

數學習作再深究 —有趣的組合和排列的差數—

高小組數學科第二名

省立嘉義師專附設實驗國民小學 作者：楊振宇、袁國贏等六人
指導教師：李榮彬、蔡 華

一、研究動機

六年級上學期的數學習作裏，談到了黑珠、白珠的排列差數，和圓周上取若干點，可連成幾條線的問題，都非常有趣。我們想：如果把黑珠、白珠的排列變成立體，相差的數目，有什麼關係呢？在圓周上取若干個點，能連成幾條線的問題，改變成能連成幾個三角形、四邊形、五邊形，那會產生什麼結果呢？由於好奇心，引發了我們研究的興趣，於是在老師的指導下展開了研究工作。

二、研究問題

(一)圓周上有 100 個點的話：
1 可以畫幾個三角形？
2 可以畫幾個四邊形？
3 可以畫幾個五邊形？
4. 這些點、線和圖形有什麼關係？

(二)假如藍珠、白珠間隔排列：

- 1 底面正三角形的堆棧排列，藍白珠相差多少個？
- 2 底面正四邊形的堆棧排列，藍白珠相差多少個？
- 3 底面正三角形的堆棧排列和平面正三角形的排列，藍珠和白珠的關係如何？

三、研究過程

(一)問題(一)：圓周上有 100 個點的話，可以畫幾個三角形？

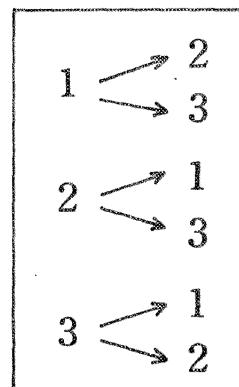
- 1 在圓周上畫 3 個點，可以連成一個三角形，畫 5 個點，可連成 10 個三角形……，這些答案是按照習作上簡化問題的方法，實際畫三角形，一個一個的數，算出三角形的個數。但是，由

於點數逐漸增加，畫出的圓形非常複雜，計算時常會重複，錯誤很多。

2. 我們想到用點數依次遞減向後連乘三次再除以 $(3 \times 2 \times 1)$ 就能算出三角形的個數。例：圓周上有 5 個點時，就以 $\frac{5 \times 4}{3 \times 2} \times \frac{3}{1}$ 的方式來計算，為什麼要這樣做呢？

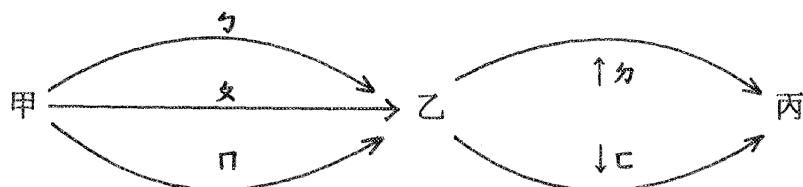
3. 首先，我們把問題簡化：

例(1)有 1、2、3 三個數，在其中選出二位數排列，可排成幾種？十位數是 1 的話，個位數有 2 和 3 兩種排列。以此類推，我們知道：在這個問題中，十位數字固定，個位數字只剩 2 個數字可以選擇（如右表一），也就是可排成 12、13、21、23、31、32 等六種排法，而 6 是 $(3 \times 2 \times 1)$ 得來的。



(表一)

例(2)從甲地到乙地有匚匱匱三條路可走，乙地到丙地有匱匱兩條路，那麼從甲地到丙地有幾種走法？



圖二

從圖二可以證實有 6 種走法，亦即是 3×2 得來的答數。

例(3)有四個人，要在另一個 4 人組中選一個人成為一組夥伴的話，有幾種排法呢？我們的答案是 24 種。也就是第一次可以有 4 個選擇機會，第二次只能有 3 種選法。第三次選時，因為第一次和第二次各選一個人去了，所以只剩下 2

種選法，最後第四次只剩一個人可以選擇。寫成算式就是
 $(4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24)$ 。

4. 假如圓周上有四個點，要畫三角形的話，是用 $4 \times 3 \times 2 \times 1$ 嗎？當然不是，因為我們前面說過必須再除以 6 呢！現在我舉個簡單的例子。甲、乙、丙三點連成的三角形有右表三 6 種說法，雖然排列順序不一樣，但是它們所連成的三角形卻是同一個，6 種排列只能算是一種。所以將圓周上的點數由大向小遞減，連成三個數再除以 6 才是最後的答案。

$\triangle\triangle$	$\triangle\triangle$	$\triangle\triangle$
甲 甲	乙 乙	丙 丙
乙 丙	甲 丙	甲 乙
丙 乙	丙 甲	乙 甲

(表二)

5. 我們回到原來的問題：圓周上有 100 個點的話，可畫幾個三角形？按照前面的說法，計算如下：

$$100 \times 99 \times 98 \div (3 \times 2 \times 1) = 161700 \text{ (個)}$$

$$\frac{100 \times 99 \times 98}{3 \times 2 \times 1} = 161700 \text{ (個)}$$

6. 研究結果(一)：圓周上有 100 個點時能畫 161700 個三角形。

(二)問題(二)：圓周上有 100 個點的話，可以畫幾個四邊形？

- 1 要計算這個問題，所用的方法與計算三角形的算法大致相同。在三角形算法說明中，已了解點數由大至小連乘三個數的意義；算四邊形時，則再多乘一個數，因為四邊比三角形多了一個頂點。

2 計算方式如下： $\frac{100 \times 99 \times 98 \times 97}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 3921225$ 個

3. 研究結果(二)：圓周上有 100 個點時，能畫 3921225 個四邊形。

(三)問題(三)：圓周上有 100 個點時，可以畫幾個五邊形？

- 1 五邊形個數的求法和三角形、四邊形計算方法類似。
 2 本題的算法是點數由大到小連乘 5 個數，再除以 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ 。如： $\frac{100 \times 99 \times 98 \times 97 \times 96}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 75287520$ (

個)。

3. 研究結果(三)：圓周上有 100 個點時，能畫 75287520 個五邊形。用此算法，不但比一個一個實際算來得快且省事，而且可以正確求出你想知道的三角形、四邊形、五邊形，甚至多邊形的個數了。

(四)問題(四)：在上述三個問題裏，點、線和圖形有什麼關係？

從上面的推論，我們發現在圓周上設定若干個點來畫線或圖形，雖然計算的方法不完全一樣，但是它們有一個共通性，那就是數目的連乘。被除數由設定的點開始由大至小連乘；除數由 1 開始連乘。至於連乘幾個數則依題目的要求來決定。例如線連乘兩個數，三角形連乘三個數，四邊形連乘四個數，……。也就是說，它的公式形式是相同，算法相類似，算起來更有趣。

(五)問題(五)：假如藍、白珠間隔排列，底面為正三角的堆垛，藍、白珠相差多少？

1. 為了研究需要，我們以保麗龍球做了一層藍、白珠相間的堆垛，(如模型一) 模型共十二層，單數層是白珠，雙數是藍珠。

2. 堆垛為兩層，邊的個數為 2 時，共需要 3 個藍珠，3 個藍珠減第一層的 1 個白珠，差數是 2，所以邊際 2 時(兩層)藍珠比白珠多兩個。邊數是 3 時(三層)，共需 7 個白珠(第三層 6 個，第一層 1 個)，減掉第二層的 3 個藍珠，差數是 4。按照這樣一直算下去，你會發現更多的奧妙。(如下表四)

每層邊的個數	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
藍白珠的差數	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36	42	49	56	64	72	81	90	100	110	121	132

(表四) (2) (2) (3) (3) (4) (4) (5) (5) (6) (6) (7) (7) (8) (8) (9) (9) (10) (10) (11) (11)
※ () 的數是藍、白珠總和相減的差數。

3. 從上圖的統計裏，我們知道正三角形的堆垛是有規律的。從第二層開始，它們的差數分別是 2，2，3，3，4，4……。我們還發現，將邊數加上前數相差的數，再減掉括號中的數就是該層堆垛藍白珠相差的數目。算法如下：

$$16 + 64 - 8 = 72 \quad ? = 72$$

每層邊的個數	14	15	16
藍白珠的差數	56	64	?

(表五) (8)(8)

4. 另外還有一種算法： $64 + 8 = 72 \quad ? = 72$
5. 假如沒有統計表(如表四、五)時，怎樣計算藍白珠的差數？我們找到了兩種計算方法。

1、邊數是奇數的計算公式： $\lfloor (\text{邊數} + 1) \div 2 \rfloor^2$

2、邊數是偶數的計算公式： $(\frac{\text{邊數}}{2} + 1) \times \frac{\text{邊數}}{2}$

6. 例：邊數爲101時，藍、白珠相差多少個？

$$\lfloor (101 + 1) \div 2 \rfloor^2 = 2601$$

答：藍白珠相差2601個

7. 例：邊數爲100時，藍、白珠相差多少個？

$$(\frac{100}{2} + 1) \times \frac{100}{2} = 2550$$

答：藍白珠相差2550個

(六)問題(六)：假如藍、白珠間隔排列，底面正四邊形的堆棟，藍、白珠相差多少呢？

1. 底面爲正方形的堆棟，用藍、白珠交互疊成(如模型二)。第一層是1個白珠，(1的平方)。第二層是4個藍珠(2的平方)。第三層是9個白珠(3的平方)，……。
2. 爲了使複雜的問題變成簡單，我們觀察模型，並且把各層逐次累計的差數記錄下來。(如表六)

每層邊的個數	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
藍白珠的差數	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210	231	253

(表六) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10) (11) (12) (13) (14) (15) (16) (17) (18) (19) (20) (21) (22)

3. 從上表看來，我們發現了，相鄰兩層藍、白珠累計差數相減結果都有規律性。（如表六括弧內的數字）我們還發現，由1連續累加到要計算的層數時，就是藍、白珠相差的數目；如三層邊數為3時， $1 + 2 + 3 = 6$ ，藍白珠的差是6。不過這個方法要是遇到邊的個數較大時，要計算就不方便。於是，我們又

想到了利用梯形的公式來計算。如： $\frac{(1 + \text{邊數}) \times \text{邊數}}{2}$ 以

九層的堆垛，最底層每邊九個珠來做例子： $\frac{(1 + 9) \times 9}{2}$

$= 45$ 藍白珠相差的數目就是45個。

4. 我們又進一步觀察、發現：邊際×前一位個數÷2 + 邊數 也可以算出藍、白珠的差數。例如100層的堆垛，最下面底層的邊數是100的話，藍、白珠相差 $100 \times 99 \div 2 + 100 = 5050$ （個）。

(七)問題(七)：底面正三角形的堆垛排列和平面正三角形的排列下，藍珠和白珠的關係如何？

以底面正三角形堆垛藍、白珠的差數，除以平面三角形藍白珠的差數，商正好是2，2，3，3，4，4……數字連接而又有規律（如下表七）；所以兩者之間是有關連的。

(表七)

每層邊的個數	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
立體藍白珠的差數	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36	42	49	56	64	72	81	90	100	110	121
平面藍白球的差數	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11
兩者之間的關係(商)	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	

(八)問題(八)：底面為正方形的堆垛和平面正方形的排列下，藍珠和白珠的關係如何？

我們發現用堆垛的差數減去同一邊數平面排列的差數，其結果也蠻有趣的。（如下表八）

每層或邊的個數	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
立體藍白珠的差數	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210	231
平面藍白珠的差數	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
兩者之間的關係(差)	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210

(表八)

(2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10) (11) (12) (13) (14) (15) (16) (17) (18) (19) (20)

四、結論

(一)圓周上取若干個點，把這些點組合成線、三角形、四邊形、五邊形……時，其計算方法分別是：

1. 按點數由大到小，連乘三個數，再除以($3 \times 2 \times 1$)，答數就是所要求三角形的個數。
2. 按照點數，由大到小連乘四個數，再除以($4 \times 3 \times 2 \times 1$)，答案就是所要求的四邊形的個數。
3. 以點數由大到小，連乘五個數，再除以($5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$)，答案就是所要求的五邊形的個數。

(二)底面爲正三角形的堆垛，將前後相差數直接加上前面藍、白珠差數，就是藍、白珠相差的數。

(三)底面爲正三角形的堆垛，以邊數加上上次相差的數，再減掉差數，就是藍、白珠相差的數目。

(四)底面爲正三角形的堆垛，邊數爲單數時，有一種算法：

$$[(\text{邊數} + 1) \div 2]^2$$

(五)底面爲正三角形的堆垛，邊數爲雙數時，其算法如下：

$$(\frac{\text{邊數}}{2} + 1) \times \frac{\text{邊數}}{2}$$

(六)底面爲正四邊形的堆垛， $\frac{(\text{邊數} + 1) \times \text{邊數}}{2}$ ，答案就是藍、白

珠的差數。

(七)底面爲正三角形的堆垛，藍、白珠的差數，減掉同樣邊數的平面三角形的藍、白珠差數，等於前面堆垛藍、白珠的差數。

(八)底面爲正四邊形的堆垛，將“邊數 $\times (\text{邊數} - 1) \div 2 + \text{邊數}$ ”

就是藍、白珠相差的數。

(九)底面爲正方形的堆垛，減去同一邊數平面排列的差數；其前後差數再相減，正好爲一連續的數字。

五、參考資料

國立編譯館主編國民小學數學習作甲，數學習作乙。

評語

- 1 由數學習作中的題目推廣到空間的情形，可貴！
- 2 把空間情形的解決，歸到平面的情形，觀察力不錯，方法也好。