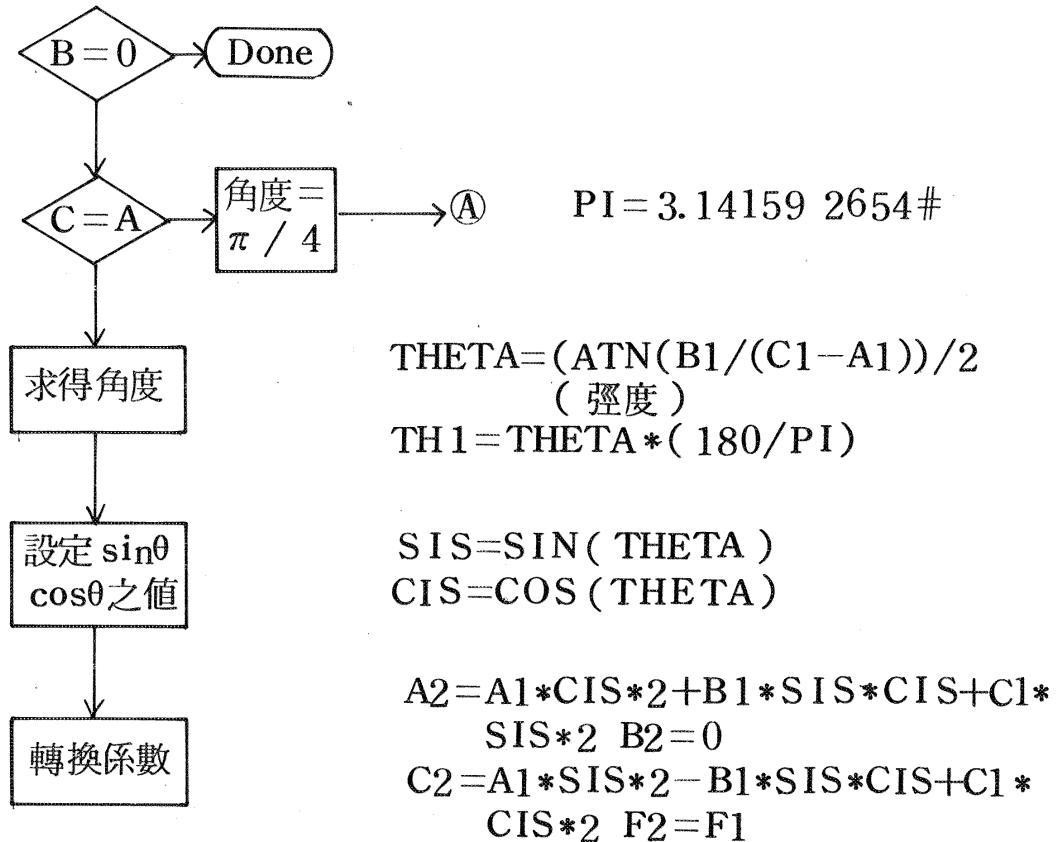
(五) 旋轉及平移：(圓錐曲線標準化)

1. 平移至原點





2. 非標準式曲線化標準式



變數表：A,B,C,D,E,F	原始係數
A ₁ , B ₁ , C ₁ , F ₁	平移後係數
A ₂ , C ₂ , F ₂	標準式係數
DH, DK	X, Y 軸的平移量
THETA	旋轉的角度 (強度)
TH1	旋轉的角度 (角度 degree)
SIS, CIS	θ 角的正餘弦函數

五、文獻探討

非標準式圓錐曲線化標準式參數式

1. 化標準式（先平移後旋轉）

設已有圓錐曲線 ($f(x, y)$) 經平移、旋轉後的方程式

$$\Gamma': f(x', y') = a'x'^2 + bx'y' + cy'^2 + dx' + ey' + f$$

而原始函數 $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$

$$(1) x = x' + h \text{ 代入 } f(x, y)$$

$$\text{平行 } y = y' + k$$

$$\begin{aligned} f'(x', y') &= a(x' + h)^2 + b(x' + h)(y' + k) + c \\ &\quad (y' + k)^2 + d(x' + h) + e(y' + k) + f \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow ax'^2 + bx'y' + cy'^2 + (2ah + bk + d)x' + (bh + 2ck + e)y' + (ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ek + f) = 0$$

$$\text{消去 } x', y' \text{ 一次項} \quad \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases}$$

$$\text{平移量 } (h, k) = \left(\frac{\begin{vmatrix} -d & b \\ -e & 2c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} 2a & -d \\ b & -e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix}} \right)$$

$$= \left(\frac{2cd - bc}{b^2 - 4ac}, \frac{2ae - bd}{b^2 - 4ac} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{此時 } f' &= ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ek + f \\ &= (ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ek + f) \\ &= (ah + \frac{1}{2}bk + \frac{1}{2}d)h + (\frac{1}{2}bh + ck + \frac{1}{2}e)k \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2}dh + \frac{1}{2}ek + f$$

$$= \frac{1}{2}(dh + ck + 2f)$$

得中心(0, 0)之 Γ' : $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$, $d' = d$

$$e' = 0, f' = \frac{1}{2}(dh + ck + 2f)$$

(2) 旋轉: $x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$ 代入 $f(x, y)$

$$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$$

$$\begin{aligned} f'(x', y') &= a(x' \cos\theta - y' \sin\theta)^2 + b(x' \cos\theta - y' \sin\theta) \cdot \\ &\quad (x' \sin\theta + y' \cos\theta) + c(x' \sin\theta + y' \cos\theta)^2 \\ &\quad + d(x' \cos\theta - y' \sin\theta) + e(x' \sin\theta + y' \cos\theta) \\ &\quad + f = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (a \cos^2\theta + b \sin\theta \cos\theta + c \sin^2\theta)x'^2 + (-2a \sin\theta \cos\theta + \\ &\quad b \cos^2\theta - b \sin^2\theta + 2c \sin\theta \cos\theta)x'y' + (a \sin^2\theta - b \sin\theta \\ &\quad \cos\theta + c \cos^2\theta)y'^2 + (d \cos\theta + e \sin\theta)x' + (-d \sin\theta + \\ &\quad e \cos\theta)y' + f = 0 \end{aligned}$$

消去 $x'y'$ 二次項

$$-2a \sin\theta \cos\theta + b \cos^2\theta - b \sin^2\theta + 2c \sin\theta \cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow (c-a) \sin 2\theta + b \cos 2\theta = 0$$

$$\Rightarrow \cot 2\theta = \frac{c-a}{b} \quad \tan 2\theta = \frac{b}{c-a}$$

$$\text{旋轉角 } \theta' = (\tan^{-1} \frac{b}{c-a}) / 2$$

* 旋轉後常數項不變

2. 參數式的通式

橢 圓: $\begin{cases} x = m + ca \cos t + sb \sin t \\ y = n - sa \cos t + cb \sin t \end{cases}$

拋物線: $\begin{cases} x = m + ct + Skt \\ y = n - st + ckt \end{cases}$

雙曲線: $\begin{cases} x = m + ca \sec t + sb \operatorname{tan} t \\ y = n + sa \sec t + cb \operatorname{tan} t \end{cases}$

六、特 點

(一)輸入方法：可處理二元二次圓錐曲線的圖形，並加以分析，可運用BASIC的運算元，組成任意函數，彈性很大。

Eg $y(x) = x^3 - 3x \cos(\text{Abs}(x/2))$ 亦可描繪極式，參數式、不等式。

(二)圖形分析：可將目前螢幕顯示兩軸範圍，以自定格式標示，並可隨意定螢幕範圍，研究圖形的局部放大，座標軸的間距(Skip)亦可由電腦自動設定或鍵入設定。描點密度(step)可隨時設定。

(三)圖形處理：視窗可以同時處數個圖形加以處理比較。

(四)儲存與取出：可將特定的函數存入磁碟片，便於日後取出。

(五)列印：可將畫完之圖形列印，並有大、小之選擇。

七、參考資料

IBM PC 使用手册，吳金榮，松崗。

IBM PC BASIC 入門，儒林。

二次曲線，李躍進，一流。

評 語

本作品可自端末機輸入函數經電腦運算後，繪製於指定的方塊上(螢幕上的視窗)，方塊並可依圖形的需要放大或縮小，一般來說，功能已相當不錯，惟圖形中之座標未見大小標示，有待改進的地方。此外對有些函數未能繪出其值，亦有待改進。

本作品對於教學有部份功用。

本作品主要在用電腦畫函數圖形，創新性稍欠。