

# 加法鏈上的Scholz-Brauer猜測之研究

高中組數學科第一名

台南區台南一中

作 者：于 如 岡

指導教師：楊 元 宗

## 一、研究動機與目的

給定一自然數  $n$ ，如何最有效率的計算  $x^n$ ？此處  $x^n$  表  $x$  自乘  $n$  次， $x$  可以是任一具有乘法的代數體系中元素；所謂最有效率是指使用最少次的乘法。由此引發了“加法鏈”的概念及許多有趣的數學問題。Knuth [1] 的話恰說明了本研究的動機：

Not only because it is interesting in its own right, but because it is an excellent example of the theoretical questions that arise in the study of "optimum methods of computation."

## 二、定 義

( $\Leftarrow$ )一個“ $n$  上加法鏈”是一遞增自然數序列

$$1 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_r = n, \text{ 其中每一 } a_i = a_j + a_k, \\ i > j \geq k \geq 0$$

$r$  稱爲該加法鏈的長度，所有  $n$  上加法鏈的最小長度以  $\ell(n)$  表示。

\* 顯然  $\ell(n)$  即計算  $x^n$  所須最少乘法數。

\*  $j, k$  依於  $i$ ，應表爲  $j_i, k_i$ ，但若無混淆危險，當  $i, j, k$  同時出現時，我們總是假設  $a_i = a_j + a_k, i > j \geq k \geq 0$ 。

( $\Leftarrow$ )定義  $\lambda(n) = [\log_2 n]$ ，即  $n$  的 2 進位表示之長度減 1。

定義  $\nu(n)$  為  $n$  的 2 進位表示中“1”的個數。

( $\Leftarrow$ )若  $a_i = 2a_{i-1}$ ，稱第  $i$  步爲 doubling，

若  $j = i - 1$ ，稱第  $i$  步爲 star step，

若  $\lambda(a_i) = \lambda(a_{i-1})$ ，稱第  $i$  步爲 small step。

若一鏈完全由 star steps 構成，稱此鏈爲星鏈，以  $\ell^*(n)$  表示  $n$  上星鏈的最小長度。

\* 我們常以  $d$  表 doublings 的個數， $f = r - d$  表 non-doublings 的個數， $s$  表 small steps 的個數，顯然  $r = \lambda(n) + s$ 。

(四) 若一鏈可把其中某些數作上記號，使每一數  $a_i = a_u + a_v$ ，其中  $a_u$  是鏈中小於  $a_i$  而作有記號的最大元素，則稱此鏈爲  $\ell^0$  鏈，並以  $\ell^0(n)$  表  $n$  上  $\ell^0$  鏈的最小長度。

\* 顯然  $\ell(n) \leq \ell^0(n) \leq \ell^*(n)$

\*  $\ell^0$  - 鏈的例子：1，2，4，5，8，10，12，18，以畫底線表作記號，容易驗證每一數是其前一畫有底線之數加上另一數。

### 三、文獻探討

加法鏈的基本性質有  $\lambda(n) \leq \ell(n) \leq \lambda(n) + \nu(n) - 1$ ， $\ell(mn) \leq \ell(m) + \ell(n)$ ， $s \leq f \leq 3.271s$  等，可見於 Knuth [1]。而關於加法鏈最重要的研究集中於所謂 Scholz - Brauer 猜測，即 Scholz [10] 在 1937 年提出的

$\ell(2^n - 1) \leq n - 1 + \ell(n)$  是否恒成立？

1939 年 A. T. Brauer [2] 證明了一相近的結果：

定理 1.  $\ell^*(2^n - 1) \leq n - 1 + \ell^*(n)$

當時尚不知  $\ell^*(n) = \ell(n)$  是否成立，但 1959 年，W. Hansen [4] 證出

定理 2.  $\ell^*(n) - \ell(n)$  可爲任意大

Hansen 同時證出比定理 1. 更強的不等式

定理 3.  $\ell^0(2^n - 1) \leq n - 1 + \ell^0(n)$

另一方面，W. R. Utz [5] 在 1953 年證明了

定理 4. Scholz - Brauer 猜測對  $\nu(n) = 1$  或  $2$  的  $n$  成立

1962 年，A. A. Gioia 等 [6] 又得出

定理 5. Scholz - Brauer 猜測對  $\nu(n) = 3$  的  $n$  也成立

又 Scholz - Brauer 猜測導致  $\theta$  值的研究：

$$\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell(2^n - 1) - (n-1)}{\ell(n)}$$

但上式極限存在與否都成問題，所以過去只是研究：

$$\theta' = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell(2^n - 1) - (n-1)}{\ell(n)}$$

定理 6. [7]  $\theta' > \frac{1}{3}$

定理 7. [8]  $\theta' \geq \log_3 2$

本研究中還要用到下面一些結果：

定理 8. [2]  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell^*(n)}{\lambda(n)} = \frac{\ell(n)}{\lambda(n)} = 1$

( Paul Erdos [3] 有一更強的定理： $\ell(n) \approx \lambda(n) + \frac{\lambda(n)}{\lambda(\lambda(n))}$ )

對幾乎所有的  $n$  成立)

定理 9. [1]  $\ell(n) \geq \lambda(n) + 3$  對  $\nu(n) \geq 4$  成立，除非  $n$  的 2 進位表示法具有下列型式之一：

$$\textcircled{1} n = 1 \cdots \underset{d \text{ 個 } 0}{1} \cdots \underset{a \text{ 個 } 0}{1} \cdots \underset{d \text{ 個 } 0}{1} \cdots \underset{b \text{ 個 } 0}{1} \cdots$$

$$\textcircled{2} n = 1 \cdots \underset{d+1}{1} \cdots \underset{a}{1} \cdots \underset{d}{1} \cdots \underset{b}{1} \cdots$$

$$\textcircled{3} n = 1001 \cdots \underset{a}{11} \cdots \underset{b}{1} \cdots$$

$$\textcircled{4} n = 100111 \cdots \underset{b}{1} \cdots$$

在這些情形下， $\ell(n) = \lambda(n) + 2$

Stolarsky 曾用字母串來代表加法鏈如下：每一步驟對應一字母：

doubling  $a_i = 2a_{i-1}$  對應 D

star step  $a_i = a_{i-1} + a_{i-k-1}$  對應  $S_k$ ,  $k \geq 1$

$S_1$  特記爲 F

$a_i = a_{i-p} + a_{i-q}$  對應  $H_{pq}$

把一加法鏈對應的字母串自 small steps 處分開，得到  $s+1$  個子字母串  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s$ ,  $\sigma_0$  必爲  $D^m$  型，對  $\sigma_i, i \geq 1$ ，Stolarsky 指出

定理10. [7]  $\sigma_i, i \geq 1$  必爲下列 26 型之一 (N 表一不爲 D 之字母，一表連續的 D )

- |                         |                          |
|-------------------------|--------------------------|
| 1. N                    | 14. N—                   |
| 2. NN                   | 15. NN—                  |
| 3. NNS <sub>k</sub>     | 16. NNS <sub>k</sub> —   |
| 4. NNS <sub>k</sub> F   | 17. NNS <sub>k</sub> F—  |
| 5. NNS <sub>k</sub> —F  | 18. NNS <sub>k</sub> —F— |
| 6. NN—S <sub>k</sub>    | 19. NN—S <sub>k</sub> —  |
| 7. NN—S <sub>k</sub> F  | 20. NN—S <sub>k</sub> F— |
| 8. NN—F                 | 21. NN—F—                |
| 9. NN—F—F               | 22. NN—F—F—              |
| 10. NDS <sub>k</sub> —F | 23. NDS <sub>k</sub> —F— |
| 11. N—S <sub>k</sub>    | 24. N—S <sub>k</sub> —   |
| 12. N—S <sub>k</sub> F  | 25. N—S <sub>k</sub> F—  |
| 13. N—F—F               | 26. N—F—F—               |

#### 四、研究結果

關於 Scholz - Brauer 猜測，定理 3. 是目前最好的結果，我們建立了比定理 3. 更強的定理 A。

雖然定理 A 比定理 3. 好，但定理 3. 中的  $\ell^0$  鏈仍具重要性，許多人猜測是否  $\ell(n) = \ell^0(n)$ ，我們嘗試於此，發展了鑑定  $\ell^0$  鏈的測試，並藉  $\ell^0$  鏈推展定理 4、定理 5 至  $\nu(n) = 4$  的情形。

最後我們不但證明  $\theta$  極限存在，並求得其值爲 1。

## 五、討 論

(一)定理 3 的改良：

先引進一些記號：

若  $\{a_i\}_{i=0}^r$  是一  $n$  上加法鏈，令  $x_i = j_i$  或  $k_i$ ，選定了一組  $x_i$  後，令  $m_i = \max(\{0\} \cup \{a_{i'} - a_i \mid x_{i'} = i\})$ 。我們可適當選擇

$x_i$ ，使  $\sum_{i=0}^r m_i$  為最小，以  $M$  表此最小值；再對所有  $n$  上加法鏈，使

$r + M$  為最小，以  $f(n)$  表此值，於是

定理 A  $\ell(2^n - 1) \leq f(n)$

證明：作出長度為  $f(n)$  的  $(2^n - 1)$  上加法鏈如下：

設  $\{a_i\}_{i=0}^r$  是使  $r + M$  為極小的  $n$  上加法鏈， $\{x_i\}_{i=0}^r$  是

使  $\sum_{i=0}^r m_i$  最小的選擇，則可把下列  $f(n)$  個數排序：

$(2^{a_i} - 1)2^j, j = 0, 1, \dots, m_i; i = 0, 1, \dots, r$

共  $\sum_{i=0}^r (m_i + 1) = r + M$  個數

而得一遞增數列，我們可證明它滿足加法鏈的性質：

$$2^{a_i} - 1 = 2^{a_{x_i}} (2^{a_{v_i}} - 1) + 2^{a_{x_i}} - 1 \quad (a_i = a_{x_i} + a_{v_i})$$

$$(2^{a_i} - 1)2^j = 2[(2^{a_i} - 1)2^{j-1}], \text{ 若 } j \geq 1$$

故得定理。

定理 A 比定理 3 強，但不能得到比 Scholz - Brauer 猜測更好的結果：

定理 B  $n - 1 + \ell(n) \leq f(n) \leq n - 1 + \ell^0(n)$

證明：①  $f(n) \geq n - 1 + \ell(n)$

在定理 A 證明中所構建的加法鏈中，至少有  $r \geq \ell(n)$  個 small steps：每一  $(2^{a_i} - 1)$  都是 small step. 因為鏈長  $= \lambda (2^n - 1) + s = n - 1 + s \geq n - 1 + \ell(n)$  明所欲證

②  $f(n) \leq n - 1 + \ell^0(n)$

若  $\{a_i\}_{i=0}^r$  是最短  $\ell^0$  鏈，不失一般性，設  $a_r$  上有記號。

則可令  $x_i = u_i$ ，易見

$m_i = 0$ ，若  $a_i$  沒有記號或  $i = r$ ；

$m_i = a_m - a_i$ ，若  $a_i$  有記號， $a_m$  是下一個有記號元素，

因而  $\sum_{i=0}^r m_i = n - 1$

$$f(n) \leq r + M \leq n - 1 + \ell^0(n)$$

### (2) $\ell^0$ 鏈的研究：

要研究  $\ell^0$  鏈，需知那些鏈是  $\ell^0$  鏈，目前除了所給加法鏈已作上記號， $u_i$ ， $v_i$  也給好，表明了是  $\ell^0$  鏈，沒有方法確定一鏈是否為  $\ell^0$  鏈，我們發展了  $\ell^0$ -test 來決定它， $\ell^0$ -test 的形式使它特別適合放在電腦上工作： $\ell^0$ -TEST：

L1 [ Initial ]  $U \leftarrow \phi$ ， $S \leftarrow \{0\}$ ， $F \leftarrow \phi$ ， $i \leftarrow 1$

L2 [ Test ]  $\{j, k\} \cap S =$

①  $\phi$  :  $F \leftarrow F \cup \{i\}$ ， $S = \{i, \max U\}$

②  $\{j\}$  :  $U \leftarrow U \cup \{j\}$ ， $S = \{i, \max U\}$

③  $\{k\}$  :  $U \leftarrow U \cup \{k\}$ ， $S = \{i, \max U\}$

④  $\{j, k\}$  ;  $j \neq k$  :  $U \leftarrow U \cup \{k\}$ ， $S = \{i, j, \max U\}$

L3 [ Loop on i ]  $i \leftarrow i + 1$ ，if  $i \leq r$ ，goto step L2

定理C 一鏈是  $\ell^0$  鏈的充要條件是作  $\ell^0$ -test 後  $F = \phi$

證明：充分性是很明顯的，只要把  $\{a_i \mid i \in U\}$  作上記號，便得一  $\ell^0$  鏈。

爲了證明必要性，我們對下列敘述行歸納法：

一長度爲  $r$  的鏈爲  $\ell^0$  鏈，若且唯若它作  $\ell^0$ -test 後

$F = \phi$ ，此鏈後再加一元素  $a_{r+1} = a_u + a_v$ ，

而仍爲  $\ell^0$  鏈的充要條件是  $u \in S$ 。

當  $r = 1$  時，上述顯然真確

若上述對  $r$  真確，則對  $r + 1$  也真確，因爲在第  $r + 1$  步時

①  $S = \{r, m\}$ ， $m = \max U$ ，設  $x$  為一  $\notin U$  之數，

若  $(j, k) = (m, m)$ ， $(r, r)$ ， $(m, x)$ ， $(r, x)$

$S \cap \{ j, k \} = \{ j \}$ ,  $a_j$  得被作上記號，下一步的  $u$  也顯然只能是  $j$  或  $r + 1$ 。

若  $(j, k) = (x, m)$

$S \cap \{ j, k \} = \{ k \}$ ,  $a_k$  得被作上記號，下一步的  $u$  也顯然只能是  $k$  或  $r + 1$ 。

若  $(j, k) = (r, m)$

$S \cap \{ j, k \} = \{ j, k \}$ ,  $j \neq k$

$a_j$ ,  $a_k$  兩者中有一須作上記號，或兩者都作。

若作在  $a_j$  上，下一步的  $u$  可為  $j$  或  $r + 1$ ，

若作在  $a_k$  上，下一步的  $u$  可為  $j$  或  $k$  或  $r + 1$ ，

顯然作在  $a_k$  上絕對可行。

②  $S = \{ r, j_r, m \}$ ,  $m = \max U$ ,  $x \in S$

仿上分  $(j, k) = (r, r)$ ,  $(r, x)$ ,  $(j_r, j_r)$ ,  
 $(j_r, x)$ ,  $(m, m)$ ,  $(m, x)$ ;  
 $(j, k) = (x, j_r)$ ,  $(x, m)$ ;  
 $(j, k) = (r, j)$ ,  $(r, m)$ ,  $(j_r, m)$

討論，可得完全相同的結論。

故由歸納法原理得證本定理。

$\ell^0 - \text{test}$  中的  $F$  指示了一鏈“是  $\ell^0$  鏈的的程度”，若可證明存在最短  $n$  上加法鏈滿足  $n(F) = 0$ ，則有  $\ell(n) = \ell^0(n)$ 。  $n(F)$  的上限可輕易估計：

定理 D  $n(F) \leq 2(s - 1)$

證明：由定理 10. 立得。

更精密些，我們可證明：

定理 E 用定理 10. 的記號，並以  $n_i$  表  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{s-1}$  中第  $i$  型出現的次數，則  $n(F) \leq 2n_1 + 2n_2 + n_3 + n_6 + n_{11}$

證明：主要關鍵在： $\sigma_i$  後面的  $N$  (或  $NN$ ) 是可能導致  $n(F)$  增加之處，它們的性質可由  $\sigma_i$  來決定。

① 若  $\sigma_i$  是第  $t$  型， $t > 13$ ，即以  $a, 2a$  結尾， $\sigma_{i+1}$  須以  $2a + x, 2a + x + y$  或  $2a + x, 2a + y$  ( $x, y$  是鏈中數)

起頭，易見作  $\ell^0 - \text{test}$  不影響  $F$ 。

②若  $\sigma_i$  是 4, 7, 12 型，即以  $a, a+x, 2a+x$  結尾，則

$\sigma_{i+1}$  以  $2a+x+y, 2a+x+y+z$  或  $2a+x+y,$

$2a+x+z$  起頭，亦不影響  $F$ 。

③若  $\sigma_i$  是 5, 8, 9, 10, 13 型，以  $a, 2a, 3a$  結尾，則

$\sigma_{i+1}$  以  $3a+x, 3a+x+y$  或  $3a+x, 3a+y$  開頭，亦

不影響  $F$ 。

④若  $\sigma_i$  是 3, 6, 11 型，以  $a, a+b, a+b+c$  結尾，

$\sigma_{i+1}$  以  $a+b+c+d$  或  $a+b+d$  開頭，最多使  $n(F)$

增 1。

綜合①, ②, ③, ④，即得所欲證。

事實上  $r = \ell(n)$  的  $n$  上加法鏈很少有型 1, 2 的  $\sigma_i$ ，型 3, 6, 11 的也不多，而且有相當多情形使  $F$  不變，因而  $F = \phi$  成立，所以我們相信  $\ell(n) = \ell^0(n)$  很可能成立，下一定理加強了這種看法。

定理  $F = \ell(n) = \ell^0(n)$  對  $\nu(n) \leq 4$  成立，因此

Scholz - Brauer 猜測對  $\nu(n) \leq 4$  之  $n$  成立

證明： $\nu(n) = 1, 2$  的情形可由定理 D 直接獲得。

$\nu(n) = 3$  時，Knuth [1] 已證  $\ell(n) = \lambda(n) + 2$ ，

若  $n = 2^A + 2^B + 2^C$ ,  $A > B > C$ ，則

$1, 2, 4, \dots 2^C, \dots 2^B, \dots 2^A, 2^A + 2^B, 2^A + 2^B + 2^C$

是長度為  $\lambda(n) + 2$  的  $\ell^0$  鏈。

$\nu(n) = 4$  時，由定理 9，可分為 5 種情形，我們將對每一情形作出一長度為  $\ell(n)$  的  $\ell^0$  鏈：

①  $\ell(n) = \lambda(n) + 3$ ，若  $n = 2^A + 2^B + 2^C + 2^D$ ,  $A > B > C > D$ ，則  $1, 2, 4 \dots 2^D, \dots 2^C, \dots 2^B, \dots 2^A, 2^A + 2^B, 2^A + 2^B + 2^C, 2^A + 2^B + 2^C + 2^D$  是長度為  $\lambda(n) + 3$  的  $\ell^0$  鏈。

②  $n = 1 \underset{d}{\cdots} 1 \underset{a}{\cdots} 1 \underset{d}{\cdots} 1 \underset{b}{\cdots} = 2^b (2^d + 1) (2^{a+d} + 1)$

$\ell^0$  鏈： $1, \dots 2^d, 2^d + 1, \dots (2^d + 1) 2^{a+d}, (2^d + 1)$

$$(2^{a+d}+1), \dots, 2^b(2^d+1)(2^{a+d}+1)$$

$$\textcircled{3} n = 1_{d+1} \dots 1_a \dots 1_d \dots 1_b = 2^b(2^{a+2d+1} + 2^{a+d} + 2^d + 1)$$

$$\ell^0 \text{鏈: } 1, \dots, 2^d, 2^d+1, 2^{d+1}+1, \dots, 2^{a+2d+1}+2^{a+d}, \\ 2^{a+2d+1}+2^{a+d}+2^d+1, \dots, \\ 2^b(2^{a+2d+1}+2^{a+d}+2^d+1)$$

$$\textcircled{4} n = 1001_a \dots 11_b = 2^b(9 \cdot 2^a + 3)$$

$$\ell^0 \text{鏈: } 1, 2, 3, 6, 9, \dots, 9 \cdot 2^a, 9 \cdot 2^a + 3, \dots, (9 \cdot 2^a + 3) 2^b$$

$$\textcircled{5} n = 1000111_b = 2^b \cdot 135$$

$$\ell^0 \text{鏈: } 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54, 108, 135, \dots 135 \times 2^b \text{ 證畢。}$$

(二)  $\theta$  值之計算：

Stolarsky [7] 利用下法計算  $\theta'$  的下限：設法證明  $\nu(n) \leq C \cdot R^s$ ，則  $\ell(n) \geq \lambda(n) + \log_R \nu(n) - \log_R C$ ，則  $\theta' \geq \frac{1}{\log_2 R}$

。此處我們有一個方法很快得到  $\theta'$  的下限，所得只比 Stolarsky [7] 稍差：

$$\text{定理 G } \theta' \geq \frac{1}{3.271}$$

證明：每一 non-doubling 最多使  $\max \{ \nu(a_j) \mid j \leq i \}$  倍增，又

$$\nu(a_0) = 1,$$

$$\text{故 } \nu(n) \leq 2^f \leq 2^{3.271s} = (2^{3.271})^s$$

$$\text{故 } \theta' \geq 1 / \log_2 2^{3.271} = \frac{1}{3.271}$$

爲了進一步估計  $\nu(n)$  與  $s$  的關係，我們注意到  $a_i = a_i + a_k$  作二進位加法時，若進位很多，則  $\nu(a_i)$  增加很少，甚至減少，尤其  $a_j$ ， $a_k$  間 doubling 不多時常常如此。我們以  $d_i$  表前  $i$  步中 doublings 的個數，設  $P$  為某一自然數，則可把 non-doublings 分成兩類，一是

$d_j - d_k \geq p$  的，一是  $d_j - d_k < p$  的，以第二類，第三類稱之，並稱 doublings 為第一類。因為  $\nu(a_i)$  不一定遞增，對研究  $\nu(a_i)$  的成長有困難，我們作出新遞增數列  $n(B_i)$ ，而使  $n(B_i) \geq \nu(a_i)$ ，用來估計  $\nu(a_i)$ ：

定義： $B(n) = \{c_1, c_2, \dots, c_{\nu(n)}\}$ ，若  $n = \sum_{i=1}^{\nu(n)} 2^{c_i}$ ， $c_i \neq c_j$

$$SH(B, a) = \{x + a \mid x \in B\}$$

令  $B_0 = \{0\}$ ，遞迴定義  $B_i$  如下：

視第  $i$  步為 1, 2, 3 類，而分別令

$$B_i = SH(B_{i-1}, 1)$$

$$B_i = B_{i-1} \cup SH(B_{i-1}, d_k - d_i)$$

$$\cup B(B^{-1}(B_{i-1}) + B^{-1}(SH(B_{i-1}, d_k - d_i)))$$

$$B_i = \bigcup_{i=0}^p SH(B_{i-1}, 1-\ell)$$

引理 H  $B_i \supset B(a_i)$ ，因而  $n(B_i) \geq \nu(a_i)$

證明：用歸納法證明  $B_i \supset B(a_i)$  且  $B_i \supset SH(B_k, d_i - d_k)$ ， $k \leq i$ ；

$i = 0$  時，上述為真，若上述對  $i < q$  成立，則

① 第  $q$  步是第一類，上式顯然對  $q$  成立

② 第  $q$  步是第二類， $B(a_j) \subset SH(B_{q-1}, d_j - d_{q-1}) = B_{q-1}$

$B(a_k) \subset SH(B_{q-1}, d_k - d_{q-1})$ ，又若  $P \subset X$ ， $Q \subset Y$ ，

必有  $B(B^{-1}(P) + B^{-1}(Q)) \subset X \cup Y \cup B(B^{-1}(X) + B^{-1}(Y))$  故上式對  $q$  亦成立。

③ 第  $q$  步是第三類，則  $B(a_j) \subset B_{q-1}$ ，

$$B(a_k) \subset SH(B_{q-1}, d_k - d_{q-1}) \subset \bigcup_{i=0}^p SH(B_{q-1}, 1-\ell),$$

$$B(a_k + a_j) \subset \bigcup_{i=0}^p SH(B_{q-1}, 1-\ell).$$

故上述對  $q$  總能成立，證畢。

引理 I 以  $x_i, y_i$  表前  $i$  步中第二類步，第三類步的個數，則

$$n(B_i) \leq (1 + py_i) 2^{xi}$$

證明：第一類步不改變  $n(B_i)$ ，第二類步最多使  $n(B_i)$  增倍，  
 $n(B_0) = 1$ ，我們只須證明第三類步最多只能使  $n(B_i)$  增加  $\frac{1+py_i}{1+py_{i-1}}$  倍。

把  $B_i$  分成  $B_{i1} \cup B_{i2} \cup B_{i3} \dots \cup B_{iq}$ ， $B_{ia}$  均非空，且具有  $\{x+1, x+2, \dots, x+m\}$  之形式，且若  $a > b$ ，則  $x > y+1 \forall x \in B_{ia}, y \in B_{ib}$ 。我們將證明  $n(B_{ia}) \geq 1 + px_i$ 。

用歸納法：上述對  $i = 0$  成立，並經第一類，第二類步仍保持為真，經過第三類步時  $n(B_{ia})$  增加  $P$  以上，故得。

現在若第  $i$  步為第三類，

$$\begin{aligned} n(B_i) &\leq \sum_{a=1}^q (n(B_{i-1,a}) + p) \leq \sum_{a=1}^q n(B_{i-1,a}) \frac{1+py_i}{1+py_{i-1}} \\ &= n(B_{i-1}) \cdot \frac{1+py_i}{1+py_{i-1}} \end{aligned}$$

定理 J  $\theta = 1$

證明：取  $p = \lceil \log_2 f \rceil$ ，並設  $f \leq k \log_2 \nu(n)$ ， $k = 3.271$   
 (若否，則  $r \geq \lambda(n) + \log_2 \nu(n)$  成立)。

我們有  $n \leq (1+2^{-p})^{x_r} 2^{r-x_r}$ ，

$$r \geq \log_2 n + x_r (1 - \log_2 (1+2^{-p}))$$

用引理 H，引理 I， $x_r \geq \log_2 \nu(n) - \log_2 (1+py_r)$

$$r \geq \log_2 n + \log_2 \nu(n) - \log_2 (1+py_r) - x_r \log_2 (1+$$

$$2^{-p})$$
 後兩項  $\log_2 (1+py_r) + x_r \log_2 (1+2^{-p})$

$$= \log_2 ((1+py_r)(1+2^{-p})^{x_r})$$

$$\leq \log_2 ((1+f \log_2 f) (1 + \frac{1}{f/2})^f)$$

$$\leq \log_2 ((1+f \log_2 f) e^2)$$

$$\leq \log_2 ((1+(k \log_2 \nu(n))(\log_2 (k \log_2 \nu(n)))) \cdot e^2)$$

$$= O(\log_2 \nu(n))$$

故  $\ell(n) \geq \log_2 n + \log_2 \nu(n) + O(\log_2 \nu(n))$

$$\begin{aligned} \text{取 } n = 2^m - 1, \text{ 則有 } \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ell(2^m - 1) - (m - 1)}{\ell(m)} \\ = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ell(2^m - 1) - (m - 1)}{\log_2 m} \geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{但我們已有 } \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{\ell(2^m - 1) - (m - 1)}{\ell(m)} \\ = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{\ell^*(2^m - 1) - (m - 1)}{\ell^*(m)} \leq 1 \end{aligned}$$

故得  $\theta = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ell(2^m - 1) - (m - 1)}{\ell(m)} = 1$

## 六、參考資料

- (一) D. E. Knuth, The art of computer programming, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969, 398-422.
- (二) A. T. Brauer, on addition chains, Amer. Math. Soc. 45 (1939) 736-739.
- (三) P. Erdos, Remarks on number theory III on addition chains, Acta Arith. 6 (1960) 77-81.
- (四) W. Hansen, Zum Scholz-Brauerchen Problem, J. Reine Angew. Math. 202 (1959) 245-248.
- (五) W. R. Utz, A note on the Scholz-Brauer problem on addition chains, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953) 462-463.
- (六) A. A. Gioia, M. V. Subbarao and M. Sugunumma, The Scholz-Brauer problem in addition chains, Duke Math. J. 29 (1962) 481-487.
- (七) K. B. Stolarsky, A lower bound for the Scholz-Brauer problem, Can. J. Math. 21 (1969) 675-633.
- (八) A. Cottrell, A lower bound for the Scholz-Brauer problem, Notices Amer. Math. Soc. 20 (1973) A-476.

(九) E. G. Thurber, The scholz - Brauer problem on addition chains, Pacific J. Math. 49(1973) 229- 242.

(十) A. Scholz, Jahresbericht, Deutsche Math. Verein. 47 (1937) 41.

## 評 語

(一) 這個問題，作者不但推算出比 Scholz - Brauer 猜測更佳的結果，而且將其條件限制更加放寬。事實上，這個作品已經到了可以在學術雜誌上發表的程度了。

(二) 作者參考文獻上所提出的第十篇文章，事實上他本人沒有找到，我們建議他刪去或替他找出來。