極近值數列

國小教師組數學科第一名

宜蘭縣順安國民小學　　作　者：李　鐘　榮

一、研究動機

數學上常有難題，係出自於學者對於難度的誤估，像Fermat最後問題、四色問題，起先都是當人們憑直覺就宣稱他們發現了什麼？直到後來有人想眞正證明時，而發現邏輯上困難重重，一旦無法很快解決，這些問題反而輾轉成名，此種現象顯示一個事實，也就是數學上許多問題，常有似易實難者存在。

作者有位研究工程設計的朋友，提出一個問題，他希望能夠不經過逐次試驗，僅憑藉著公式之推演，使分母在限制之區間內，而找出一個最接近已知數的分數；事實上逐次試驗在做法上也的確不切實際。

學過連分數的人，有可能很快聯想到利用漸近分數的理論，最多稍加以推廣，應可很快得到結果。

可是一旦到發現漸近分數所能適用之區間與給定之區間大不相同，而且問題的結果也隨著區間的變化，而幾乎無法統計出一條規律時，就會發現此問題決非想像之容易。

此問題給人感觸良多，作者只有不畏艱難全力以赴。

二、研究概要

本論題之難，在於簡直是無法經由觀察而探出其變化之規律，故而在茫然無軌跡可尋之下，策略上之應用，只有捨去傳統數學的歸納法、統計法，而以「逼近」爲解題之鑰，不過這種「逼近」的概念與分析學上近似值的逼近，或極限上之逼近大不相同，因爲在此一個「逼近」一個之下的逼近值與原值越差越遠，只是其分母不斷趨近所給

定之區間。

當作者不斷經由實驗分析，一直到直覺的意識到可能性之結果，却發現必須使用之數學工具，幾未能找出任何已有的架構可資應用，因爲這種越「逼近」越遠的概念，更近於前所未見，故而只有自己發展一套「逼近」之數學模型，使問題在此一模型系統之下，成爲應用上之一例。

故而，本論文除小部分必需引用已有之結果外，所呈現於文內，絕大部分是涵蓋在作者的創意之下，今將其創作過程概述如下：

㈠引進漸近插入值：

通常漸近分數 $\frac{p_n}{q_n} > \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ 或 $\frac{p_n}{q_n} < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ 必有唯一成立，引進漸近插入值 $\frac{p_n^r}{q_n^r}$，可使 $\frac{p_n^r}{q_n^r}$ 之前 $n-1$ 個分數與前相同，且 $\frac{p_n^r}{q_n^r}$，$\frac{p_n}{q_n}$ 在 $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ 之異側，如此可找出 $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ 任一上、(下)方之漸近值。

㈡擴充漸近分數之定義，並發展漸近格點：

一般簡單的漸近分數 $\frac{p_n}{q_n}$，顯然可對應一格點（q_n，p_n）使其斜率相等，但 q_n 却永遠爲正，而（$-q_n$，$-p_n$）與（q_n，p_n）雖有相同之斜率，却無一漸近分數與其對應，故而擴充逆向漸近分數 $\frac{-p_n}{-q_n} = \frac{p_{-n}}{q_{-n}}$，使其與漸近格點可向逆向行駛。

㈢發展逼近格點與逼近線段理論模型：

以前面之基礎設法找出一線上、下方最靠近之格點，使其逼近線段與已知線之間無格點，這個逼近格點之特徵在於逼近格點全在已知線之同側。

㈣證明逼近斜率單調性：

由前面發展出來的各逼近格點，逼近線段之諸斜率有單調遞增或遞減之特徵，給予嚴密的邏輯分析。

㈤建立極近值理論：

由前面建立的模型系統發展至此，極近值的理論順應而生，問題在極近值定理完成後乃告解決。

㈥設計極近值電腦程式：

利用極近值之理論，設計完整之電腦程式，可以迅速求解，並加以證驗。

第一節　漸近插入值

本節之首要在引進漸近插入值$\frac{p_n^r}{q_n^r}$，其與$\frac{p_n}{q_n}$之前 $n-1$ 個漸近分數相同，且與$\frac{p_n}{q_n}$在$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$之異側。

定義10，漸近插入值

設$\frac{p_n}{q_n}$為$\phi=[a_0, a_1, \cdots\cdots a_n]$之第 n 個漸近分數，$0<n<N$，$0\leq r<a_n=[\frac{q_{n+1}}{q_n}]$，$r$ 為整數，$p_n^r=rp_n+p_{n-1}$，$q_n^r=rq_n+p_{n-1}$，則$\frac{p_n^r}{q_n^r}$謂之 ϕ 之第 n 個漸近分數的第 r 個插入值，簡稱 ϕ 之第(n, r)個漸近插入值。

第二節　格點與斜率

討論一直線上以及其上、下方最接近格點之週期性而與斜率之相關性。

定理74：設$(q, p)=1$，ℓ：$y=\frac{p}{q}x+c$ 為一過格點線，則①ℓ 上方，下方最近格點之距離各歷經 $\frac{1}{|q|}, \frac{2}{|q|}\cdots\cdots\frac{|q|-1}{|q|}$，1而無其他，②若P，Q$\in\ell$，且P，Q之x距離$=q\neq0$，則 $\overline{PQ}$ 除P外其上方下方最近格點之距離各歷經 $\frac{1}{|q|}, \frac{2}{|q|}\cdots\cdots\frac{|q|-1}{|q|}$，

1 而無相同者。

第三節　漸近格點

試圖將漸近分數幾何化，擴充漸近分數之意義，建立漸近格點以及漸近線段。

定義 90 漸近格點：設 ℓ ： $y=\Phi x+c$ 過格點 $L(e,f)$，且 $\dfrac{p_n}{q_n}$ 爲 Φ 之第 n 個漸近分數，則 $A_n=(e+q_n, f+p_n)$ 謂之 ℓ 以 L 爲基點的第 n 個漸近格點，特別地，當 $L=(0,0)$ 時，$A_n=(q_n, p_n)$ 簡稱爲 ℓ 之第 n 個漸近格點，又當 $q_n<0$ 則謂之 A_n 爲 ℓ 之第 n 個逆向漸近格點，$q_n>0$，A_n 爲 ℓ 之第 n 個正向漸近格點。

定理 125：A_n, A_{n-1} 爲 ℓ ： $y=\Phi x+c$ 以 $L(e,f)$ 爲基點的第 $n-1$，n 個漸近格點，且 $\left[\dfrac{q_n}{q_{n-1}}\right]=k$，則 $\overleftrightarrow{LA_{n-1}}$，$\overleftrightarrow{LA_n}$ 在 $[e, e+(k+1)q_{n-1}]$ 之間無格點。

第四節　逼近格點

以先前之基礎，求其任一線上、下方最接近之格點，並建立逼近格點線段之模型，以爲後段引用之依據。

定義 130：逼近格點（正向）

設 $L(e,f)$ 爲 ℓ ： $y=\Phi x+c$ 上之一格點，$\Phi=[a_0, a_1 \cdots a_n]$， $k=\left[\dfrac{b}{q_N}\right]$，$0\le n\le N$（若 $N=\infty$，$\left[\dfrac{b}{q_N}\right]=0$），$L_0=(e+kq_N, f+kp_N)=(e_0, f_0)$，$A_n$ 爲 ℓ 以 $L_0(e_0, f_0)$ 爲基點的第 n 個正向漸近格點，且 $q_n\le b-e_0=b'<q_{n+1}\le q_N$，$L_1$ 之定義如下：

1. $L_1=\left[\dfrac{b'}{q_n}\right]A_n+L_0$（當 A_n 在 ℓ 上方）

2. $L_1=\left[\dfrac{b'-q_{n+1}}{q_n}\right]A_n+A_{n+1}$（當 A_n 在 ℓ 下方）

則 L_0，L_1 謂之 ℓ 在〔e，e+b〕上方第 0，1 個正向逼近格點，$\overline{L_0L_1}$ 謂之 ℓ 在〔e，e+b〕上方第 1 個正向逼近線段若將上式「上方」，「下方」易位，則 L_1，$\overline{L_0L_1}$，各謂之 ℓ 在〔e，e+b〕下方之第 1 個正向逼近格點，線段。在無意義上之混淆時，「正向」一詞可略。

定理 170：逼近線段之斜率

設 L_i（e_i，f_i）為 ℓ：$y=\Phi x+c$ 在〔e，e+b〕上方第 i 個正向逼近格點，$\Phi=[a_0 \cdots\cdots a_n \cdots\cdots a_N]$，$q_n \leq b-e_{i-1}=b'<q_{n+1} \leq q_N$，$t=[\frac{b'}{q_n}]$，$r=[\frac{b'-q_{n-1}}{q_n}]$，$A_n$ 為 ℓ_i 以 L_i（e_i，f_i）為基點的第 n 個正向漸近格點，則 $\overleftrightarrow{L_{i+1}L_i}$ 之斜率 S_i 為

（令 $\ell_i=\overleftrightarrow{L_{i-1}L_i}$）

$[a_0 \cdots\cdots a_{n-1}, a_n]$ 或 $[a_0 \cdots\cdots a_{n-1}, a_n, r]$ 或 $[a_0 \cdots\cdots a_{n-1}]$ 三者之一，亦即 Φ 之前 n－1 個漸近分數恰為 S_i 之前 n－1 個漸近分數。

又若 A_n 與 L_{i+1} 在 ℓ_i 之異側，則 $L_{i+1}=L_i+rA_n+A_{n-1}$

A_n 與 L_{i+1} 在 ℓ_i 之同側，則 $L_{i+1}=L_i+tA_n$

逆向類推

第五節　逼近斜率

探討逼近線段與逼近格點之斜率，並證明其數列之單調性。

定理 250：逼近格點之斜率的單調性。

設 ℓ：$y=\phi x$ 為過原點 0（0,0）之直線，L_0，$L_1 \cdots\cdots L_{\beta'}$ 為 ℓ 在〔0，b〕上方正向之逼近格點，若 $L_i=(e_i, f_i) \neq (0, f_i)$

則 $S(L_i)=L_i$ 之斜率 $=\frac{f_i}{e_i}$，$S_i=\overline{L_{i-1}L_i}$ 之斜率，則

$S(L_1) \leq S(L_2)<S(L_3)<\cdots\cdots<S(L_j)<S_j$，$2 \leq j \leq \beta'$

上述「上方」易為「下方」，則大小方向相反。

定理 230：L_{-0} 之位置。

設 $L_{-\alpha}$，$L_{-(\alpha-1)} \cdots\cdots L_{-0}$，$L_g$，$L_{g+1} \cdots\cdots L_\beta$ 為 ℓ：$y=\phi x+c$ 在〔a，b〕上(下)方之正向逼近格點，$\phi=[a_0, \cdots\cdots a_N]$，則 L_{-0}

爲 $\overline{L_{g-1}L_g}$ 上之一格點，且 $L_{-0} \neq L_{g-1}$，若 $q_n \leq b-e_{g-1} < q_{n+1}$，$A_n$ 爲 ℓ_{g-1} 以 L_{g-1} 爲基點之第 n 個漸近格點，則

1. 若 L_g，A_n 在 ℓ 之異側，則 $L_{-0}=L_g$

2. 若 L_g，A_n 在 ℓ 之同側，$\left[\dfrac{e_g-e_{g-1}}{q_n}\right]=t$，$\overline{L_{g-1}L_g}$ 上之格點依次爲 $L_{g-1}=L'_0$，L'_1，L'_2 …… $L'_t=L_g$，使令 $L'_j=(e'_j, f'_j)$，$\ell'_{i-1} < a < l'_j$ 則 $L_{-0}=L'_j=L_g-\left[\dfrac{e_g-a}{q_n}\right]A_n$

定理 240：逼近線段之斜率的單調性

設 L_0，L_1 …… L_β 爲 l：$y=\phi x+c$ 在〔e，b〕之上方正向逼近格點，$l_i=\overleftrightarrow{L_{i-1}L_i}$，$i \geq 1$，$S_i$ 爲 l_i 之斜率，則 $S_i \leq S_{i+1}$，$S_i < S_{i+2}$ 此即數列：S_1，S_2 …… S_β 單調遞增。

第六節　極近值與極近值數列

以逼近斜率爲基礎，求出任一數上方分母在定區間內，最接近之有理數，此爲本文之宗旨，並進而建立極近值數列，爲日後的研究預留伏筆。

定義 260：定區間內之極近值

設 $\dfrac{f}{e}$ 爲分母在〔a，b〕中之一分數，若對任意 $q \in$〔a，b〕有

1. $0 < \dfrac{f}{e}-\phi \leq \dfrac{p}{q}-\phi$，則 $\dfrac{f}{e}$ 謂之 ϕ 在〔a，b〕上方之極近值。

2. $0 < \phi-\dfrac{f}{e} \leq \phi-\dfrac{p}{q}$，則 $\dfrac{f}{e}$ 謂之 ϕ 在〔a，b〕下方之極近值。

3. $0 < \left|\dfrac{f}{e}-\phi\right| \leq \left|\dfrac{p}{q}-\phi\right|$ 則 $\dfrac{f}{e}$ 謂之 ϕ 在〔a，b〕之極近值。

以上 e，f，q，p 皆爲整數，e，q，$\phi \neq 0$

定理 270：極近值定理（I）

設 l：$y=\phi x$，$0 < a < b$，$\phi=[a_0, a_1 \cdots\cdots a_N]$，$kq_N \in$〔$a$，$b$〕，$k$ 爲整數，$L_{-\alpha}$，$L_{-(\alpha-1)}$，…… L_{-0}，L_g …… L_β 爲 l 在〔a

，b〕上方之逼近格點，則 L_{-0} 之斜率＝$S(L_{-0})$ 爲 ϕ 在〔a,b〕上方之極近值。

又「上方」易爲「下方」結果亦同。

例 280：求 $\frac{503}{683}$ 在〔401，412〕上方之極近值

解：設 l：$y=\frac{503}{683}x$，先求 $\frac{503}{683}$ 之漸近分數，得 $\frac{0}{1}$，$\frac{1}{1}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{11}{15}$，$\frac{47}{64}$，$\frac{152}{207}$，$\frac{503}{685}$。

依次作出 l 在〔0，412〕上方之逼近格點，得 $L_0=(0,0)$

$$L_1=(0,0)+\left[\frac{412-64}{207}\right]\cdot(207,152)+(64,47)=$$

$(271,199)$（$\frac{152}{207}$ 在 $\frac{503}{685}$ 之下方，$L_1=L_0+\left[\frac{b'-q_{n-1}}{q_n}\right]\cdot A_n+A_{n-1}$）

$$L_2=L_1+\left[\frac{412-399}{64}\right]\cdot(64,47)=(271,199)+2\cdot(64,47)=(399,293)$$

（$\frac{47}{64}$ 在 $\frac{503}{685}$ 之上方，$L_2=L_1+\left[\frac{b'}{q_n}\right]A_n$）

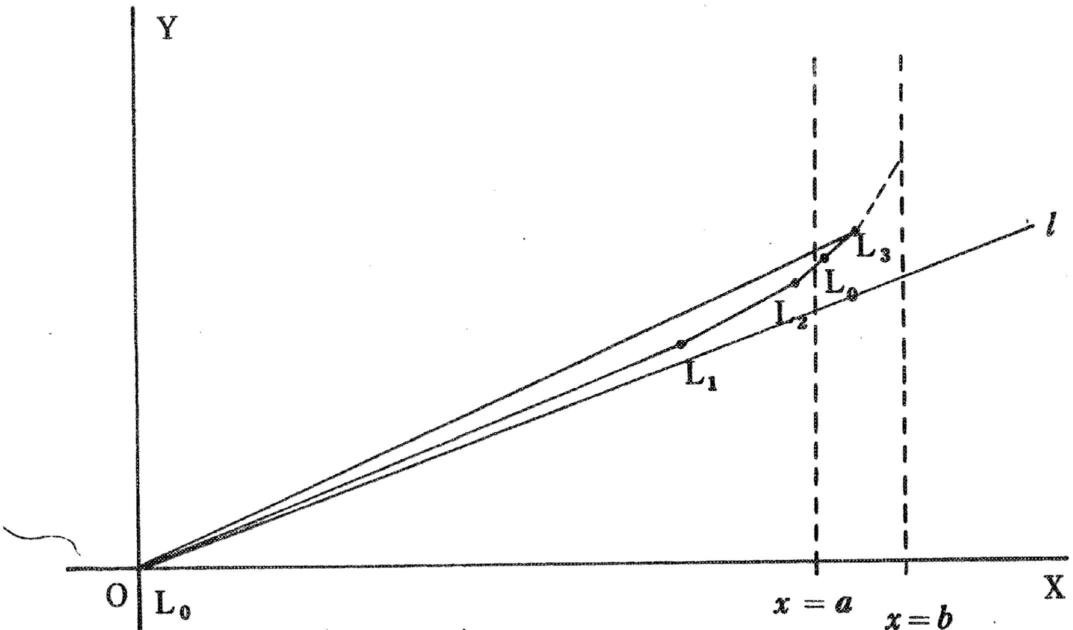
$$L_3=(399,293)+\left[\frac{412-399}{4}\right]\cdot(4,3)=(411,302)$$

因 $411\in$〔401，412〕，故 $L_3=L_g$，L_4 以後不必再求。

$$L_{-0}=(411,302)-\left[\frac{411-401}{4}\right]\cdot(4,3)=(403,296)$$

（A_n，L_g 在 l 之同側，$L_j=L_{-0}=L_g+\left[\frac{e_g-a}{q_n}\right]\cdot A_n$）

故 $S(L_{-0})=\frac{296}{403}$ 爲 $\frac{583}{685}$ 在〔401，412〕上方之極近值。



（圖 280 ）

定理 320：極近值定理（ II ）

設 l：$y=\phi x$，$\phi=[a_0, a_1 \cdots\cdots a_N]$，$0<a<b$，$[\frac{b}{q_N}]+1$

$=t$，$\frac{p_N}{q_N}$，$\frac{p'_N}{q'_N}$ 之定義如定理 280，$A=(tq_N+q_{N-1}, tp_N+p_{N-1})$，

$A'=(tq_N+q'_N, tp_N+q'_N)$，A，A′ 之斜率各為 S(A)，S(A′)，則

1. 若 $\frac{p_{N-1}}{q_{N-1}}>\frac{p_N}{q_N}=\phi$，則 S(A) 在〔 a，b 〕上方之極近值恰為 ϕ 在〔 a，b 〕上方之極近值，S(A′) 在〔 a，b 〕下方之極近值亦為 ϕ 在〔 a，b 〕下方之極近值。

2. 若 $\frac{p_{N-1}}{q_{N-1}}<\frac{p_N}{q_N}=\phi$，則 S(A′) 在〔 a，b 〕上方之極近值亦為 ϕ 在〔 a，b 〕上方之極近值，S(A) 在〔 a，b 〕下方之極近值亦為 ϕ 在〔 a，b 〕下方之極近值。

3. S(A)，S(A′) 之前 N－1 個漸近分數與 ϕ 相同。

定理 370：極近值數列

設$\frac{f_1}{e_1}$為$\phi=\frac{f_0}{e_0}\neq 0$在〔$a,b$〕上(下)方之極近值，$\frac{f_i}{e_i}$為$\frac{f_{i-1}}{e_{i-1}}$在〔$a,b$〕上(下)方之極近值，($i\geq 1$)，則$\frac{f_i}{e_i}$謂之$\phi$在〔$a,b$〕上(下)方之第$i$個極近值，數列$\frac{f_1}{e_1},\frac{f_2}{e_2},\frac{f_3}{e_3}$……謂之$\phi$在〔$a,b$〕上(下)方之極近數列。

評　語

1. 取題極佳。
2. 研究工作非常完整。
3. 解題的恒心和能力都極強。
4. 能用非常有限的知識研究並非顯然的問題。
5. 觀點和研究領域有待擴展。