

# 等分多邊形之面積與周長的最短路徑

高中組數學科第三名

省立新竹中學

作 者：任宗浩、張興旺

陳棟洲、李文傑

指導教師：許 燦 煌

## 一、研究動機

王老先生有一塊五邊形的地，他想要建一道水泥牆將該地等分成二塊，一塊蓋鴨寮，另一塊蓋豬舍，他希望水泥牆的材料最省，這道水泥牆應如何構築？有一四邊形的湖，其四周均勻地住 3 人，今欲築一座橋將該湖邊的人口平分成二等分，這座橋的最經濟路徑在那裏？這些都是我們經常會碰到的問題，我們將利用解析幾何的方法，逐步地由三角形、四邊形一直處理到  $n$  多邊形有關等分面積與周長的問題。

## 二、研究內容

### (一) 等分多邊形面積的直線

首先考慮三角形的情形，因為它是整個問題的基礎。

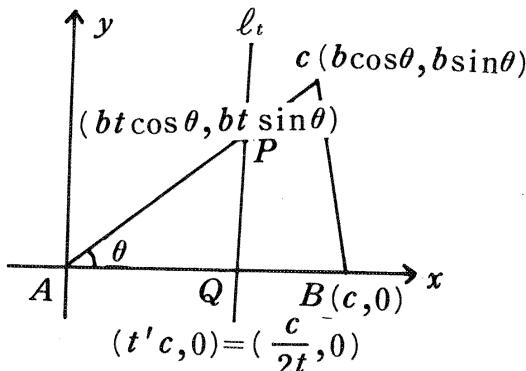
將  $\triangle ABC$  置於坐標平面上，其坐標如圖(一)。 $\triangle ABC$  面積

$$= \frac{1}{2} b c \sin \theta, \text{ 設 } P \text{ 為 } \overline{AC} \text{ 上}$$

一點， $Q$  為  $\overline{AB}$  上一點，且  $\overline{PQ}$  將  $\triangle ABC$  的面積二等分，那麼

$$\begin{aligned} \triangle APQ \text{ 面積} &= \frac{1}{2} (bt)(t'c) \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \triangle ABC \text{ 面積} \\ &= \frac{1}{4} bc \sin \theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t' = \frac{1}{2t}$$



圖(一) 建立等分面積的直線  $\ell_t$

因為  $P$  為  $\overline{AC}$  上一點， $Q$  為  $\overline{AB}$  上一點，所以參數  $t$  滿足：

$$\begin{cases} 0 < t \leq 1 \\ 0 < t' = \frac{1}{2t} \leq 1 \end{cases}$$

故參數  $t$  的範圍為： $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ 。

因直線  $PQ$  決定於參數  $t$ ，故令  $\ell_t = PQ$  直線，又  $\ell_t$  的方程式為

$$\ell_t : y = \frac{bt \sin \theta}{bt \cos \theta - \frac{c}{2t}} \left( x - \frac{c}{2t} \right)$$

對  $t$  集項，整理得

$$2(b \sin \theta x - b \cos \theta y) t^2 - (bc \sin \theta) t + cy = 0$$

因給一  $t$ ，可決定唯一相應的直線  $\ell_t$ ，故可將  $\ell_t$  作為某一曲線的切線，此曲線滿足  $\delta = 0$ ，即

$$(bc \sin \theta)^2 - 8bcy(\sin \theta x - \cos \theta y) = 0$$

經整理得

$$(8 \sin \theta)xy - (8 \cos \theta)y^2 - bc \sin^2 \theta = 0$$

此曲線為一雙曲線，它以  $y=0$

及  $\sin \theta x - \cos \theta y = 0$  為漸近線，如圖(二)。

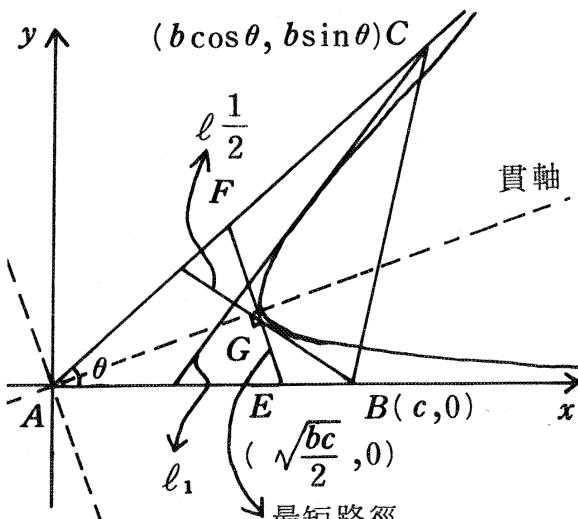
在  $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$  的範圍內得到一

組雙曲線的切線  $\ell_t, \ell_{t'}$  在二漸近線之間的切線段又以垂直貫軸的切線段為最短，故由  $\angle A$  所引等分面積的最短路徑長為

$$\text{共軛軸長} = 2\sqrt{\frac{2bc \sin^2 \theta}{8+8 \cos \theta}}$$

圖(二)  $\angle A$  所引等分面積的最短路徑

$$= \sqrt{bc(1-\cos \theta)}$$



$$= \sqrt{2 \cdot \frac{2\Delta}{\sin\theta}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \quad (\Delta \text{為 } \triangle ABC \text{ 的面積})$$

$$= \sqrt{\frac{2\Delta \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}}}$$

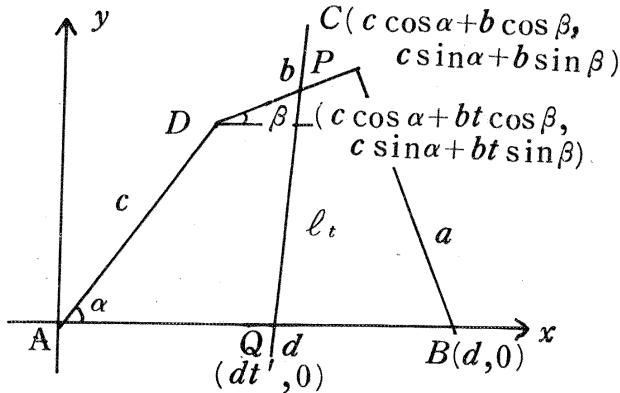
$$= \sqrt{2\Delta \tan \frac{\theta}{2}}$$

由三個頂角各可引出三條雙曲線，其在  $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$  範圍內各有三組等分切線段，故各有三條最短線段，其最短者即為等分  $\triangle ABC$  面積的最短路徑，即

$$\sqrt{2\Delta \tan \frac{\alpha}{2}} \quad \text{其中 } \alpha = \min(A, B, C)。$$

再考慮四邊形的情形，分成二種情形討論：

情形一：等分面積的直線過相鄰二邊，此時， $\triangle ABD$  的面積大於四邊形  $ABCD$  的面積，其等分四邊形面積的直線



圖(2) 等分四邊形  $ABCD$  的直線  $\ell_t$

與上述等分  $\triangle ABC$  面積的情形相同。

情形二：等分面積的直線過相對二邊，此時  $\triangle ABD$  的面積可能大於也可能小於  $\frac{1}{2}$  (四邊形  $ABCD$  的面積)，如圖(3)。令  $AQPD$  面積  $= \frac{1}{2}$  (  $ABCD$  面積 )，由此求出  $t'$  。

$$AQPD \text{ 面積} = \frac{1}{2} \left( \begin{vmatrix} dt' & 0 \\ c \cos \alpha + bt \cos \beta & c \sin \alpha + bt \sin \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c \cos \alpha + bt \cos \beta & c \sin \alpha + bt \sin \beta \\ c \cos \alpha & c \sin \alpha \end{vmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} [ d(c \sin \alpha + b t \sin \beta) t' + b c \sin(\alpha - \beta) t ] \\
&= \frac{1}{2} (ABCD \text{面積}) \\
&= \frac{1}{4} [ d(c \sin \alpha + b \sin \beta) + b c \sin(\alpha - \beta) ]
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow t' = \frac{d(c \sin \alpha + b \sin \beta) + b c \sin(\alpha - \beta) - 2 b c \sin(\alpha - \beta) t}{2 d(c \sin \alpha + b t \sin \beta)}$$

參數  $t$  的範圍：

$$\begin{cases}
0 < t \leq 1 \\
0 < t' \leq 1 \\
0 < t \leq 1 \\
0 < \frac{d(c \sin \alpha + b \sin \beta) + b c \sin(\alpha - \beta) - 2 b c \sin(\alpha - \beta) t}{2 d(c \sin \alpha + b t \sin \beta)} \leq 1
\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Max} \{ C, \frac{-d(c \sin \alpha - b \sin \beta) + b c \sin(\alpha - \beta)}{2 b c \sin(\alpha - \beta) + 2 b d \sin \beta} \} < t \leq \text{Min} \{ 1, \frac{d(c \sin \alpha + b \sin \beta) + b c \sin(\alpha - \beta)}{2 b c \sin(\alpha - \beta)} \}$$

而直線  $\ell_t$  方程式爲

$$\begin{aligned}
y &= \frac{(c \sin \alpha + b t \sin \beta)}{c \cos \alpha + b t \cos \beta} \\
(x - \frac{d(c \sin \alpha + b \sin \beta) + b c \sin(\alpha - \beta) - 2 b c \sin(\alpha - \beta) t}{2(c \sin \alpha + b t \sin \beta)}) \\
&\quad \frac{d(c \sin \alpha + b \sin \beta) + b c \sin(\alpha - \beta) - 2 b c \sin(\alpha - \beta) t}{2(c \sin \alpha + b t \sin \beta)}
\end{aligned}$$

再對  $t$  集項：

$$\begin{aligned}
&[2b^2 \sin^2 \beta x + 2b^2 c \sin \beta \sin(\alpha - \beta) - 2b^2 \sin \beta \cos \beta] t^2 + \\
&[4bc \sin \alpha \sin \beta x + 2bc^2 \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) - b \sin \beta (d(c \sin \alpha \\
&+ b \sin \beta) + b c \sin(\alpha - \beta)) - 2bc(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))
\end{aligned}$$

$$)y]t + 2c^2 \sin^2 \alpha x - c \sin \alpha [d(c \sin \alpha + b \sin \beta) + bc \sin(\alpha - \beta)] - [2c^2 \sin \alpha \cos \alpha - d(c \sin \alpha + b \sin \beta) - bc \sin(\alpha - \beta)]y = 0$$

今任意給定一  $t$ ，可決定唯一相應的直線  $\ell_t$ ，故  $\ell_t$  可作為某一曲線的切線，此曲線滿足  $\delta = 0$ 。

經化簡得：

$$\begin{aligned} & \{-32c^2 \sin^2 \alpha \sin \beta \cos \beta + 8 \sin^2 \beta [2c^2 \sin \alpha \cos \alpha + d(c \sin \alpha + b \sin \beta) + bc \sin(\alpha - \beta)] + 16c^2 \sin^2 \alpha \sin \beta \cos \beta\} \\ & xy + \{16c^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - 8 \sin \beta \cos \beta [2c^2 \sin \alpha \cos \alpha + d(c \sin \alpha + b \sin \beta) + bc \sin(\alpha - \beta)]\}y^2 + \{-16c^2 \sin^2 \alpha \cos \beta + 8 \sin \beta [2c^2 \sin \alpha \cos \alpha + d(c \sin \alpha + b \sin \beta) + bc \sin(\alpha - \beta)]\} \cdot c \sin(\alpha - \beta)y + \{2c^2 \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) - \sin \beta [d(c \sin \alpha + b \sin \beta) + bc \sin(\alpha - \beta)]\}^2 + 8c^2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha - \beta)[d(c \sin \alpha + b \sin \beta) + bc \sin(\alpha - \beta)] \\ & = 0 \end{aligned}$$

若令

$$16c^2 \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) - 8 \sin \beta [d(c \sin \alpha + b \sin \beta) + bc \sin(\alpha - \beta)] = p$$

$$2c^2 \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) + \sin \beta [d(c \sin \alpha + b \sin \beta) + bc \sin(\alpha - \beta)] = q$$

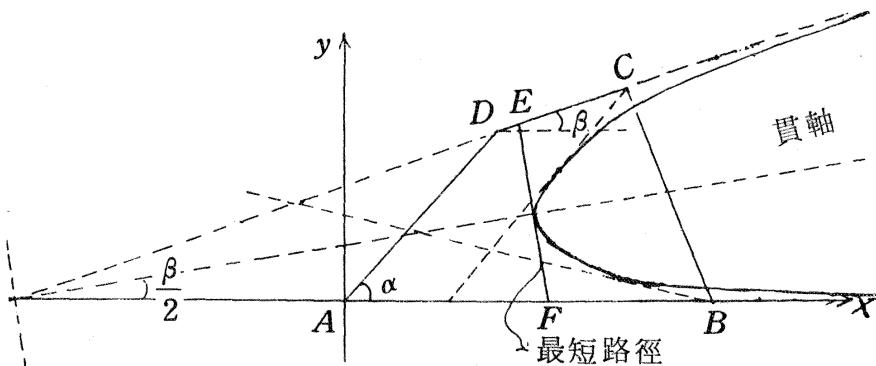
則上述曲線可化簡成

$$py[\sin \beta x - \cos \beta y + c \sin(\alpha - \beta)] - q^2 = 0 \quad (\text{但 } \beta \neq 0)$$

此曲線仍為一雙曲線，它以  $y = 0$  及  $\sin \beta x - \cos \beta y + c \sin(\alpha - \beta) = 0$  為漸近線，而且等分面積之最短路徑為平行共軛軸的線段  $\overline{EF}$ ，如圖四，其長度為

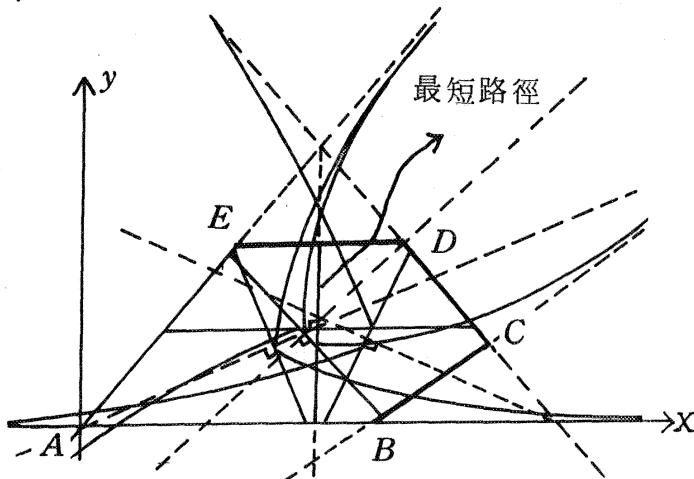
$$\frac{21q}{\sqrt{p} \cos \frac{\beta}{2}} \quad \text{若 } p > 0$$

$$\text{或 } \frac{21q}{\sqrt{-p} \sin \frac{\beta}{2}} \quad \text{若 } p < 0$$



圖四  $\angle A$  所引等分四邊形  $ABCD$  面積的最短路徑  $\overline{EF}$

若  $\triangle ABD$  面積  $> \frac{1}{2}$  (  $ABCD$  面積 )，由情形一與情形二各可引出一雙曲線，因此有二平行共軛軸的切線段，又  $\triangle BCD$  面積  $< \frac{1}{2}$  (  $ABCD$  面積 )， $\angle C$  只能引出情形二的一條雙曲線，但其最短路徑即為  $\angle A$  所引二平行共軛軸的切線段中的一條；同理， $\angle B$ ， $\angle D$  亦可引出二條這樣的線段，我們只要比較這四條平行共軛軸的切線段長即可得出等分四邊形面積的最短路徑。一般而言， $n$  多邊形等分面積的最短路徑就是  $n$  個頂角所引  $n$  條雙曲線，其平行共軛軸之切線段中最短者，圖(五)就是等分五邊形面積的最短路徑的求法。



圖(五) 等分五邊形面積的最短路徑

## (二) 等分多邊形周長的直線

仍然先考慮三角形的情形。設  $\triangle ABC$  周長的一半  $= S =$

$\frac{a+b+c}{2}$ ， $p$  為  $\overline{AC}$  上一點，設為  $p(bt\cos\theta, bt\sin\theta)$ ， $Q$

為  $\overline{AB}$  上一點，設為  $Q(ct', 0)$ ，因  $bt + ct' = s$ ，故  $ct' = s -$

$bt$ 。

$$\text{參數 } t \text{ 的範圍: } \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \leq t' \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \leq \frac{s-bt}{c} \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{s-c}{b} \leq t \leq 1$$

$$\text{直線 } \ell_t : y = \frac{bt \sin \theta}{bt \cos \theta - s + bt} (x - s + bt)$$

$$\text{對 } t \text{ 集項: } (b^2 \sin^2 \theta) t^2 + (b \sin \theta x - b \cos \theta y - by - s \sin \theta) t + sy = 0$$

$\ell_t$  是某一曲線的切線，故此曲線滿足  $\delta = 0$ ，即

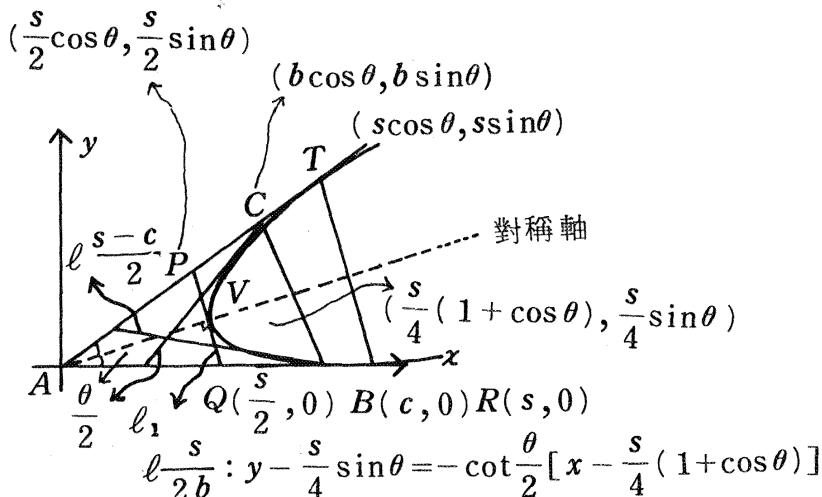
$$[\sin \theta x - (1 + \cos \theta) y - s \sin \theta]^2 - (4s \sin \theta) y = 0$$

$$\text{亦即: } [-\sin \theta x + (1 + \cos \theta) y]^2 - 2s(1 - \cos \theta)[(1 + \cos \theta)x + \sin \theta y - \frac{s}{2}(1 + \cos \theta)] = 0$$

其軌跡為一拋物線，且對稱軸  $L$ :  $\sin \theta x - (1 + \cos \theta) y = 0$ ，

以  $(\frac{s}{4}(1 + \cos \theta), \frac{s}{4} \sin \theta)$  為頂點，又且二邊於  $R(s, 0)$ ，

$T(s \cos \theta, s \sin \theta)$ 。在  $\frac{s-c}{b} \leq t \leq 1$  的範圍內，任一  $t$  值所



圖(六)  $\angle A$  所引等分三角形周長的最短路徑  $\overline{PQ} \parallel \overline{RT}$

決定的切線  $\ell_t$ ，都是等分  $\triangle ABC$  周長的直線，其中以垂直軸且與拋物線相切的切線段爲最短，此即  $\angle A$  所引等分  $\triangle ABC$  周長的最短路徑，如圖(Ⅳ)中的  $\overline{PQ}$ ，其長爲  $s \sin \frac{\theta}{2}$ 。

同樣的  $\angle B$ ,  $\angle C$  亦可得到等分周長的較短路徑，其長依次爲

$s \sin \frac{B}{2}$ ,  $s \sin \frac{C}{2}$ ，此三者最短者即爲等分  $\triangle ABC$  周長的最

短路徑。

再考慮四邊形的情形，依  $\overline{AB} + \overline{AD}$  與四邊形  $ABCD$  的半周長的大小仿等分面積也分成二種情形，我們只討論情形二。

設四邊形半周長  $S = \frac{a+b+c+d}{2}$ ，如圖(Ⅲ)，此時  $Q = (s-c-bt, 0)$ ，參數  $t$  滿足：

$$\begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \leq s - c - bt \leq d \end{cases} \Rightarrow \text{Max} \left\{ 0, \frac{s-c-d}{b} \right\} \leq t \leq \left\{ 1, \frac{s-c}{b} \right\}$$

$$\text{直線 } \ell_t : y = \frac{c \cos \alpha + bt \sin \beta}{c \cos \alpha + bt \cos \beta - s + c + bt} (x - s + c + bt)$$

對  $t$  集項，其與  $\ell_t$  相切仍然滿足  $\frac{\delta}{b^2} = 0$ ，化簡成

$$[ \sin \beta x - (1 + \cos \beta) y + k ]^2 + m [ (1 + \cos \beta) x + \sin \beta y + n ] = 0$$

其中， $k = c \sin \alpha (1 - \cos \beta) - c \cos \alpha (1 + \cos \beta) + 2 c \sin \beta \cos \alpha$ 。

所以，此拋物線軸爲  $\sin \beta x - (1 + \cos \beta) y + k = 0$ ，且與  $x$  軸切於

$(\frac{c \sin \alpha}{\sin \beta} + s - c, 0)$  (設  $\beta \neq 0$ ，至於  $\beta = 0$  時， $ABCD$  為一

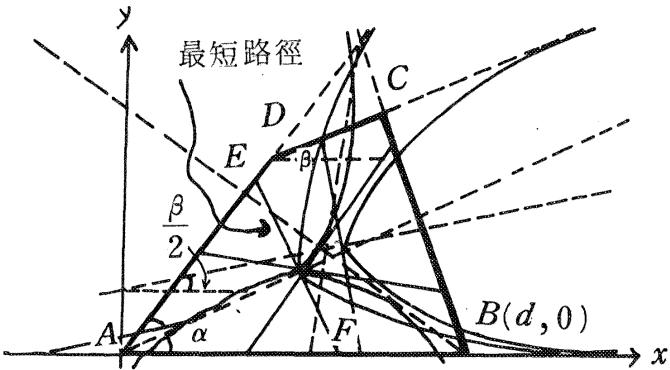
梯形，可以利用配方法找出最短路徑，限於篇幅，不在此詳述。)

與  $CD$  直線相切於  $(c \cos \alpha + (s - c) \cos \beta + c \cot \beta \cdot \sin(\alpha - \beta), c \sin \alpha + (s - c) \sin \beta + c \sin(\alpha - \beta))$ ，其最短路徑爲與軸垂

直的切線段，長爲

$$\sqrt{(S-C)^2 + C^2 - 2C(S-C)\cos\alpha - \frac{1+\cos\beta}{2}(s-s-c\cos\alpha - c\sin\alpha \tan\frac{\beta}{2})^2}$$

對於一般的四邊形等分周長最短路徑的作法與等分面積的情形相同，圖(七)中的  $\overline{EF}$  就是等分四邊形  $ABCD$  的最短路徑。至於等分  $n$  多邊形周長的情形與等分面積的討論相同。



圖(七) 等分四邊形周長的最短路徑  $\overline{EF}$

### 三、進一步的申論

在上面的討論裏，我們只要在允許的參數範圍內所作雙曲線的切線即可得到等分多邊形面積的直線。但我們仍然會懷疑是否過多邊形內部（含邊）任一點  $p$  都可以作出等分面積的直線？也就是說是否可以找到一條雙曲線的切線使它過此  $p$  點？

觀察三角形、四邊形，過其內部一點均可作出等分面積的直線來；對於一般的  $n$  多邊形，我們試著給予較嚴密的證明。

推論 1：過多邊形內部（含邊）任一點均可作出等分其面積的直線。

〔證明〕：

(一)無二對邊平行的情形：

- 1.由上述等分面積的方法，可以找出由  $n$  個頂點所引等分面積的直線。
- 2.每一組對頂三角形的面積相等。
- 3.若任二對邊不平行，則任一組對頂三角形，恰可決定一條雙曲

線。

4. 每一頂點劃出的直線可決定左、右二組對頂三角形，而每相交之二直線恰有一條雙曲線，故共可決定  $2n \times \frac{1}{2} = n$  條雙曲線。

5. 在  $n$  多邊形內任一點，必定包含在這些三角形內，所以，只要找到其相應的雙曲線，作其切線即可得出等分面積的直線。

(二)有二對邊平行的情形：

只需討論平行的一組對頂三角形即可。

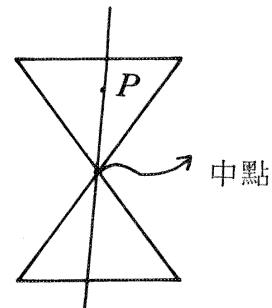
由於上下二個三角形全等，所以只要連接  $P$  與中點即可作出等分面積的直線。

所以，過  $n$  多邊形內部（含邊）任一點都可以作某一雙曲線的切線，此切線即

即為等分面積的直線，而且這樣的雙曲線最多只有  $n$  條。

對於等分多邊形周長的情形只需將雙曲線改為拋物線即可，所以，我們又有下面的推論：

推論 2：過多邊形內部（含邊）任一點均可作出等分其周長的直線。



## 四、結論

(一)利用參數  $t$  決定出等分多邊形之面積或周長的直線  $\ell_t$ ，然後定出與這些直線相切的曲線，所以，過多邊形內（含邊）任一點作此曲線的切線即可得到等分面積或周長的直線，等分面積相關的曲線是雙曲線，其  $n$  條垂直貫軸的切線段中最短者就是等分面積的最短路徑；等分周長相關的曲線是拋物線，其  $n$  條垂直軸的切線段中最短者就是等分周長的最短路徑。

(二)等分三角形、平行四邊形的面積與周長，均有一個很好的結果：

1. 等分  $\triangle ABC$  面積的最短路徑長為  $\sqrt{2\Delta \tan \frac{\theta}{2}}$ ，其中  $\Delta$  為

面積， $\theta$  為最小角。

2. 等分  $\triangle ABC$  周長的最短路徑長為  $s \sin \frac{\theta}{2}$ ，其中  $s$  為半周長  
 $\theta$  為最小角。

3. 等分平行四邊形的周長與面積之最短路徑均為較長邊上的高，

此高過二對角線的交點。

(三)任意  $n$  等分多邊形的面積與周長，其解法與二等分的作法相同。

(四)等分多邊形面積與周長的方法十分相似，這就是我們將它們並列討論的原因。

## 五、參考資料

(一)高中數學教材第三冊、第四冊。

(二)一百個數學問題——第二章、問題 15。

## 評 語

分析清晰，歸納幾近完美，結果也很有意義。