怎樣安排才恰當

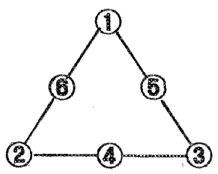
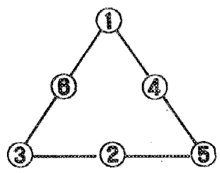
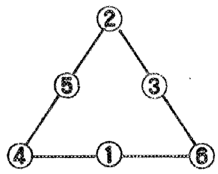
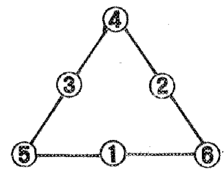
高小組數學科第一名

新竹縣華興國民小學　　作　　者：何燦軒、陳濬龍
：林金玲、朱秀萍
指導教師：古富禎、陳智華

一、研究動機

數學課時，老師出了一道有趣的問題，他在黑板上寫了一串數字「1，2，3，4，5，6」，要我們將這六個數字分別安排在一個三角形的三個頂點及三邊上，使每一邊（包含二頂點）的三個數字的和相等。

於是全班同學都在努力的拼湊，一旦發現答案，就公佈在黑板上，最後經過整理和剔除重複部分，我們得到了下面四種答案：

編　　號	1 ～(一)	1 ～(二)	1 ～(三)	1 ～(四)
種　類				
每邊的和	9	10	11	12

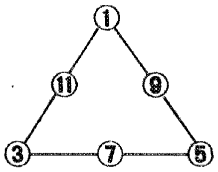
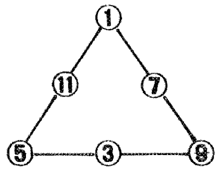
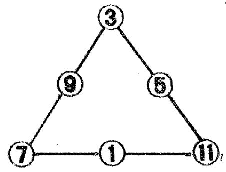
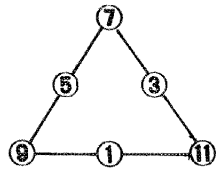
這個問題給我們帶來了一股研究的興趣；在研究的過程中，發現了幾個問題。於是，在老師的指導下，我們對這些問題再做深入的探討，並找出答案。

二、研究過程

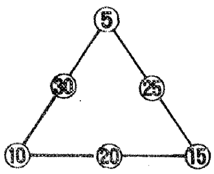
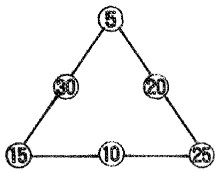
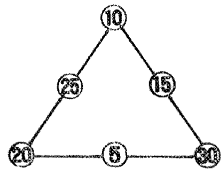
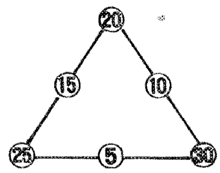
〔問題一〕：是不是任何六個數字都可以滿足老師的要求？

(一)試試幾個不同的題目：

1. 何燦軒同學所提出的題目「1，3，5，7，9，11」經過我們的討論，可以得到四種答案：

每邊的和	2 ～㈠	2 ～㈡	2 ～㈢	2 ～㈣
類型				
每邊的和	15	17	19	21

2. 陳濬龍同學的題目「5，10，15，20，25，30」
經過討論，也有四種答案：

編　號	3 ～㈠	3 ～㈡	3 ～㈢	3 ～㈣
類型				
每邊的和	45	50	55	60

3. 陳政弘同學的題目「7，9，10，15，18，20」
研究結果，沒有人能提出正確答案。

4. 陳政銘同學的題目「2，3，5，8，12，17」
研究後，也沒有正確答案。

㈡綜合討論：

1. 在上面四位同學提出的問題中，只有何燦軒和陳濬龍同學的題目能滿足老師的要求。再經過詳細的觀察，我們發現他們的題目，都有一種共同的特性，也就是「每相鄰兩數的差都相等」。
如：　老師的→ $2-1=3-2=4-3=5-4=6-5=1$ 。
何同學的→ $3-1=5-3=7-5=9-7=11-9=2$ 。
陳同學的→ $10-5=15-10=20-15=25-20=30-25=5$ 。

2. 老師告訴我們，有這種特性的一串數字叫做「等差數列」，而它們的差分別是1，2，5。至於陳政弘和陳政銘同學的題目中，每相鄰兩數的差並不完全相等，所以不是「等差數列」。

3. 於是我們可以得到一種結果：「一個六項的等差數列，把這六

個數字分別安排在一個三角形的三頂點及三邊上，則一定可以得到四種『每邊三數的和都相等』的情形」。

〔問題二〕：能不能不用「拼湊」，而可以很快的找到答案？

㈠我們再把老師的題目和答案提出來研究。

1. 題目是「1，2，3，4，5，6」。

2. 答案有四種，而每邊的和分別是9，10，11，12。

㈡三角形三邊的總和是多少？

我們共看看編號1～㈠號的答案：

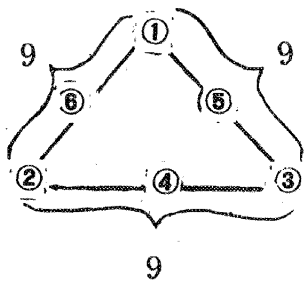
1. 想法一：每邊的和是9，三邊總和是9＋9＋9＝27。

2. 想法二：這四角形是由「1，2，3，4，5，6」六個數字構成，所以三邊的和爲1＋2＋3＋4＋5＋6＝21。

3. 上述兩種想法的結果不同，問題出在那裡？原來「想法一」中三邊的和是：

$$
\begin{aligned}
(9+9+9) &= (1+6+2)+(2+4+3)+(1+5+3) \\
&= 1+1+2+2+3+3+4+5+6 \\
&= (1+2+3)+(1+2+3+4+5+6) \\
&= (1+2+3)+21
\end{aligned}
$$

想法二的和

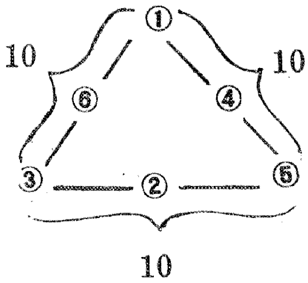


其中1，2，3各重複算了一次，所以想法一的和會比想法二的和大。

㈢以上述方法再來觀察編號1～㈡，1～㈢，1～㈣的答案。

$$
\begin{aligned}
(10+10+10) &= (1+6+3)+(3+2+5)+(1+4+5) \\
&= 1+1+2+3+3+4+5+5+6 \\
&= (1+3+5)+(1+2+3+4+5+6) \\
&= (1+3+5)+21
\end{aligned}
$$

想法一重複計算的部份

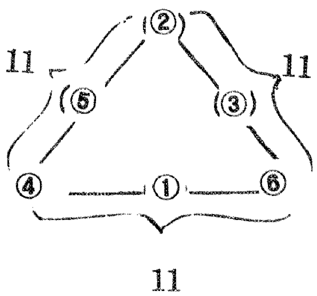


（11＋11＋11）＝（2＋5＋4）＋（4＋1＋6）＋（2＋3＋6）

＝1＋2＋2＋3＋4＋4＋5＋66

＝（2＋4＋6）＋（1＋2＋3＋4＋5＋6）

＝（2＋4＋6）＋21　想法一重複計算的部份

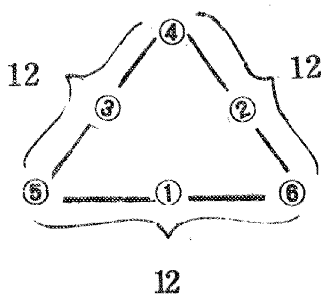


（12＋12＋12）＝（4＋3＋5）＋（5＋1＋6）＋（4＋2＋6）

＝1＋2＋3＋4＋4＋5＋5＋6＋6

＝（4＋5＋6）＋（1＋2＋3＋4＋5＋6）

＝（4＋5＋6）＋21　想法一重複計算的部份



㈣由以上的運算我們發現，想法一重複計算的數字（1，2，3），（1，3，5）（2，4，6）（4，5，6）恰好分佈在每一個三角形的三項點上，而它們分別是等差數列的「前三項」「奇數位項」「偶數位項」「後三項」。

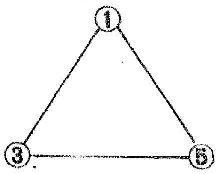
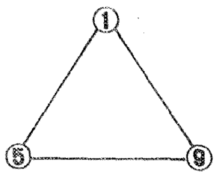
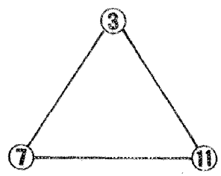
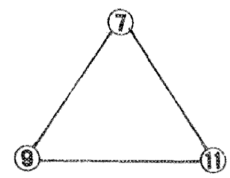
㈤於是，我們有了秘訣：「一個六項的等差數列，若要達到老師的

要求，則只要將其『前三項』『奇數位項』『偶數位項』『後三項』分別置於三角形的頂點上，再適當的安排其他三數，就可以得到四種結果」。

〔問題三〕：三頂點的數找到以後，怎樣安排其他三數，使答案很快的出現？

㈠以何燦軒同學的題目為例：「1，3，5，7，9，11」：

先安排三頂點的數：

方法	前三項	奇數位項	偶數位項	後三項
類型				

㈡我們先討論「前三項」這一部份的答案：

1. 把三角形同一邊兩頂點的數相加，得到三個和，這三個和所成的集合甲（4，6，8）中的元素要和這個數列中的另外三數所成的集合乙（7，9，11）中的元素一對一的相加，而且和相等；唯一的方法是「4＋11＝15」

「6＋ 9＝15」

「8＋ 7＝15」

也就是說：甲集合中最大的元素＋乙集合中最小元素

甲集合中次大的元素＋乙集合中次大元素

甲集合中最小的元素＋乙集合中最大元素

			甲		乙	
前						
三	1+3=4	⟹	4	+	11	=15
	1+5=6		6	+	9	=15
項	3+5=8		8	+	7	=15

			甲		乙	
奇						
數	1+5= 6	⟹	6	+	11	=17
位	1+9=10		10	+	7	=17
項	5+9=14		14	+	3	=17

偶數位項		甲		乙	
3+ 7=10	⟹	10	+	9	=19
3+11=14		14	+	5	=19
7+11=18		18	+	1	=19

後三項		甲		乙	
7+ 9=16	⟹	16	+	5	=21
7+11=18		18	+	3	=21
9+11=20		20	+	1	=21

2. 其他三類型「奇數位項」「偶數位項」「後三項」的做法也是同樣的。

㈢結果：三頂點的數安排好後，數列另三數中「最小」的，放在「二頂點和最大」的中間。三數中「次大」的，放在「二頂點和次大」的中間。三數中「最大」的，放在「二頂點和最小」的中間，就可以順利得到答案。

〔問題四〕每種題目有四個答案，四個答案每邊的和之間有什麼關係？

㈠回頭觀察已經做過的題目：

1. 老師的題目，每邊的和分別是：9，10，11，12 。

2. 何同學的題目，每邊的和分別是：15，17，19，21 。

3. 陳同學的題目，每邊的和分別是：45，50 ，55，60 。

㈡每一種題目的四種和也是「等差數列」

$10-9=11-10=12-11=1$

$17-15=19-17=21-19=2$

$50-45=55-50=60-55=5$

它們的差數分別是 1 ，2 ，5 ，和原題目等差數列的差完全相同。

三、結　論

㈠一個有六項的等差數列，把數列中的六個數字分別安排在一個三角形的三頂點及三邊上，則一定可以得到四種「每邊三數的和都相等」的情形。

㈡若要達到上面的要求，則只要將數列中的「前三項」「奇數位項」「偶數位項」「後三項」分別置於三角形的三頂點上；再將數

列中另外三數依下列方法安排，就可以順利的得到答案。

三數中「最小」的，放在「二頂點和最大」的中間

三數中「次大」的，放在「二頂點和次大」的中間

三數中「最大」的，放在「二頂點和最小」的中間

㈢每個數列有四種安排的方法，每種方法的三角形三邊的和都相等。而這四種「和」的集合也是一「等差數列」，它相鄰兩項間的差和原來數列的差相等。

評 語

㈠能由數學習作中的題目加以推廣，自己找出題目來作。

㈡已作的結果，表達清楚，解法生動。

㈢但進一步的推廣未能作出來，是其缺點。