

螺線管線圈磁場

國小教師組物理科第三名

台北縣汐止國民小學

作者：柳善智、謝興霖、蘇美賢

一、研究動機

世上充滿了許多神秘有趣的事物，電線導通後產生磁力，便是一不可思議力量，且極具開發價值，以下便是就單線圈到螺管線圈內的磁通密度分佈，做循序的探究與分析，並以具體的例子做進一步的瞭解。

二、研究目的

藉著學理的研究到實驗的現象分析俾能對磁有徹底了解，並能在生活上或教學上應用。

三、研究設備器材

(一)個人電腦 (二)變壓器 (三)橋式整流 (四)漆包線 (五)鐵粉。

四、研究過程

(一)單線圈：

1 單線圈內的磁通密度分佈；

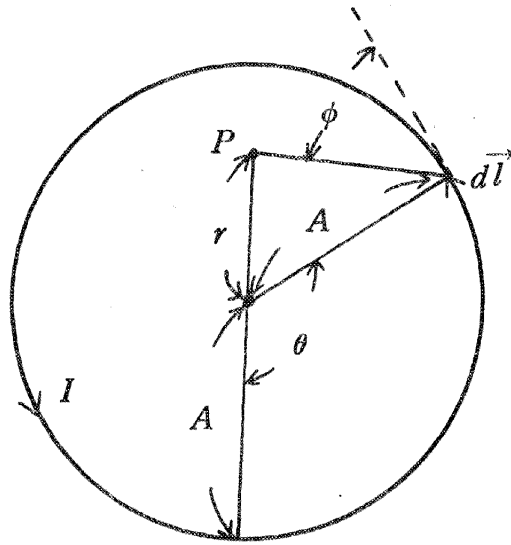
線圈內的任一點 P 受到 $d\ell$ 影響的一小量。

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{L}}{L^3} \quad (\text{Biot-Savart Law})$$

符號說明：

B：磁通密度 I：電流 μ_0 ：導磁係數

L：P 點與 $d\vec{\ell}$ 間之距離 A：半徑



$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl L \sin\phi}{L^3}$$

$$L = \sqrt{r^2 + A^2 + 2rA \cos\theta}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left(\sin\theta \cdot \frac{r}{L} \right)$$

$$dl = A d\theta$$

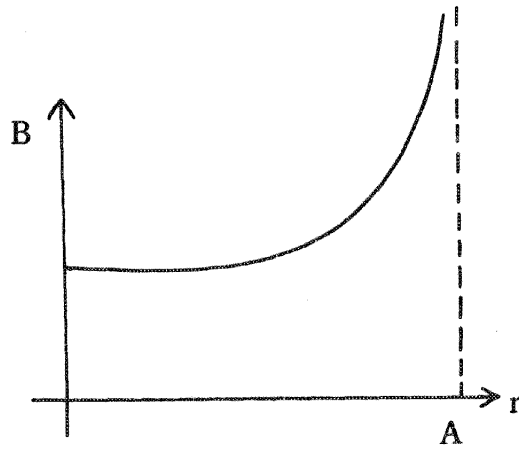
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left(\sin\theta \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 + A^2 + 2rA \cos\theta}} \right) \right]}{r^2 + A^2 + 2rA \cos\theta} d\theta$$

Ad θ

上式積分似乎不易，若給予實際數值再由

$$\text{Trapezoidal Law: } \int_a^b f(\theta) d\theta = \frac{b-a}{2n} [f(\theta_0) + 2f(\theta_1) + 2f(\theta_2) + \dots + 2f(\theta_{n-1}) + f(\theta_n)]$$

交由電腦計算則一點也不難，並可發現 r (P 點與圓心的距離) 與 B 的關係。如下圖：



2. 單線圈上方、下方的磁通密度分佈：

對上、下方空間之任一點 P 在 (x, y, z) 處

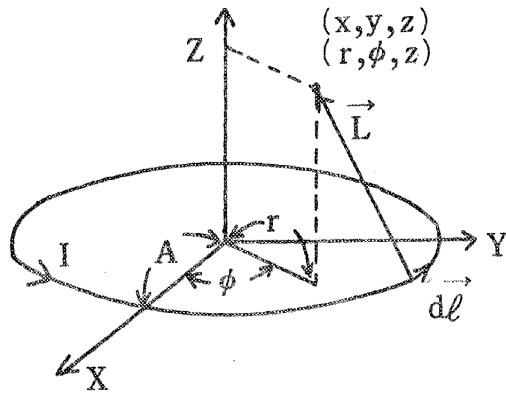
$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \times \vec{L}}{L^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\vec{U}_\phi A d\phi' \times [\vec{U}_x (x - A \cos\phi') + \vec{U}_y (y - A \sin\phi') + \vec{U}_z z]}{[(x - A \cos\phi')^2 + (y - A \sin\phi')^2 + z^2]^{3/2}}\end{aligned}$$

$$\vec{B}_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Az \cos\phi' d\phi' \vec{U}_x}{(x^2 + y^2 + z^2 + A^2 - 2xA \cos\phi' - 2yA \sin\phi')^{3/2}}$$

$$\vec{B}_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Az \sin\phi' d\phi' \vec{U}_y}{(x^2 + y^2 + z^2 + A^2 - 2xA \cos\phi' - 2yA \sin\phi')^{3/2}}$$

$$\vec{B}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{A(-y \sin\phi' + A \sin^2\phi' - x \cos\phi' + A \cos^2\phi') d\phi' \vec{U}_z}{(x^2 + y^2 + z^2 + A^2 - 2xA \cos\phi' - 2yA \sin\phi')^{3/2}}$$

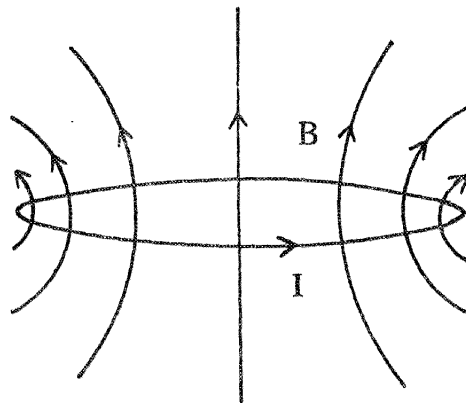
直角座標轉換為圓柱座標



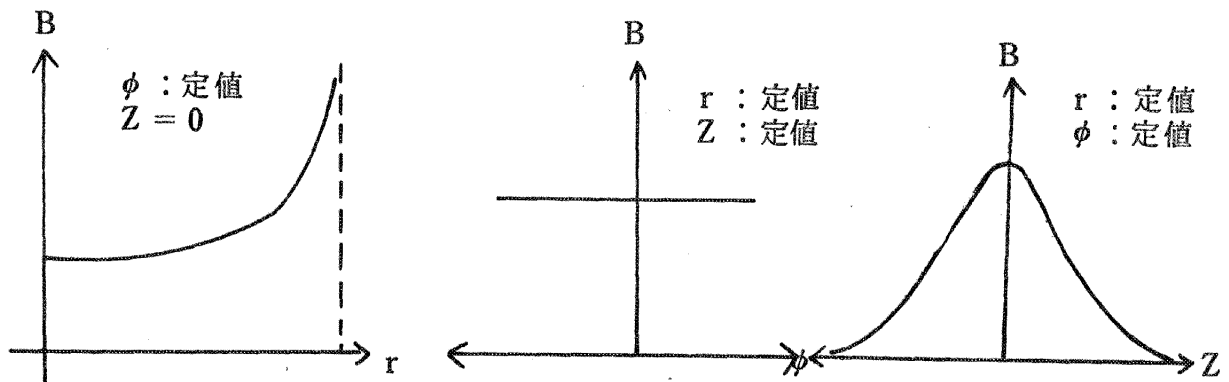
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I A}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\vec{U}_r z \cos(\phi - \phi') + \vec{U}_\phi z \sin(\phi' - \phi) + \vec{U}_z [-r \cos(\phi - \phi') + A]}{[r^2 + z^2 + A^2 - 2Ar \cos(\phi - \phi')]^{3/2}} d\phi'$$

將上式編寫成程式，即可求出空間任意點的磁通密度的大小與方向。

有規律的求出一群取樣點的磁通密度各方向分量的大小值，便可繪出磁通密度在各處的方向，如下圖：



亦可繪出 B 與 r ， B 與 ϕ ， B 與 z 的關係圖：



(二) 螺線圈：

1 螺線管內的磁通密度分佈：

空間一點 P 的磁通密度向量

[符號說明]：

H：螺線管高度 n：線圈匝數 $c = \frac{H}{2\pi \cdot n}$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \times \vec{L}}{L^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi n} \frac{(-A \sin\phi' \vec{U}_x + A \cos\phi' \vec{U}_y + c \vec{U}_z) d\phi' \times}{[(x - A \cos\phi')^2 + (y - A \sin\phi')^2 +} \\ &\quad \frac{[\vec{U}_z (x - A \cos\phi') + \vec{U}_y (y - A \sin\phi') + \vec{U}_z (z - c\phi')] }{(z - c\phi')^2]^{3/2}} \\ \vec{B}_x &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi n} \frac{[A \cos\phi' (z - c\phi') - c(y - A \sin\phi')] }{[x^2 + y^2 + A^2 - 2Ax \cos\phi' - 2Ay \sin\phi' +} \\ &\quad \frac{d\phi' \vec{U}_x}{(z - c\phi')^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\vec{B}_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi n} \frac{[c(x - A \cos \phi') + A \sin \phi' (z - c \phi')] d\phi'}{[x^2 + y^2 + A^2 - 2Ax \cos \phi' - 2Ay \sin \phi' + (z - c \phi')^2]^{3/2}} \vec{U}_y$$

$$\vec{B}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi n} \frac{[-A \sin \phi' (y - A \sin \phi') - A \cos \phi' (x - A \cos \phi')] d\phi'}{[x^2 + y^2 + A^2 - 2Ax \cos \phi' - 2Ay \sin \phi' + (z - c \phi')^2]^{3/2}} \vec{U}_z$$

直角座標轉換為圓柱座標

$$\vec{B}_r = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi n} \frac{A(z - c\phi') \cos(\phi - \phi') + Ac \sin(\phi' - \phi)}{[r^2 + A^2 + (z - c\phi')^2 - 2Ar \cos(\phi - \phi')]^{3/2}} d\phi' \vec{U}_r$$

$$\vec{B}_\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi n} \frac{A(z - c\phi') \sin(\phi' - \phi) + cr - Ac \cos(\phi - \phi')}{[r^2 + A^2 + (z - c\phi')^2 - 2Ar \cos(\phi - \phi')]^{3/2}} d\phi' \vec{U}_\phi$$

$$\vec{B}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi n} \frac{-Ar \cos(\phi - \phi') + A^2}{[r^2 + A^2 + (z - c\phi')^2 - 2Ar \cos(\phi - \phi')]^{3/2}} d\phi' \vec{U}_z$$

編成程式再代入數據，交由計算機求解。磁通密度 ϕ 方向分量將不再一定為零，當線圈的匝數少而疏時， ϕ 方向的分量會出現相當的值而 r 的分量與 z 的分量却會相對的變小。

2 一個接近理想的螺線管

接近理想的螺線管是一個匝數多而密的螺線管，若仍由上面的公式與方法來求解則任何計算機的速度都無法讓人滿意，故將

是一個費時費力又容易產生誤差的笨拙方法。

在此我們將管壁上的電流視為均勻分佈的面電流，其面電流密度為： NI/H

[符號說明] N ：線圈匝數 H ：線圈高度

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0 NI}{4\pi H} \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{\vec{U}_\phi A d\phi' \times \vec{L}}{L^3} dz' \\ &= \frac{\mu_0 NIA}{4\pi H} \int_0^{2\pi} \int_0^H \frac{(-\vec{U}_x \sin\phi' + \vec{U}_y \cos\phi') \times [\vec{U}_x (x - A \cos\phi' + \vec{U}_y (y - A \sin\phi') + \vec{U}_z (z - z'))]}{[(x - A \cos\phi')^2 + (y - A \sin\phi')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dz' d\phi'\end{aligned}$$

$$\vec{B}_x = \frac{\mu_0 ANI}{4\pi H} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi'}{[(x - A \cos\phi')^2 + (y - A \sin\phi')^2 + (z - z')^2]^{1/2}} \Big|_{z=0}^{z=H} d\phi' \vec{U}_x$$

$$\vec{B}_y = \frac{\mu_0 ANI}{4\pi H} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\phi'}{[(x - A \cos\phi')^2 + (y - A \sin\phi')^2 + (z - z')^2]^{1/2}} \Big|_{z=0}^{z=H} d\phi' \vec{U}_y$$

$$\vec{B}_z = \frac{\mu_0 ANI}{4\pi H} \int_0^{2\pi} \frac{-(z - z')[-\cos\phi' (x - A \cos\phi') - \sin\phi' (y - A \sin\phi')]}{[(x - A \cos\phi')^2 + (y - A \sin\phi')^2 + (z - z')^2]^{1/2}} \Big|_{z=0}^{z=H} d\phi' \vec{U}_z$$

展開後再化成圓柱座標

$$\vec{B}_r = \frac{u_0ANI}{4\pi H} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\cos(\phi - \phi')}{[r^2 + A^2 - 2rA \cos(\phi - \phi') + (z-H)^2]^{1/2}} - \frac{\cos(\phi - \phi')}{[r^2 + A^2 - 2rA \cos(\phi - \phi') + z^2]^{1/2}} \right\} d\phi' \vec{U}_r$$

$$\vec{B}_\phi = \frac{u_0ANI}{4\pi H} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\sin(\phi' - \phi)}{[r^2 + A^2 - 2rA \cos(\phi - \phi') + (z-H)^2]^{1/2}} - \frac{\sin(\phi' - \phi)}{[r^2 + A^2 - 2rA \cos(\phi - \phi') + z^2]^{1/2}} \right\} d\phi' \vec{U}_\phi$$

$$\vec{B}_z = \frac{u_0ANI}{4\pi H} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{[A - r \cos(\phi' - \phi)]z}{[r^2 + A^2 - 2Ar \cos(\phi - \phi')][r^2 + A^2 - [A - r \cos(\phi' - \phi)]z]} - \frac{[A - r \cos(\phi' - \phi)]z}{2rA \cos(\phi - \phi') + z^2} \right\} d\phi' \vec{U}_z$$

$$\frac{[A - r \cos(\phi' - \phi)]}{[r^2 + A^2 - 2rA \cos(\phi - \phi')][r^2 + A^2 - 2rA \cos(\phi - \phi') + (z-H)^2]^{1/2}}$$

將以上三式積分用 Trapezoidal Law 編寫成程式並代入數據，設 A = 0.045 公尺（半徑），I = 1.5 安培，N = 200 匝 H = 0.1 公尺

程式如下：

```

1 Ø READ A, I, N, H
2 Ø DATA .Ø45, 1.5, 2ØØ, .1
3 Ø T=3.141592654
4 Ø M=18Ø

```



```

5 0 DG=2 * T / M
6 0 PRINT " =====
      ===== "
7 0 PRINT " POSITION MA
      GNATIC FLUX DENSITY "
8 0 PRINT " -----
      ----- "
9 0 PRINT : PRINT " -----
      -----
      -- "

1 0 0 FOR D=0 TO 6
1 1 0 Z=(D-1) * . 0 2 5
1 2 0 FOR W=0 TO 2
1 3 0 Y=T * W * 2 / 3
1 4 0 FOR S=0 TO 4
1 5 0 R=. 0 1 * S
1 6 0 IF R=0 AND Y > 0 < 0 GOTO 3 8 0
1 7 0 SR=0 : SA=0 : S z = 0
1 8 0 FOR J=0 TO M
1 9 0 X=J * DG
2 0 0 CS=COS ( Y - X ) : SN=SIN ( X - Y )
      : ZH=Z - H
2 1 0 L=R * R + A * A - 2 * A * R * CS
2 2 0 RV=CS / SQR ( L + ZH * ZH ) - CS / S
      QR ( L + Z * Z )
2 3 0 AV=SN / SQR ( L + ZH * ZH ) - SN / S
      QR ( L + Z * Z )
2 4 0 ZAV=Z * ( A - R * CS ) / ( SQR ( L + Z
      * Z ) * L )
2 5 0 ZBV=ZH * ( A - R * CS ) / ( SQR ( L +

```

```

        ZH * ZH ) * L )
26 Ø ZV = ZAV - ZBV
27 Ø IF J = Ø OR J = M GOTO 29 Ø
28 Ø RV = 2 * RV : AV = 2 * AV : ZV = 2 * ZV
29 Ø SR = SR + RV : SA = SA + AV : SZ = SZ
        + ZV
30 Ø NEXT J
31 Ø JAD = A * N * I * T / ( H * M * 1 Ø )
32 Ø RC = JAD * SR : AC = JAD * SA : ZC =
        JAD * SZ
33 Ø PRINT " ( " ; R ; TAB ( 6 ) ; " , " ; I
        NT ( Y * 1 Ø Ø Ø + . 5 ) / 1 Ø Ø Ø ; TAB (
        12 ) ; " , " ; Z ; " ) " ;
34 Ø RC = INT ( RC * 1 Ø Ø + . 5 ) / 1 Ø Ø
35 Ø AC = INT ( AC * 1 Ø Ø + . 5 ) / 1 Ø Ø
36 Ø ZC = INT ( ZC * 1 Ø Ø + . 5 ) / 1 Ø Ø
37 Ø PRINT TAB ( 2 Ø ) ; RC ; TAB ( 28
        ) ; AC ; TAB ( 32 ) ; ZC
38 Ø NEXT S
39 Ø NEXT W : NEXT D
40 Ø PRINT " =====
        ===== "
41 Ø END

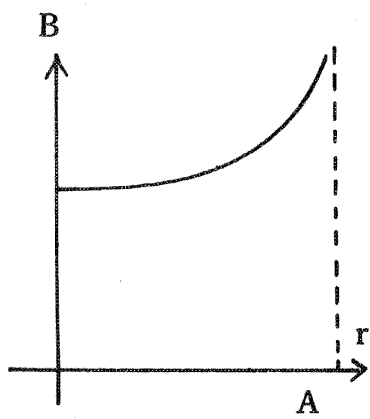
```

以上程式計算了91個取樣點在圓柱座標上各分量的值，並可從計算的結果繪成下列關係圖：

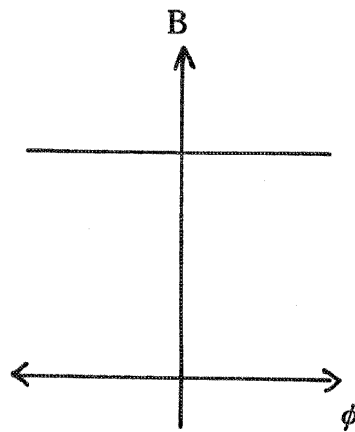
圖一：線圈內部 r 愈大，磁通密度愈大。

圖二： ϕ 角大小與磁通密度無關。

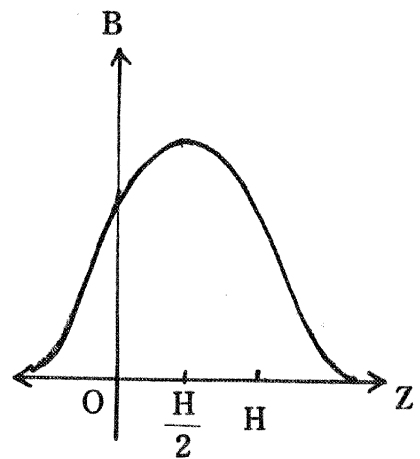
圖三：線圈高度為 H ，在 $H/2$ 處磁通密度最大。



圖一



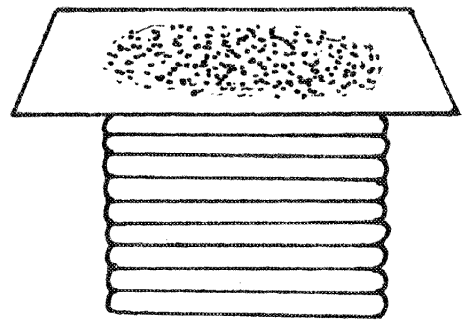
圖二



圖三

五、實 驗

- 步驟：1 鐵粉少許平均散佈在玻璃片上。
 2 將玻璃片置於線圈上方或下方。
 3 線圈導電後輕微顫動玻璃片數下。



結果：1 鐵粉的疏密顯示了該處 B 的大小。

2 鐵粉站立所指的方向為 B 的方向。

六、討 論

以上從學理的推演到取樣點的計算，再由實驗現象觀察，螺線管內部及其上、下方附近的磁通密度分佈情況，得到了統整的概念，尤其實驗操作更可使初學者對磁力線的觀念，由抽象而趨於具體，使學習效果更為顯著。

七、結 論

有時螺線圈在應用時，為計算方便將其內部磁場視為均勻分佈的

理想情況，事實上螺線管並不真正理想，管內各處 B 的大小值及方向各不相同。但 B 的大小值以 $Z = H / 2$ 的平面為中心，上、下對稱；而方向則對 Z 軸對稱。

八、參考資料

(一) University Physics (Sears, Zemansky, Young)

(二) Introductory Engineering Electromagnetics (Branko D. Popovic)

評 語

1. 能分別從理論與實驗來驗證螺線管內的磁場分佈情形，研究態度頗佳。
2. 利用鐵沙在螺線管內排列成的磁力線及磁化的大頭針在豎立的線圈外受力的情況，有助於學生瞭解管內、外磁場的分佈情形。