數學與智慧盤

國小教師組數學科第二名

新竹縣竹林國民小學　　　　　　　　　作　　者：李家齊、黃國寶

一、研究動機

大概每個人都玩過，至少看過或聽過智慧盤這種遊戲，也許你甚至有過「絞盡腦汁，苦思不得其解」的經驗。這種遊戲是舶來品，據說在十九世紀時，歐洲商店的老闆曾經明令規定，不許店員在上班時玩智慧盤，因為這些店員太沉迷於智慧盤遊戲，而疏忽了他們的工作。由此可見，這種遊戲是很吸引人的。

這種遊戲是十五個數字方塊排列在一個方形盤子裏，這些方塊上分別寫 1 至 15 等整數，除了十五個方塊外，還空下一個方格，這個方格是讓我們移動盤中的方塊之用的。所謂智慧盤遊戲，就是先將盤面上的數字任意放置，然後設法移動這些方塊，使得盤面上的數字變成下面這種標準形式：

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

如果智慧盤上的一個排列 α，可以經由有限次的移動而變成標準形式，則這個排列 α 有解；否則稱之為無解。我們如何判定盤面上的排列是否有解？如果盤面上的排列有解，有沒有一個永遠行得通的方

法來解？

二、研究目的

(一)如何判定盤面上的排列是否有解？

(二)如果盤面上的排列有解，有沒有一個永遠行得通的方法來解？

三、研究過程與結果

首先，我們可以把4階智慧盤看成是一個 4×4 階矩陣，空格的位置表示 4^2，如此，智慧盤盤面上的任何一個排列都表示一個 4×4 階矩陣〔a_{ij}〕，其中 a_{ij} 表示1至 4^2 等 4^2 個整數。另一方面，我們把這種 4×4 階方陣看成是代數學中的一個排列，即：由 $\{1, 2, \cdots\cdots 4^2\}$ 至其本身的一個一對一，映成映射，其定義為 α〔$4(i-1)+j$〕$= a_{ij}$，$1 \leq i$，$j \leq 4$。在這裏我們使用了一件事實，那就是：每一個滿足 $1 \leq m \leq n^2$ 的整數 m 都可以寫成 $n\gamma + s$ 的形式，其中 $0 \leq \gamma \leq n$，$0 \leq s \leq n$，而且這種表示法只有一種。

接下來我們假設有一個智慧盤上的排列 α，其對應的矩陣為〔a_{ij}〕，若 $a_{kl} = 4^2$，即盤面上的空格是在第 K 列第 l 行。先將 a_{kl} 與 $a_{k,l+1}$，$a_{k,l+2}$，$\cdots\cdots a_{k4}$，$a_{k+1,4}$，$\cdots\cdots$，a_{44} 依次對調，則智慧盤面上出現一個新的排列 β，顯然地，

$$\beta = (a_{44}, a_{kl})(a_{34}, a_{kl})\cdots\cdots(a_{k,l+1}, a_{kl})\alpha$$

而且在 β 這個盤面上，空格在第4列第4行。設 β 所對應的矩陣為〔b_{ij}〕。

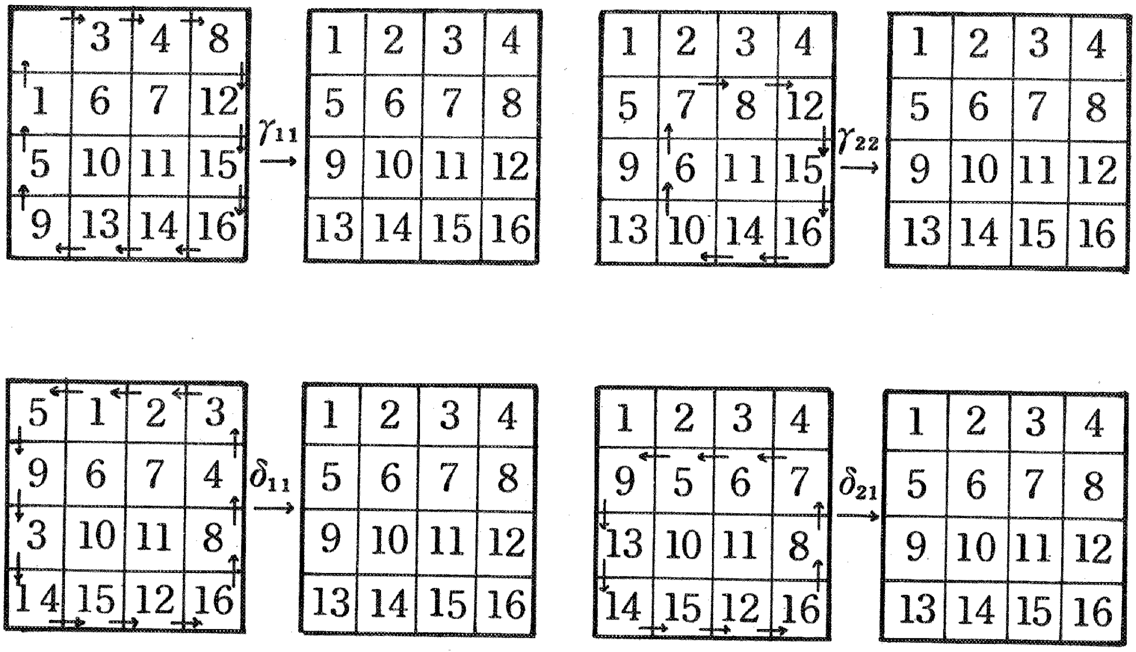
其次，對任意整數 i 與 j，$1 \leq i < 4$，$1 \leq j < 4$，定義兩個排列 γ_{ij} 及 δ_{ij} 如下：γ_{ij} 表示將 b_{44} 與 b_{34}，$\cdots\cdots$，b_{i4}，b_{i3}，$\cdots\cdots$，b_{ij}，$b_{i+1,j}$，$\cdots\cdots$，b_{4j}，$b_{4,j+1}$，$\cdots\cdots$，b_{43}，b_{34} 依次對調。δ_{ij} 表示 b_{44} 與 b_{43}，$\cdots\cdots$，b_{4j}，b_{3j}，$\cdots\cdots$，b_{ij}，$b_{i,j+1}$，$\cdots\cdots$，b_{i4}，$b_{i+1,4}$，$\cdots\cdots$，b_{34}，b_{43} 依次對調，則在盤面排列 $\gamma_{ij}\beta$ 及 $\delta_{ij}\beta$ 中，空格仍在第4列第4行。若盤面排列 $\gamma_{ij}\beta$ 與 $\delta_{ij}\beta$ 所對應的矩陣分別是〔c_{ij}〕與〔d_{ij}〕，則

$$c_{i,j+1} = b_{ij}, \quad c_{ij} = b_{i+1,j},$$

$$d_{i+1,j} = b_{ij} \;,\; d_{ij} = b_{i,j+1} \;;$$

因此，在盤面排列 β 上作 γ_{ij} 排列，其作用在將 b_{ij} 右移或將 $b_{i+1,j}$ 上移；而在盤面 β 上作 δ_{ij} 排列，其作用在將 b_{ij} 下移或將 $b_{i,j+1}$ 左移。

γ_{ij} 與 δ_{ij} 的實際操作是什麼形式呢？γ_{ij} 乃是將第 i 列、第 j 行、第 4 行、第 4 行所圍成之長方形邊上各方塊，依順時針方向移動一格，不過，第 3 列第 4 行之方塊却是移到第 4 列第 3 行的位置。而 δ_{ij} 則情形相似，只是換成逆時針方向而已。如下圖：



現在，我們從盤面 β 出發，逐步地將某些數字方塊移到它應有的位置，我們只使用 γ_{ij} 來做右移與上移，使用 δ_{ij} 來做下移與左移。經過多次的嚐試，我們發現一個可行的步驟：

第一步：設 $b_{ij} = 1$，若 $i \neq 1$，則使用 $i-1$ 次的 γ_{ij} 可將 1 移到第一列第 j 行，再使用 $j-1$ 次的 δ_{11} 可將 1 移到第一列第一行的位置。若 $i = 1$，則使用 $j-1$ 次的 δ_{11} 就可將 1 移到第一列第一行的位置。

第二步：設第一步完成後，數字方塊 2 落在第 i 列第 j 行，若 $j = 1$，則使用 $i-1$ 次的 γ_{21} 可將 2 移到第二列第二行，再使用 γ_{12} 可將 2 移到第一列第二行。若 $j > 1$，則仿第一步可將 2 移到第一列第二行。

第三步：仿第二步的方法，將數字方塊 3 先移到第一列第四行，此時，若數字方塊 4 不在第一列第 3 行的位置，則仿第二步的方法，可將數字方塊 4 移到第二列第 4 行，再利用 δ_{13} 就可將 3 及 4 分別移到它們所應有的位置。但是，若 3 移到第一列第 4 行時，數字方塊 4 在第一列第 3 行，則使用 $\delta_{13}\gamma_{23}\gamma_{13}\delta_{23}\delta_{13}$ 可將 3 及 4 分別移到它們所應有的位置。

至此，我們已經完成了智慧盤遊戲的第一列，仿照前面的第一、二、三步的方法，我們可以完成智慧盤遊戲的第一行；如此繼續下去，可以完成第二列第二行。

現在，我們只剩下智慧盤右下角的四個方格了。這四個方格可以看成一個 2 階的智慧盤，而上面的數字是 11 、12 、15 、16 。

如果這個 2 階的智慧盤有解，這個只有三種情形：

11	12
15	16

(1)

12	15
11	16

(2)

15	11
12	16

(3)

則第(1)種情形已是我們所要的形式；第(2)種情形只要使用一次 γ_{33} 就可變成我們所要的形式；第(3)種情形只要使用一次 δ_{33} 就可變成我們所要的形式。

四、結　論

(一) n 階智慧盤盤面排列有解的充要條件是：

$$(-1)^{k+i}\, sign(\alpha) = sign(\beta) = 1$$

(二)我們先證明 2 階情形，其他情形可轉化成 2 階問題解決。

(三)我們完全用數學（排列）解決了智慧盤問題。

評　語

(一)此作品只作出一部分的情形（ 1 到 15 的完全），一般的情形並未作出來。

(二)結果的表達很清楚。