

量影子算高度

高小組數學科第三名

嘉義縣太興國民小學

作 者：葉俊其、劉曉娟

指導教師：蔡瑞瓊、賴如啟

一、研習動機

七十三年十一月二十四日，國語日報刊登了一篇：「古代人怎樣量金字塔的高度」的文章，內容是：數學之父——臺利斯到埃及去旅遊時發明了不必用任何精密的測量儀器量金字塔高度的正確方法。

我覺得很有趣，就約了幾位同學照着這種方法去量學校的一些建築物，發現了許多問題，我們去請教老師，在老師的指導下，做了下面的研討。

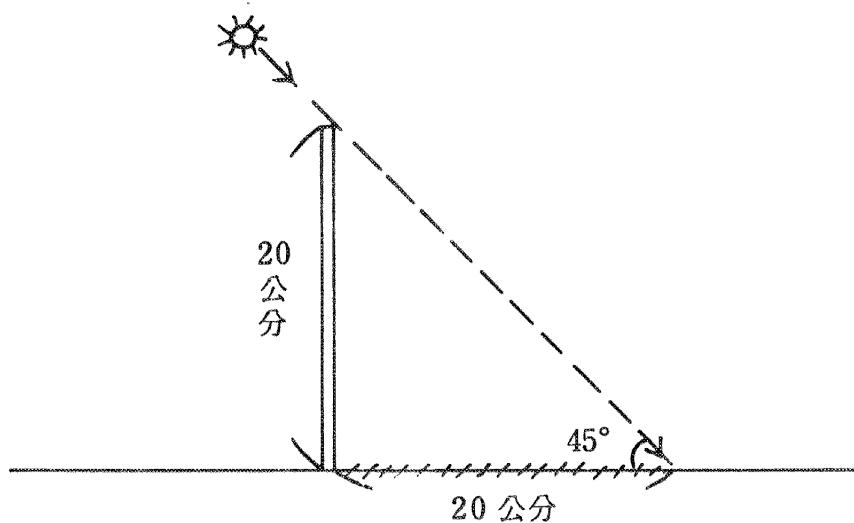
二、研究問題

- (一)怎樣才會使影子的長等於物體的高？
- (二)怎樣量出角柱體的正確高度？
- (三)怎樣量出圓柱體的正確高度？
- (四)怎樣量出圓錐體的正確高度？
- (五)怎樣量出角錐體的正確高度？
- (六)太陽高度角變動時，是不是可以求得物體的正確高度？

三、研習過程

過程(一)：怎樣才會使影子的長等於物體的高？

我們參考了資料①②及實地的觀測後得到下圖：



發現：

- 1 當影子和標竿一樣長時，太陽的高度角恰好成 45° 。
- 2 影子區爲一等腰直角三角形。
3. 利用電燈代替太陽的實驗時，電燈離標竿越遠，得到的效果越接近陽光下的實驗。
4. 往後的實驗，只要保持電燈高度角 45° 就可以使影子的長等於物體的高。

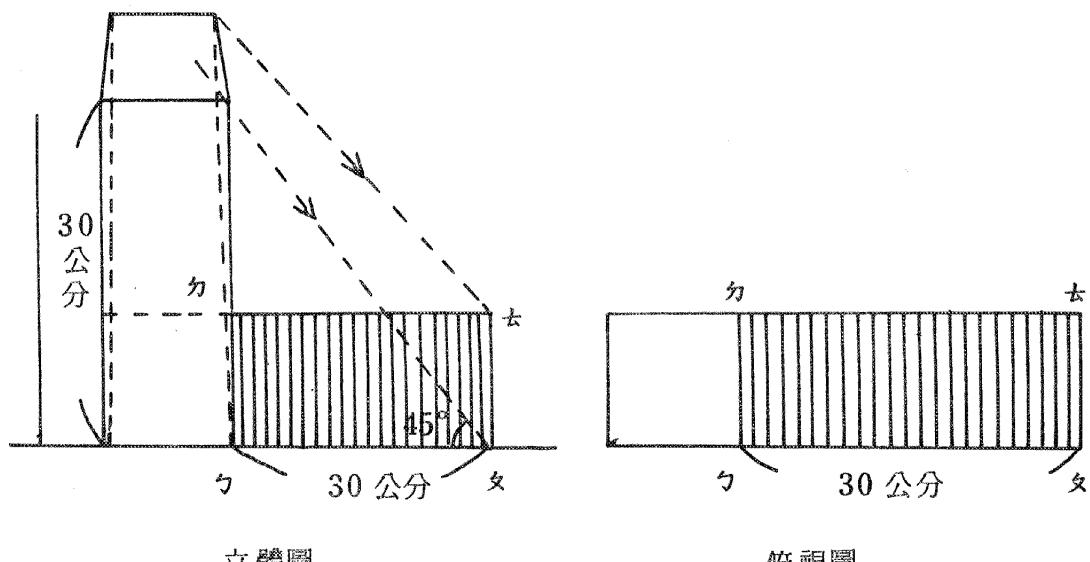
過程(二)：怎樣量出角柱體的正確高度？

我們利用過程一的方法，只是把標竿換成各種角柱體一一的實驗測量後得到下列結果：

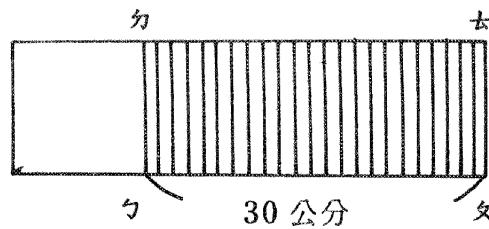
- 1 當光線和角柱體底面的邊 \overline{MN} 成 90° 時

發現：

由角柱體底面的邊 \overline{MN} 順着影子的邊量到影子的頂端（即 \overline{NQ} 或 \overline{PQ} ），就是物體的正確高度。

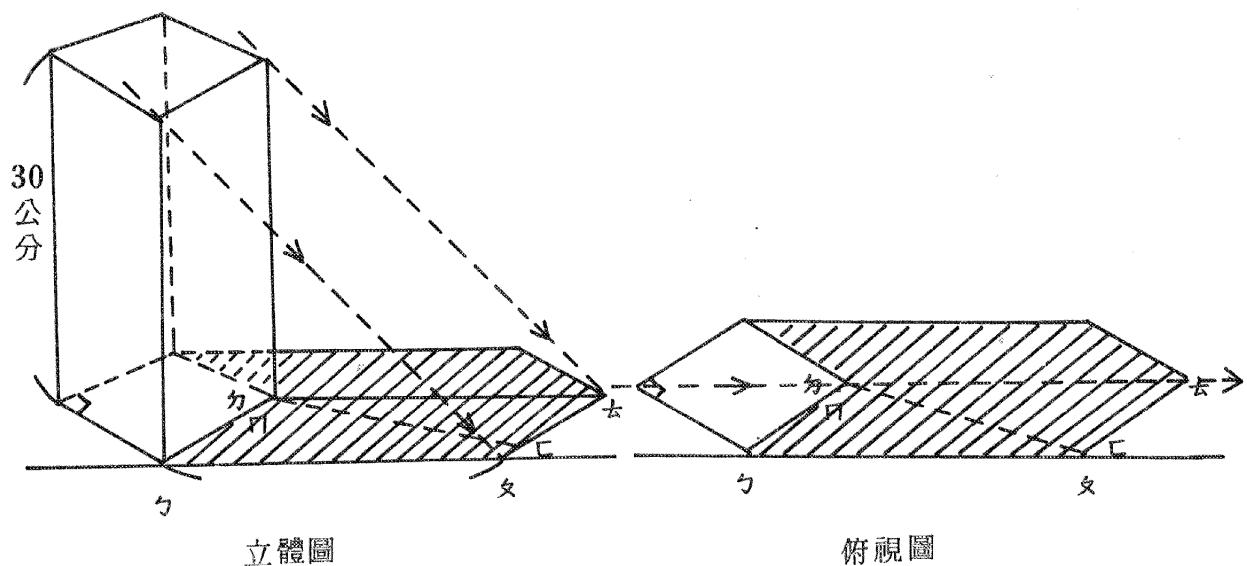


立體圖



俯視圖

2. 當入射光線和角柱體的邊 \overline{BC} 不成 90° 時



立體圖

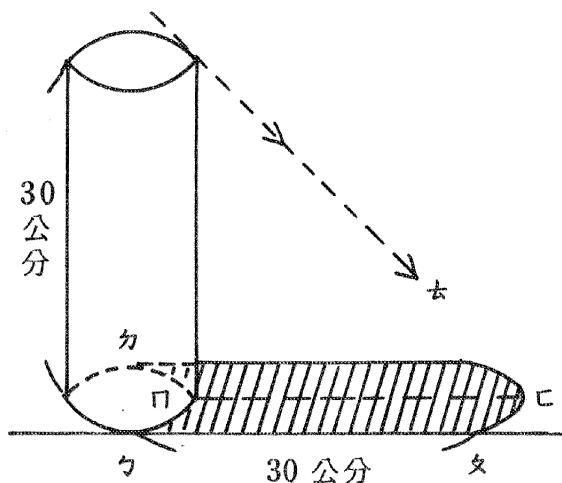
俯視圖

發現：

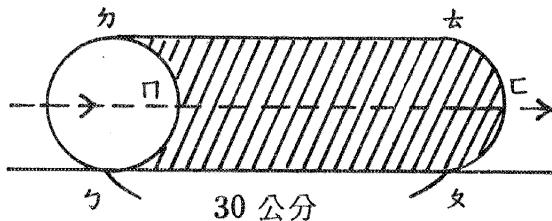
1. 由底面的邊順着影子的邊量到影子的頂端（即 \overline{BC} 或 \overline{EF} ）就是物體的正確高度。
2. 和底面的邊成直角，到達影子頂端的聯線（即 \overline{AC} ）比較短，是不正確的。

過程(三)：怎樣量出圓柱體的正確高度？

我們觀察了實際情形和紙上的測繪，得到下面結果：



立體圖



俯視圖

發現：

- 1 入射光線都可和圓柱體底面的圓周達成一條 90° 的線條（如 $\overline{匱匱}$ ）。
- 2 不入光線由任何角度射入，由底面的邊順着影子的邊量到影子的頂端（即 $\overline{匱匱}$ 或 $\overline{匱匱}$ ）或 $\overline{匱匱}$ 就是物體的正確高度。

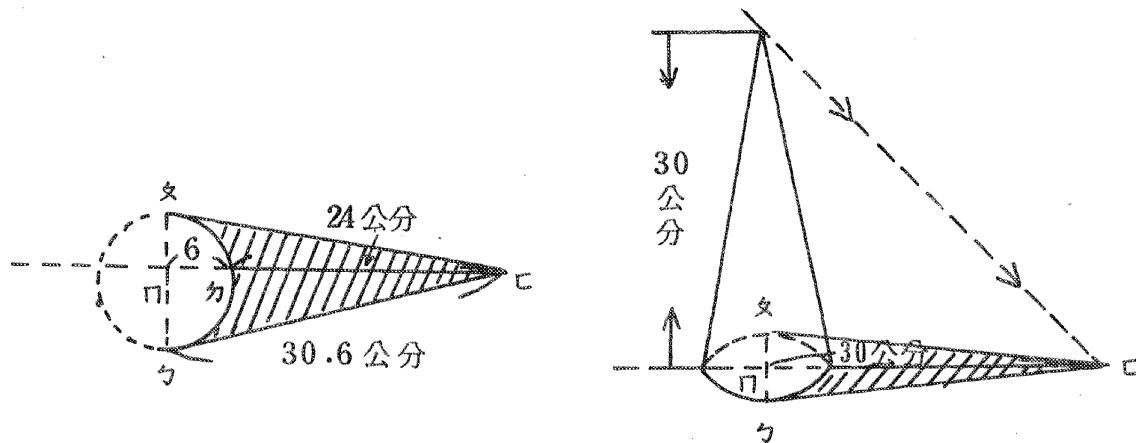
過程四：怎樣量出圓錐體的正確高度？

我們利用過程(三)的方法去量圓錐體的高度時，無法量到物體的正確高度。我們請教老師，老師告訴我們把影子區畫下來得到下圖 $\overline{匱}\overline{匱}\triangle$ ，然後拿開錐體把 $\overline{匱}$ 、 $\overline{匱}$ 兩點聯接起來，得到 $\overline{匱}\overline{匱}$ 、 $\overline{匱}\overline{匱}$ 和桌上原有的線交叉一點 \square ，連 \square 、 \square ，我們發現 $\overline{匱}\overline{匱}$ 恰好是物體的高。

發現：

- 1 由圓錐的頂點垂直底面圓心的線段是圓錐體的高，我們可以把高看成一標竿，而這一標竿形成的影子應該是 $\overline{匱}\overline{匱}$ ，也就是 $\overline{匱}\overline{匱}$ 加上 $\overline{匱}\overline{匱}$ 。所以圓錐體的影子長應由底面圓心量到影子頂點才是圓錐體正確高度。
- 2 $\overline{匱}\overline{匱}$ 比 $\overline{匱}\overline{匱}$ 少了底面圓的半徑 $\overline{匱}\overline{匱}$ ，所以只有 24 公分。

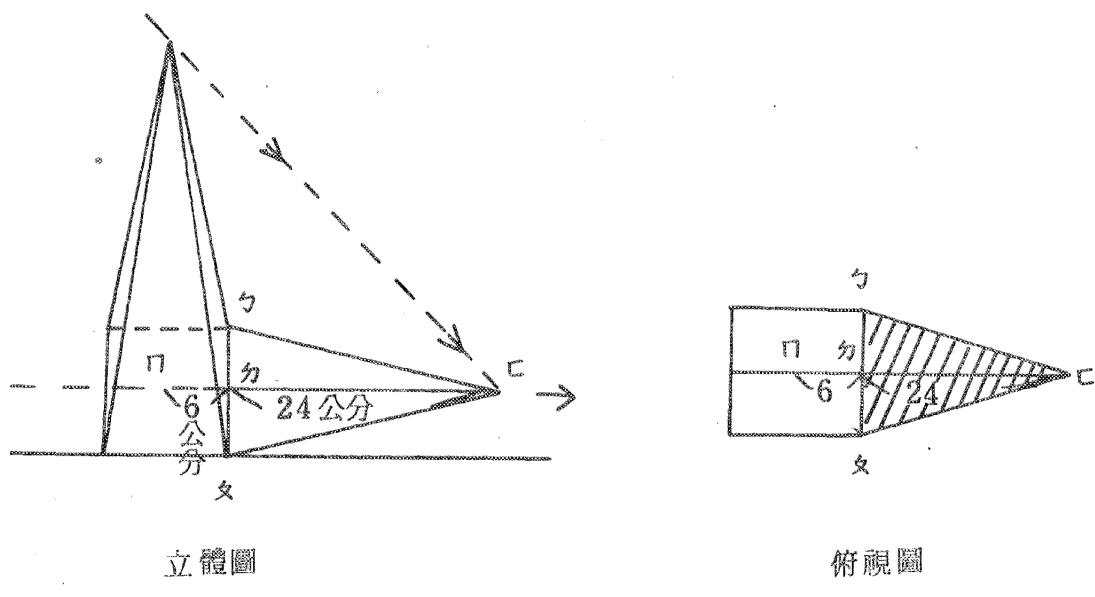
3. \overline{AC} 是直角三角形 $\triangle ABC$ 的斜邊，所以比 \overline{BC} 長。



過程(五)：怎樣量出角錐體的正確高度？

利用過程(四)所得的結果，我們推論角錐體高度的影子量法應該是：由錐頂垂直地面的點，量到影子的尖頂。

1. 入射光線和角錐體底面的邊 \overline{BC} 成 90° 時。



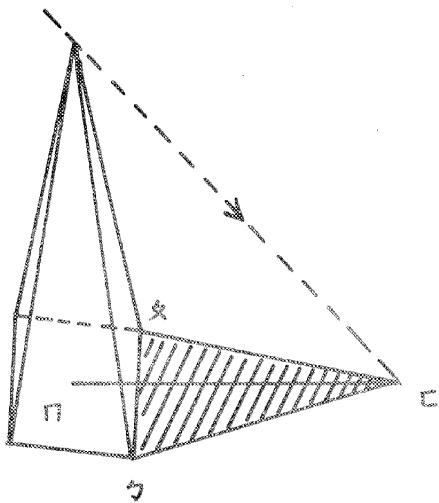
發現：

和我們的推論符合：角錐體的高等於 $\overline{AB} + \overline{BC} = 6\text{公分} + 24\text{公分} = 30\text{公分}$

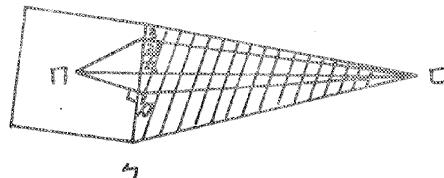
2 入射光線和底面的邊（ \overline{BC} ）不成 90° 時

我們由實際操作而畫在紙上的圖得到三條線：

- (1) \overline{AB} （由 \overline{AC} 和 \overline{BC} 構成， \overline{BC} 垂直底面方形的邊 \overline{CD} ，共長 32 公分）。
- (2) \overline{AC} （爲一直線，長 30 公分）
- (3) \overline{AD} （由 \overline{AC} 和 \overline{DC} 構成， \overline{AC} 垂直底面方形的邊 \overline{CD} ，長 31 公分）



立體圖



俯視圖

發現：

1. 正確的量法和推論符合即：由錐頂垂直地面的點量到影子的尖端。
2. \overline{AD} 我們由實際操作中量得 7 公分，但以金字塔那麼大，並且不能搬動，不知臺利斯怎麼去解決？

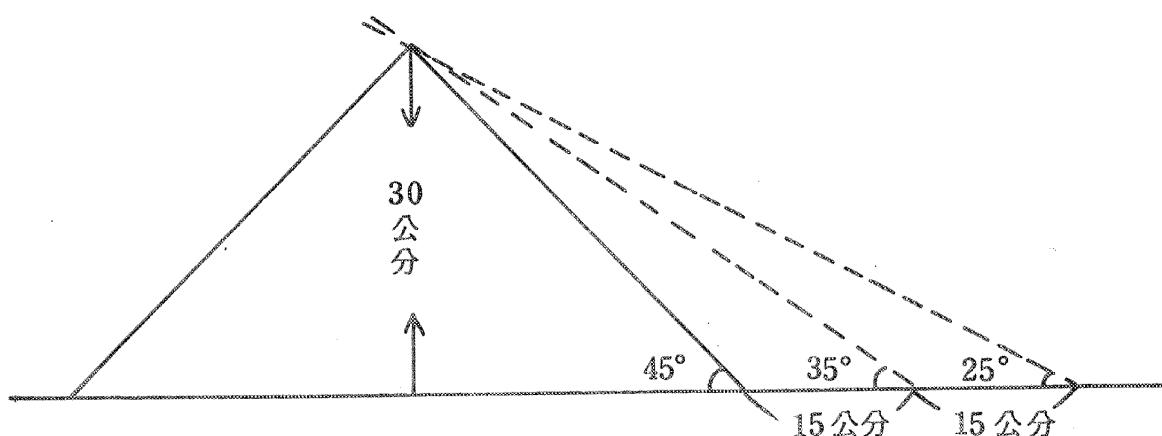
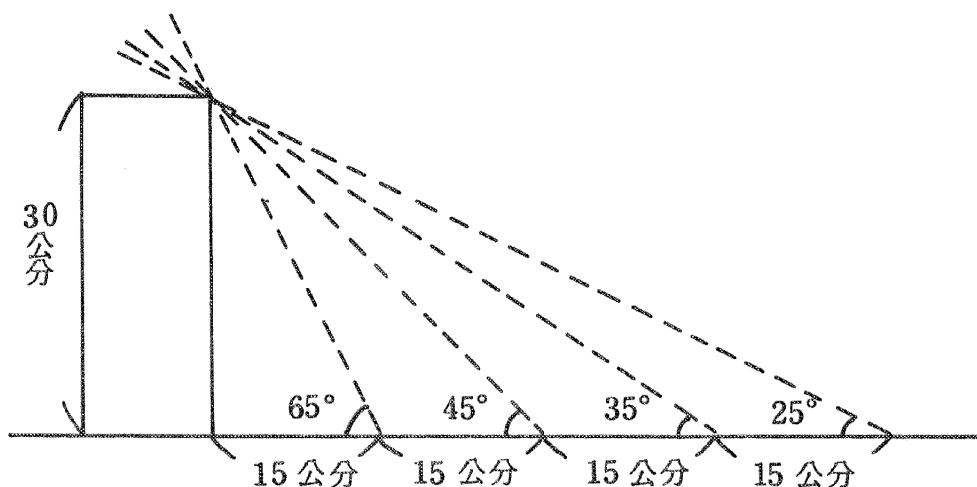
我們利用方格紙畫出各種形狀的錐體底面。設法找出錐頂垂直地面的點後，分別以(一)圓心角每 5° 畫一條心和邊的連線（如附件一），(二)在邊上每隔 1 公分畫一條心和邊的連線（如附件二），再量其長度，並利用大小比率求出實際的長度。

我們發現只要能正確的畫出底面圖形，並找出正確的錐頂垂直點就可以正確的求出實際的影子長度，而換算出正確的高度來。

過程(六)：太陽高度角變動時，是不是可以求得物體正確的高度？

我們利用電燈做實驗時，固然很容易使燈光的高度角成 45° ，但在大自然裡利用太陽高度角成 45° 角的機會每天只有上下午各一次，因此我們想假使太陽高度角不是 45° 時，要用什麼方法來推求正確的高度。

我們利用標竿及各種實物和變動燈光高度角，量取標竿影長和實物影長再加以推算。



發現：

1 長方體、正方體、角柱體，可利用公式求得。公式是：

標竿長 : 實物高 = 標竿的影長 : 實物的影長。

2 圓錐體、角錐體原則上也可以利用上列公式求得正確高度但當

太陽高度角太大時，影子尚在建物底線以內，則無法得到結果。

四、結論

- (一) 在太陽高度角 45° 時物體的影子會和物體的高度等長。
- (二) 由以上的研習得知：當太陽高度角 45° 時，只要從形狀影子尖端的那一點物體垂直地面的點量到影子的尖端，就是物體的高。
- (三) 在建築物實地的測量中，當光線入射沒有和底面的邊成 90° 時由錐頂垂直地面的點不容易得到。但可利用方格紙加以補救。
- (四) 由過程(六)，我們可以不必等到太陽高度角 45° 時才能利用量影子知高度的方法，只要有尺和一標竿就可利用比率的方法求得物體正確的高度。

五、參考資料

- (一) 第十七屆中小學科展優勝作品專輯（國小組） 13 頁～17 頁
- (二) 數學的故事 中華兒童叢書 31 頁～32 頁
- (三) 國小自然科學（第十冊） 國立編譯館 2 頁～3 頁

評語

- 1 這是一件很單純的數學應用，雖然單純，但應用性強。
- 2 作品只提到影子與標竿等長的情形，其他情形如能列表求算，就會較完整些。