

簡諧運動彈簧等效質量之測定

高中組物理科第一名

省立臺南女子高級中學

作 者：陳惠玲、郭乃萍

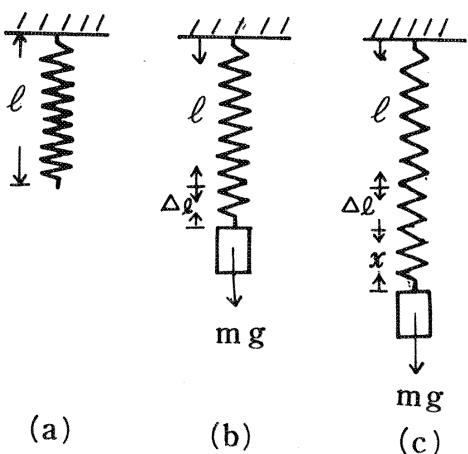
白佩玉

指導教師：林柳生

一、研究動機

日常生活中簡諧運動的例子很多，例如：浮在水面上的木塊往下壓一段距離後放手，木塊即受重力與浮力的作用作簡諧運動；節拍器的左右振盪也可算是簡諧運動的一種，而實驗室中最常見的就是懸在彈簧下物體的簡諧，物體振盪時，受彈簧的回復力及重力而作上下的振盪，但此時不僅是物體，彈簧本身也在作振盪。所以，計算簡諧運動質量的時候，須考慮彈簧參與的部分質量。本實驗所探討的即為彈簧參與簡諧的有效質量與彈簧原質量的關係。

二、原 理



圖(a)表一線圈，其力常數為 K ，掛物後，如(b)所示，其平衡點為伸長 ℓ 的長度之點，此時彈簧的回復力 P 。 $P = mg$ ，即 $K\Delta\ell = mg$ ，圖(c)為設物體在平衡點下方 x 處，則物體所受合力：

$$F = mg - K(\Delta\ell + x) = -Kx$$

當物體所受之外力與位移成如上之關係時，物體即作簡諧運動，考慮彈簧時，不可以單純地將彈簧的質量加上去，因為彈簧的每一部分振幅並不相同，底端振幅與懸垂物相同，而彈簧上端振幅為 0，所以，我們可以假設其參與之有效質量 m' 與彈簧原有質量 M 或 $m' = CM$ (C 為假設之關係常數，即為此次實驗

之目的），我們可修正週期之關係式：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + CM}{K}}$$

m ：懸垂物之質量

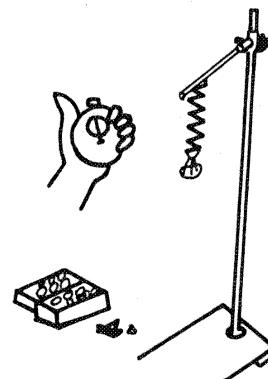
M ：彈簧質量

K ：彈簧力常數

由實驗測 T ， m ， M ， K 求 C 。或利用 $T^2 \propto (m + CM)$ 之關係式，利用 T^2 及 m 作圖後外插而求出 C 。

三、研究設備器材

馬錶，砝碼，尺，彈簧，鐵架



四、研究過程

- (一) 1. 將彈簧、尺、鐵架如圖裝置。
2. 掛上砝碼，測彈簧之伸長量。
3. 以砝碼質量為縱軸（事先化成絕對單位），以伸長量為橫軸作圖，所得直線之斜率即為力常數 K 。
4. 同法測其他彈簧的力常數。
- (二) 1. 選取適當質量掛於彈簧下。
2. 用手將秤盤往上或往下移動一段距離後放手，以秤盤再次到放手處為振動一次，測定振動20次所需之時間，計算其週期，測定三次，求週期平均值。
3. 依序用不同質量測之。
4. 同法測其他彈簧之週期。
- (三) 1. 測彈簧及秤盤之質量。
2. 利用彈簧 I, II, III 所得之數據求 C 值，再測 IV, V 之週期代入驗證 C 值是否正確。

五、實驗結果

- (一) 測彈性係數：

彈	砝碼重 (gw)	6	7	8	9	10	
簧	伸長量 (cm)	2.50	2.90	3.40	3.80	4.20	
I	K 值	2332.40 dyne / cm					

彈	砝碼重 (gw)	1	2	3	4	5	
簧	伸長量 (cm)	3.45	6.90	10.35	13.60	16.80	
II	K 值	286.24 dyne / cm					

彈	砝碼重 (gw)	1	2	3	4	5	
簧	伸長量 (cm)	5.10	10.25	15.30	20.40	25.50	
III	K 值	192.16 dyne / cm					

(二) 測週期與計算 C 值

彈 簧 I	砝 碼 質 量 (g)	秤盤 質 量 (g)	週 期 懸 物 質 量	T_1 sec	T_2 sec	T_3 sec	\bar{T} sec	\bar{T}^2 sec^2	彈之 簧質 參量 與(g)	彈質 簧量 原(g)	C	\bar{C}
	0	不掛	0	0.360	0.370	0.360	0.363	0.131	7.9	19.10	0.41	0.33
	0	2.3	2.3	0.380	0.380	0.390	0.383	0.147	6.4		0.34	
	4	2.3	6.3	0.450	0.460	0.460	0.457	0.212	6.2		0.33	
	6	2.3	8.3	0.490	0.485	0.485	0.487	0.240	5.9		0.31	
	8	2.3	10.3	0.520	0.530	0.510	0.520	0.270	6.0		0.32	
	10	2.3	12.3	0.560	0.570	0.550	0.560	0.314	6.3		0.33	

彈 簧 II	砝 碼 質 量 (g)	秤盤 質 量 (g)	週 期 懸 物 質 量	T_1 sec	T_2 sec	T_3 sec	\bar{T} sec	\bar{T}^2 sec^2	彈之 簧質 參量 與(g)	彈質 簧量 原(g)	C	\bar{C}
	0	不掛	0	0.570	0.570	0.570	0.570	0.325	2.36	5.90	0.40	0.33
	0	2.3	2.3	0.775	0.775	0.775	0.775	0.600	2.06		0.35	
	1	2.3	3.3	0.860	0.855	0.860	0.858	0.736	2.04		0.35	
	2	2.3	4.3	0.920	0.930	0.920	0.923	0.852	1.88		0.32	
	3	2.3	5.3	1.000	0.995	1.000	0.925	0.996	1.93		0.33	
	4	2.3	6.3	1.060	1.065	1.065	1.063	1.130	1.9		0.32	

(彈簧 I II 之外插圖，請參考彈簧 III)

彈 簧 III	砝 碼 質 量	秤 盤 質 量	週 期 懸 物 質 量	T_1	T_2	T_3	\bar{T}	\bar{T}^2	彈之 簧質 量參 與	彈 簧原 質 量	C	\bar{C}
0	不掛	0	0.815	0.825	0.820	0.820	0.672	3.32		0.40	→捨去	
0	2.3	2.3	0.990	0.985	0.980	0.985	0.970	2.83		0.34		
1	2.3	3.3	1.125	1.125	1.120	1.123	1.261	2.84	8.35	0.34		0.33
2	2.3	4.3	1.205	1.200	1.210	1.500	1.440	2.72		0.33		
3	2.3	5.3	1.280	1.290	1.280	1.283	1.646	2.72		0.33		
4	2.3	6.3	1.350	1.355	1.355	1.353	1.831	2.63		0.32		

由上列數據求得

$C = 0.33$ 所以週期

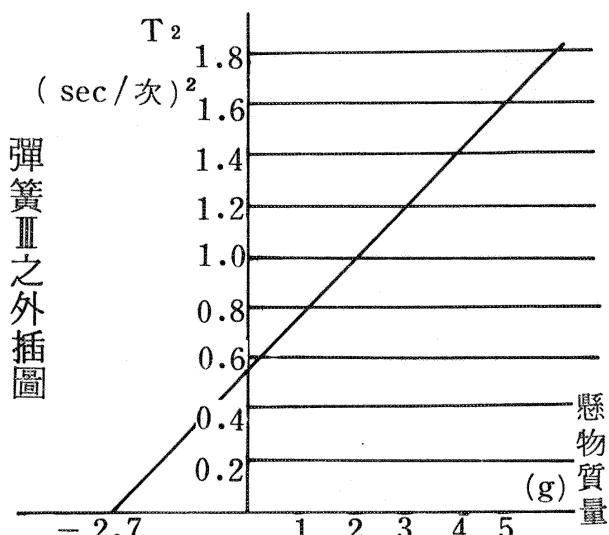
修正式爲

$$T = 2\pi\sqrt{(m+0.33M)/K}$$

(三)以上式計算彈簧 IV V

之週期並與實測週期

相比較



彈 簧 IV	物 重	秤 盤 重	懸物 質 量	彈 簧 重	等效 質 量	實測 週 期	$T = 2\pi\sqrt{\frac{\text{等效質量}}{\text{力常數}}}$	百分 誤 差	$T = 2\pi\sqrt{\frac{\text{懸物質量}}{\text{力常數}}}$	百分 誤 差
	m_1	m_2	$m = m_1 + m_2$	m_3	$m + m_2 + 0.33$	(sec)	(sec)	(%)	(sec)	(%)
4.00	2.30	6.30	21.14	13.3	0.510	0.499	2.16%	0.343	32.7%	
6.00	2.30	8.30	21.14	15.3	0.530	0.520	1.92%	0.390	26.4%	
8.00	2.30	10.30	21.14	17.3	0.560	0.560	0%	0.439	21.6%	
10.00	2.30	12.30	21.14	19.3	0.600	0.590	1.69%	0.479	19.8%	

彈	砝碼重 (gw)	5	6	7	8	9	10	
簧	伸長量 (cm)	2.34	2.82	3.23	3.70	4.20	4.65	
IV	K 值	2107 dyne / cm						

彈 簧 V	物 重 m_1	秤 盤 重 m_2	懸物 質量 $m = m_1 + m_2$	彈 簧 重 m_3	等效 質量 $\frac{m_1 + m_2 + 0.33}{m_3}$	實測 週期 (sec)	$T = 2\pi \sqrt{\frac{\text{等效質量}}{\text{力常數}}}$ (sec)	百分 誤差 (%)	$T = 2\pi \sqrt{\frac{\text{懸物質量}}{\text{力常數}}}$ (sec)	百分 誤差 (%)
	1.00	2.30	3.30	4.70	4.85	0.723	0.718	6.7%	0.592	18.1%
	2.00	2.30	4.30	4.70	5.85	0.792	0.789	0.4%	0.676	14.6%
	3.00	2.30	5.30	4.70	6.85	0.852	0.854	0.23%	0.751	11.9%
	4.00	2.30	6.30	4.70	7.85	0.910	0.914	0.43%	0.819	10.0%

彈	砝碼重 (gw)	1	2	3	4	5	6	
簧	伸長量 (cm)	2.65	5.30	7.95	10.60	13.20	15.80	
IV	K 值	370.8 dyne / cm						

六、討 論

(一) 實驗用的彈簧非常重要，如果振動週期太小則容易產生誤差。用粗彈簧作振動，發現其週期太小，若把彈簧的半徑加大，使其容易伸長，其振動就變慢了；又彈簧愈長，重量愈大，其振動也會變慢，綜合上述二點，彈簧係數愈小，重量大，為選用彈簧的二大要件。

(二) 若不用週期修正 $T = 2\pi \sqrt{(m + 0.33M)/K}$ 而用 $T = 2\pi \sqrt{m/K}$ 來測週期，則在有效數字二位時，若誤差在 $5/100$ 以內，則可以忽略不計，則此時彈簧質量與懸在線圈下的量關係為

$$\frac{\sqrt{(m + 0.33M)/K} - \sqrt{m/K}}{\sqrt{m/K}} \leq \frac{5}{100}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(m + 0.33M)/m} - 1 \leq \frac{5}{100}$$

$$\Rightarrow (1 + 0.33M/m)^{\frac{1}{2}} - 1 \leq \frac{5}{100}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2} \times 0.33M/m - 1 \leq \frac{5}{100}$$

$$\Rightarrow M/m \leq 1/3$$

即欲使誤差小於 $5/100$ ，則彈簧質量與懸掛的物體質量之比值要小於 $1/3$ ，則誤差可忽略不計。

(三)由單條彈簧測得之 C 值約為 0.33，則串聯並聯時，彈簧所參與的質量是否仍為全體質量的 0.33 倍呢？以上數據為兩條彈簧串聯，並聯的實驗結果。

1. 並聯

彈簧質量 [I] 4.76 [II] 4.81(g)				彈簧總質量： 9.57 g						
彈簧係數 [I] 363 [II] 363 dyne/cm				整體彈性係數： 726 dyne/cm						
砝碼質(g) 量 m_1	秤吸盤管 質(g) 量 m_2	懸質(g) 物量 總 $m =$ $m_1 + m_2$	週期 (sec)			\bar{T} (sec)	彈之 簧質 參量 與(g)	彈質 簧量 總(g)	C	\bar{C}
			T_1	T_2	T_3					
4	0.69	4.69	0.655	0.655	0.655	0.655	3.21	9.57	0.34	0.33
5		5.69	0.695	0.695	0.700	0.695	3.20		0.33	
6		6.69	0.725	0.730	0.730	0.730	3.12		0.33	
7		7.69	0.760	0.760	0.760	0.760	2.94		0.31	

彈簧質量 [III] 6.36 [IV] 6.42(g)				彈簧總質量 12.78 (g)						
彈性係數 [III] 272 [IV] 272 dyne/cm				整體彈簧係數 544 dyne/cm						
砝碼質(g) 量 m_1	秤管盤質 量 m_2	懸質(g) 物量 總 $m =$ $m_1 + m_2$	週期 (sec)			\bar{T} (sec)	彈之 簧質 參量 與(g)	彈質 簧量 總(g)	C	\bar{C}
			T_1	T_2	T_3					
3	0.69	3.69	0.770	0.765	0.775	0.77	4.49	12.78	0.35	0.34
4		4.69	0.810	0.805	0.805	0.818	4.54		0.35	
5		5.69	0.850	0.850	0.850	0.850	4.28		0.33	
7		7.69	0.920	0.925	0.920	0.922	4.03		0.32	

c 組	彈簧質量〔I〕4.76〔IV〕6.42 (g)					彈簧總質量： 11.18 (g)				
	彈簧係數〔I〕363 〔IV〕272 dyne/em					整體彈性係數：635 dyne/cm				
砝碼質(g) 量 m_1	秤管盤質 +量(g) 吸 m_2	懸質(g) 物量 總 $m =$ $m_1 + m_2$	週期 (sec)			\bar{T} (sec)	彈之 簧質 參量 與(g)	彈質 簧量 總(g)	C	\bar{C}
			T_1	T_2	T_3					
5	0.69	5.69	0.775	0.775	0.775	0.775	3.95	11.18	0.35	0.34
6		6.69	0.805	0.810	0.815	0.810	3.87		0.35	
7		7.69	0.840	0.840	0.840	0.840	3.67		0.33	
8		8.69	0.870	0.875	0.870	0.872	3.55		0.32	

2. 串聯：

a 組	彈簧質量〔I〕4.76〔II〕4.81 (g)					彈簧總質量： 9.57 (g)				
	彈簧係數〔I〕363 〔II〕363 dyne/cm					整體彈性係數：181.5 dyne / cm				
砝碼質(g) 量 m_1	秤盤質(g) 量 m_2	懸質(g) 物量 總 $m =$ $m_1 + m_2$	週期 (sec)			\bar{T} (sec)	彈之 簧質 參量 與(g)	彈質 簧量 總(g)	C	\bar{C}
			T_1	T_2	T_3					
1	0.54	1.54	1.030	1.030	1.030	1.030	3.34	9.57	0.35	0.33
2		2.54	1.125	1.120	1.125	1.122	3.25		0.34	
3		3.54	1.200	1.200	1.200	1.200	3.08		0.32	
4		4.54	1.280	1.280	1.280	1.280	3.00		0.31	

b 組	彈簧質量〔III〕6.36〔IV〕6.42 (g)					彈簧總質量： 12.78 (g)				
	彈性係數〔III〕272 〔IV〕272 dyne/cm					整體彈性係數：136 dyne/cm				
砝碼質(g) 量 m_1	秤盤質(g) 量 m_2	懸質(g) 物量 總 $m =$ $m_1 + m_2$	週期 (sec)			\bar{T} (sec)	彈之 簧質 參量 與(g)	彈質 簧量 總(g)	C	\bar{C}
			T_1	T_2	T_3					
1	0.54	1.54	1.330	1.335	1.330	1.332	4.57	12.78	0.36	0.34
2		2.54	1.425	1.430	1.420	1.425	4.46		0.35	
3		3.54	1.515	1.520	1.515	1.517	4.39		0.34	
4		4.54	1.585	1.585	1.585	1.585	4.12		0.32	

c 組	彈簧質量 [I] 4.76 [IV] 6.42 (g)					彈簧總質量 11.18 (g)				
	彈性係數 [I] 363 [IV] 272 dyne/cm					整體彈性係數 155.48 dyne/cm				
砝質 碼量 (g) m_1	秤質 盤量 (g) m_2	懸質 物量 總 $m =$ $m_1 + m_2$	週期 (sec)			\bar{T} (sec)	彈之 簧質 參量 與(g)	彈質 簧量 總(g)	C	\bar{C}
			T_1	T_2	T_3					
1	0.54	1.54	1.190	1.190	1.190	1.190	4.04	11.18	0.36	
2		2.54	1.280	1.285	1.280	1.280	3.92		0.35	
3		3.54	1.355	1.360	1.360	1.358	3.73		0.33	
4		4.54	1.445	1.445	1.445	1.445	3.69		0.33	

(四)串聯、並聯之討論

- (1)由串聯並聯實驗所做出之數據和單一彈簧一樣都是接近 0.33，只是串聯及並聯時的數值較大。
- (2)吾等曾用彈性係數相差很大的彈簧作串聯與並聯，但是由實驗中可清楚地看出，幾乎都是由伸長量大的彈簧 I 帶著另一彈簧 II 作運動；即伸長量小的彈簧 II 所作之輕微運動不足以和另一彈簧 I 互相影響。所以彈簧 II 幾乎可看成一般物體；如在串聯時，彈簧 II 掛下方比掛上方的週期為大；並聯時，彈簧不能均勻振盪（因為伸長量很難相同）故欲準確地測出串聯並聯彈簧參與之質量，最好選用性質相近的彈簧。
- (3)由全部的數據發現，彈簧下所懸的砝碼愈輕所得之 C 值愈大。尤其串聯並聯的數據更加明顯。經討論，可能是由於內摩擦力的作用。由式子 $F = kx$ ，因內摩擦力之作用， F 愈變小，而 k 因之變小。且在式子 $T = 2\pi\sqrt{(m + CM)/k}$ 中，因實際的 k 值會變小，而我們又以原測之 k 值去計算，所以 C 就變大，因此以內摩擦力解釋之。

七、結論

由實驗測得彈簧干涉簡諧的質量約為彈簧質量的 0.33 倍，所以假設 $C = 0.33$ ，預測彈簧 IV V 之振動週期，與實際測得之數據比較，相差不多。所以懸在彈簧線圈下物體之簡諧運動，其週期與質量之

關係修正式可表爲

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + 0.33M}{K}}$$

評 語

作者能從所做的實驗中發掘問題，考慮彈簧本身質量對簡諧運動的影響，有系統的深入研究並取得定量的結論。是一個完美的實驗研究。