平面圖形重心問題之探討

國中組數學科第三名

臺北市立金華女子國民中學　　作　　者：孫自嘉等五人
指導教師：陳文瑛

一、研究動機

課本上提到三角形的重心是三邊中線的交點，使我們好奇的想到四邊形的重心在那裏呢？五邊形、六邊形呢？甚至扇形、拋物線圖形呢？因而引起我們研究的動機。

二、研究目的

我們反覆的思考、作圖，用自己的方法找出上述各圖形的重心位置，所使用的方法與有關書籍上的方法不同，却更爲簡單。

三、研究設備器材

㈠多邊形的重心

1.尺　2.圓規

㈡扇形、半圓的重心

1.尺　2.圓規　3.參考書籍　4.量角器

㈢拋物線圖形的重心

1.尺　2.參考書籍

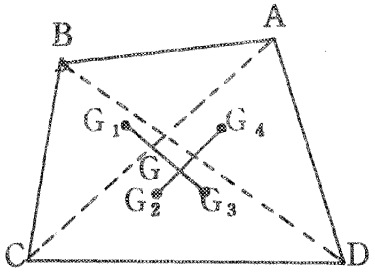
四、研究過程或方法

㈠多邊形的重心

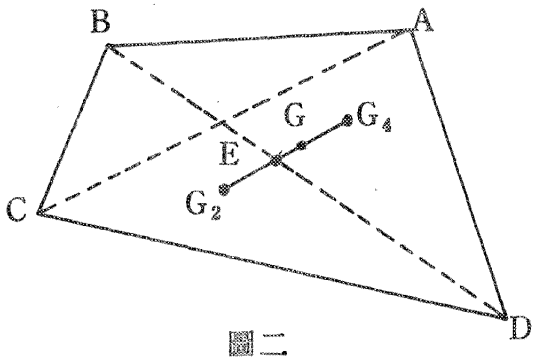
1.四邊形的重心

四邊形的一條對角線分原形成兩個△，從物理學的觀點而言，我們規定：G_1、G_2、G_3、G_4 分別是△ABC、△ ACD、△

BCD、△ABD之重心，$\overline{G_1G_3}$與$\overline{G_2G_4}$之交點爲四邊形ABCD之重心（如圖一）。



圖一

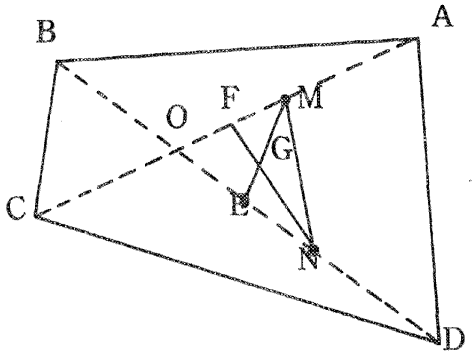


圖二

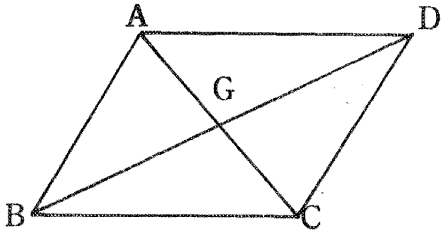
我們發現，除上述方法找四邊形的重心外，還有其他幾種方法

方法(1)：如圖二設E是$\overline{BD}$與$\overline{G_2G_4}$的交點，只要在$\overline{G_2G_4}$上取一點G，使$\overline{GG_4}=\overline{G_2E}$，G即爲四邊形ABCD之重心。

方法(2)：當四邊形兩對角線不互相平分時，在$\overline{AO}$上取一點M $\overline{AM}=\overline{CO}$，在$\overline{DO}$上取一點N，使$\overline{DN}=\overline{BO}$，則△OMN之重心G即爲四邊形ABCD之重心（如圖三）



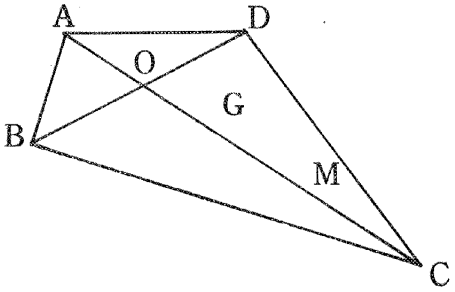
圖三



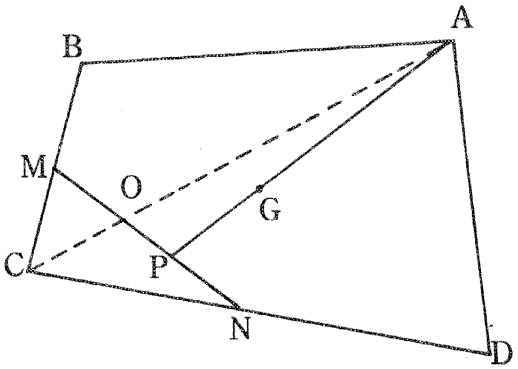
圖四

當四邊形兩對角線互相平分時，則四邊形重心爲對角線之交點（如圖四）

當四邊形只有一條對角線被平分時，在$\overline{CO}$上取一點M，使$\overline{AO}=\overline{CM}$，在$\overline{OM}$上取一點G，使$\overline{OG}=\frac{1}{3}\overline{OM}$，G即爲四邊形ABCD之重心（如圖五）



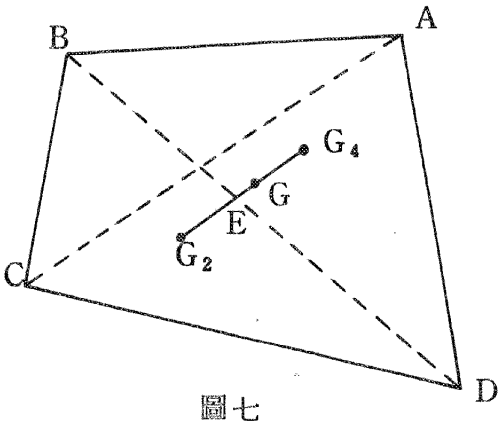
圖五



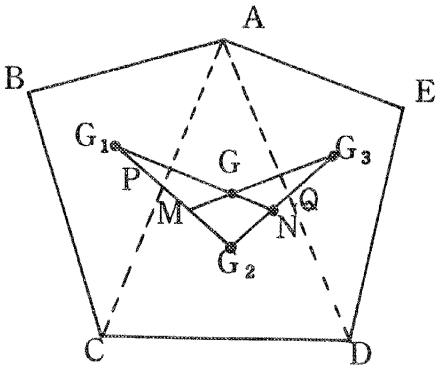
圖六

方法(3)：如圖六，取$\overline{BC}$、$\overline{CD}$之中點M與N，在$\overline{MN}$上取一點P使$\overline{OM}=\overline{PN}$作$\overline{AP}$，在$\overline{AP}$上取一點G使$\overline{AG}:\overline{PG}=2:1$，G即爲四邊形ABCD之重心。

另外，從物理學觀點來看，若G是四邊形ABCD的重心，G_2是△BCD之重心，G_4是△ABD之重心，則$\overline{GG_4}:\overline{GG_2}=$△BCD：△ABD（如圖七）。



圖七



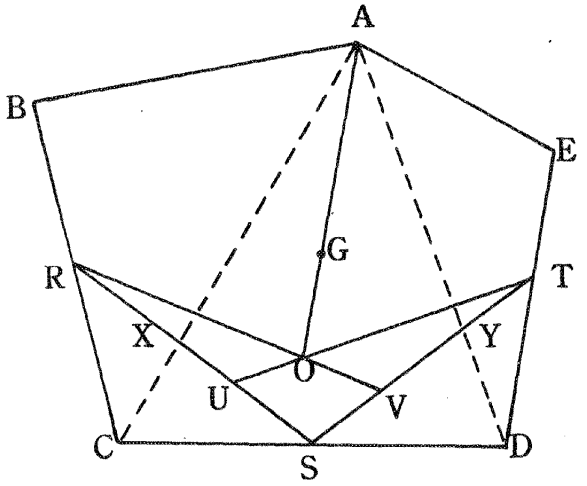
圖八

2.五邊形的重心

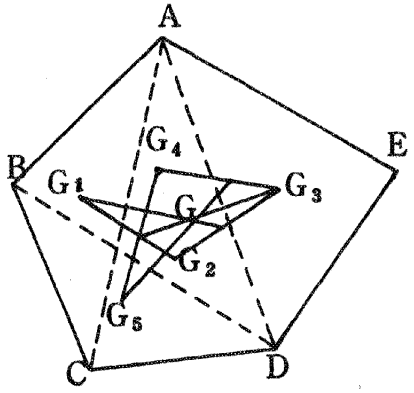
將四邊形重心定義加以推展，如圖八，我們規定：五邊形重心在△ABC 及四邊形ACDE之重心連線與 ADE及四邊形ABCD之重心連線的交點上。

方法(1)：如圖八，先分別取出△ABC、△ACD、△ADE之重心G_1、G_2、G_3，在$\overline{G_1G_2}$上取一點M，使$\overline{G_2M}=\overline{G_1P}$，M即爲ACDE之重心，在$\overline{G_2G_3}$上取一點N，使$\overline{G_3Q}=\overline{G_2N}$，N即爲ACDE之重心，作$\overline{G_1N}$與$\overline{G_3M}$，其交點G 即爲五邊形的重心。

方法(2)：上述的方法，必須要先找出三個△與兩個四邊形的重心比較麻煩，我們利用圖六的推廣較爲簡單。取$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$之中點R、S、T，作$\overline{RS}$、$\overline{ST}$，在其上取一點U及V，使$\overline{SU}=\overline{RX}$，$\overline{SV}=\overline{TY}$，作$\overline{RV}$交$\overline{TU}$於O，在$\overline{AO}$上取一點G，使$\overline{AG}:\overline{GO}=2:1$，G即爲五邊形ABCDE之重心。（如圖九）



圖九



圖十

上面五邊形重心的找法都以A爲固定點，將五邊形分割而求出重心的位置，現在我們以其他頂點爲固定點分割五邊形求得之重心均爲同一點。（如圖十）

3.六邊形的重心

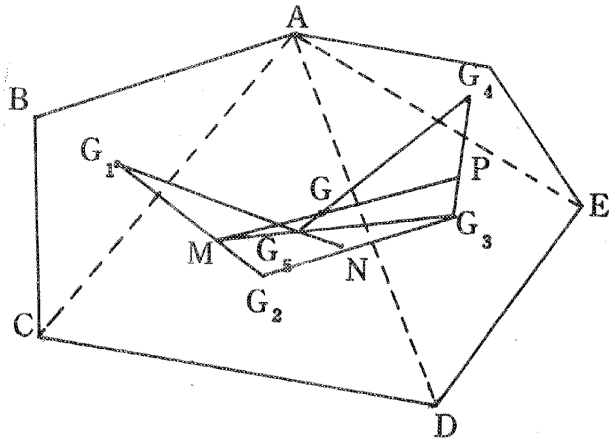
由三角形、四邊形、五邊形重心的找法，我們可以找出六邊形的重心。

分別找出△ABC、△ACD、△ADE、△AEF之重心G_1、G_2、G_3、G_4利用這些點找出四邊形ABCD、ACDE、ADEF、之重心M、N、P，再找出五邊形ABCDE之重心G_5、$\overleftrightarrow{G_4G_5}$與$\overleftrightarrow{MP}$之交點即爲六邊形之重心。

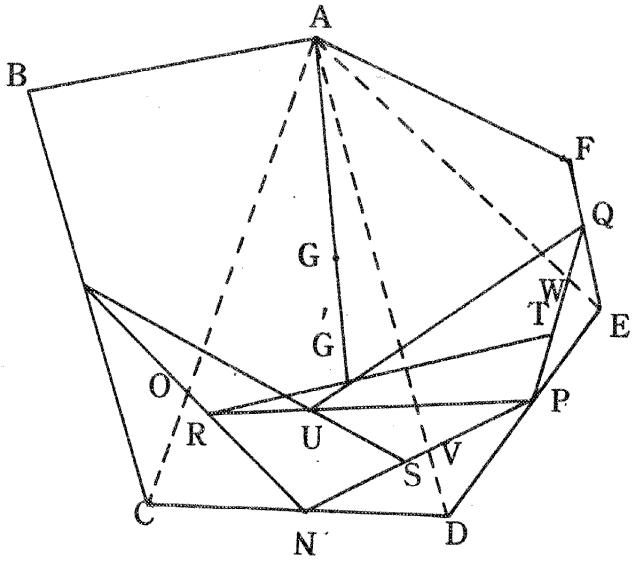
仿照圖九的方法來找六邊形的重心。

取$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$之中點M、N、P、Q。

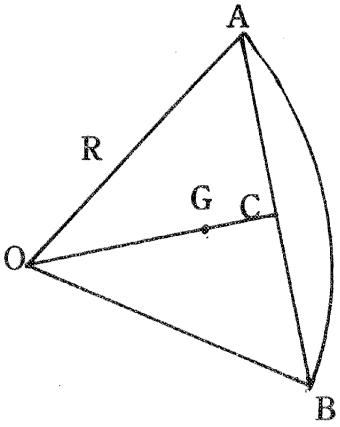
取R、S、T使$\overline{NR}=\overline{MO}$，$\overline{NS}=\overline{PV}$，$\overline{PT}=\overline{QW}$，作$\overline{QU}$與$\overline{RT}$



相交於G^1在$\overline{AG^1}$上取點G使$\overline{AG}:\overline{GG^1}=2:1$，則G是六邊形ABCDEF之重心。



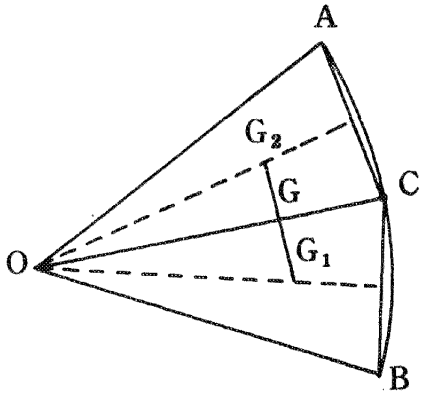
㈡扇形與半圓的重心

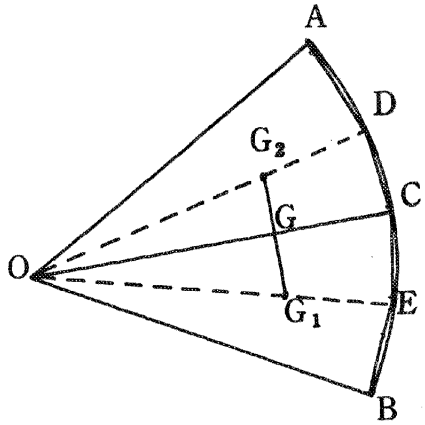


設$\angle AOB=\theta$ $\overline{AO}=r$

$\overline{OC}=r\cos\frac{\theta}{2}$

$\overline{OG}=\frac{2}{3}r\cos\frac{\theta}{2}$





將$\overset{\frown}{AB}$二等分，

$\overline{OG_1}=\frac{2}{3}r\cos\frac{\theta}{4}$

$\overline{OG}=\frac{2}{3}r\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{4}$

將$\overset{\frown}{AB}$四等分

$\overline{OG_1}=\frac{2}{3}r\cos\frac{\theta}{8}\cos\frac{\theta}{8}$

$\overline{OG}=\frac{2}{3}r\cos\frac{\theta}{8}\cos\frac{\theta}{8}\cos\frac{\theta}{4}$

將$\overset{\frown}{AB}$八等分，則十邊形重心G與O之距離爲$\frac{2}{3}r\cos\frac{\theta}{16}\cos\frac{\theta}{16}\cos\frac{\theta}{8}\cos\frac{\theta}{4}$

若將$\overset{\frown}{AB}$ 2^n等分，則扇形之近似多邊形重心G與O之距離。

$$\overline{OG}=\frac{2}{3}r\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}\cos\frac{\theta}{2^n}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^2}$$

$$=\frac{2}{3}r\cos\frac{\theta/2}{2^n}\cos\frac{\theta/2}{2^n}\cos\frac{\theta/2}{2^{n-1}}\cdots\cdots\cos\frac{\theta/2}{2}\cdots\cdots(式1)$$

由三角函數公式 $\sin X=2^n\cos\frac{X}{2}\cos\frac{X}{2^2}\cdots\cos\frac{X}{2^n}\sin\frac{X}{2^n}$

得 $\sin\frac{\theta}{2}=2^n\cos\frac{\theta/2}{2}\cos\frac{\theta/2}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta/2}{2^n}\sin\frac{\theta/2}{2^n}$

即 $\cos\frac{\theta/2}{2}\cos\frac{\theta/2}{2^2}\cos\frac{\theta/2}{2^3}\cdots\cdots\cos\frac{\theta/2}{2^n}=\sin\frac{\theta}{2}/2^n\cdot\sin\frac{\theta/2}{2^n}$ 代入式1

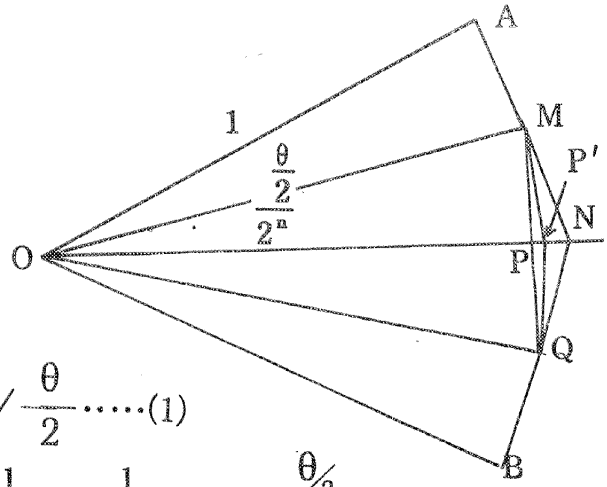
得$\overline{OG}=\frac{2}{3}r\cos\frac{\theta/2}{2^n}\cdot\sin\frac{\theta}{2}/2^n\cdot\sin\frac{\theta/2}{2^n}=\frac{2}{3}r\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cot\frac{\theta/2}{2^n}/2^n$

當$n\to\infty$時，多邊形之重心就是扇形的重心

那$n\to\infty$時 $\cot\frac{\theta/2}{2^n}/2^n$ 如何呢？

設$\overline{OA}=1$ $\angle AOB=\theta$ $\overline{OP}$平分$\angle AOB$ $P'\in AB$ $\angle MOP$

$=\frac{\theta/2}{2^n}=\angle QOP'$ $P\in\overline{MQ}\wedge\overline{OP'}$ 又$\overleftrightarrow{MN}$、$\overleftrightarrow{ON}$是切線，$N\in\overrightarrow{OP'}$ 我們要用到$\overline{MN}>\widehat{MP'}>\overline{MP}$ 之性質



$$\cot\frac{\theta/2}{2^n}=\frac{\overline{OP}}{\overline{MP}}>\frac{\overline{OP}}{\widehat{MP'}}$$

$$=\cos\frac{\theta/2}{2^n}\Big/\frac{\theta/2}{2^n}$$

$$\therefore\ \cot\frac{\theta/2}{2^n}/2^n>\cos\frac{\theta/2}{2^n}\Big/\frac{\theta}{2}\cdots\cdots(1)$$

$$\cot\frac{\theta/2}{2^n}=\overline{OM}/\overline{MN}=\frac{1}{\overline{MN}}<\frac{1}{\widehat{MP'}}=1\Big/\frac{\theta/2}{2^n}$$

$$\therefore\ \cot\frac{\theta/2}{2^n}/2^n<\frac{1}{\theta/2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)、(2) $2\cos\frac{\theta/2}{2^n}/\theta<\cot\frac{\theta/2}{2^n}/2^n<\frac{2}{\theta}$

當 $n\to\infty$時 $\cos\frac{\theta/2}{2^n}\to1$ $\therefore\ \cot\frac{\theta/2}{2^n}\to\frac{2}{\theta}$

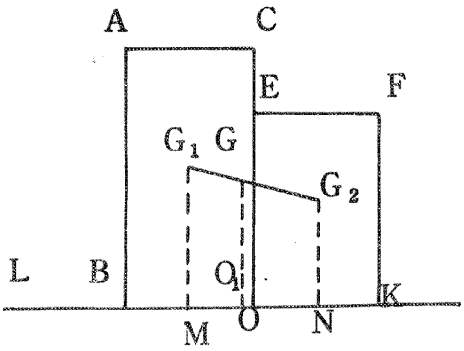
故 $n\to\infty$時 $\overline{OG}=\frac{2}{3}r\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cot\frac{\theta/2}{2^n}/2^n\to\frac{2}{3}r\sin\frac{\theta}{2}\cdot\frac{2}{\theta}$

$$\overline{OG}=4r\sin\frac{\theta}{2}/3\theta$$

由此知扇形之重心G與圓心O之距離 $\overline{OG}=4r\sin\frac{\theta}{2}/3\theta$

(三)拋物線圖形的重心

拋物線圖形可視爲由許多矩形並列構成近似圖形，所以我們將矩形並列後觀察其重心的變化。

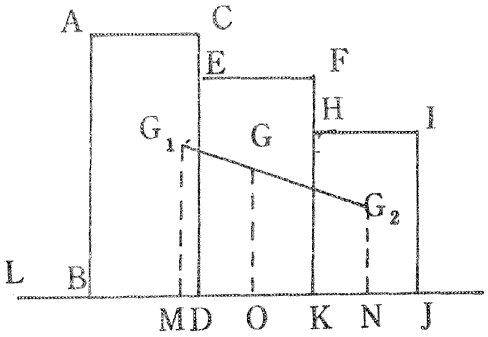


設 $\overline{BD}=\overline{DK}=m$，$\overline{AB}=a$，$\overline{DE}=b$

G_1、G_2是ACDB、EFKD 之重心

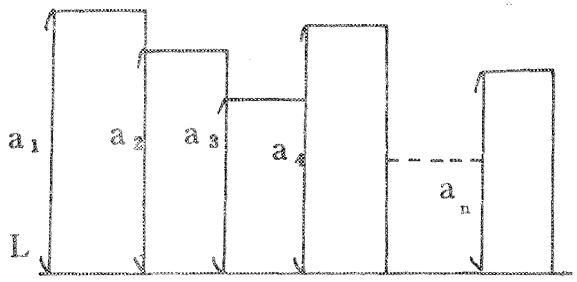
$\overline{GO}=\frac{1}{2}a\cdot a+\frac{1}{2}b\cdot b/a+b$

$=a^2+b^2/2(a+b)$



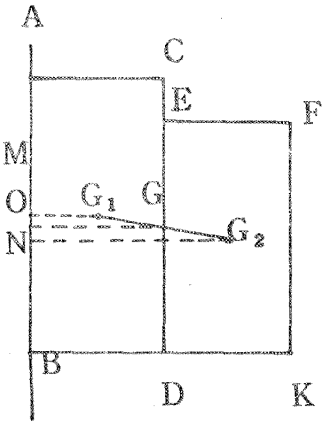
設$\overline{HK}=C$，G_1是ABDKFEC之重心，G_2是HIJK之重心，G是三個並列矩形重心。

$\overline{GO}=a^2+b^2+c^2/2(a+b+c)$



若有n片等寬的矩形並列，其長分別是a_1、a_2……a_n其重心與L之距離是$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2/2$

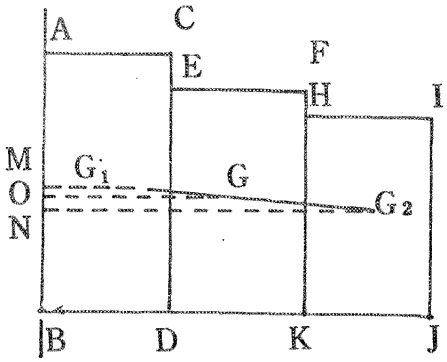
$$(a_1+a_2+\cdots\cdots a_n)=\sum_{R=1}^{n} a_R^2/2\sum_{R=1}^{n} a_R$$



設$\overline{BD}=\overline{DK}=m$，$\overline{AB}=a$，$\overline{DE}=b$

$\overline{GO}=\frac{m}{2}\cdot a+\frac{3}{2}m\cdot b/(a+b)$

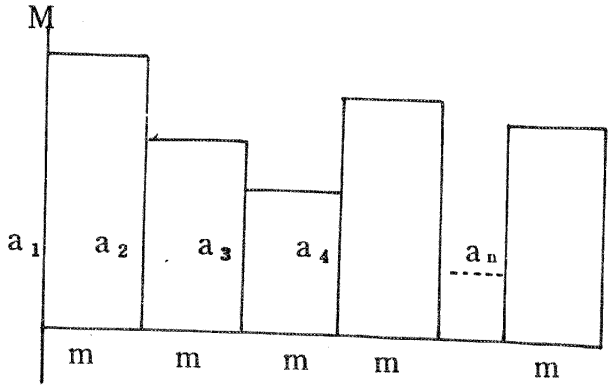
$=m(a+3b)/2(a+b)$



設$\overline{HK}=C$

$\overline{OG}=\frac{m(a+3b)}{2(a+b)}(a+b)+\frac{5}{2}m\cdot C/(a+b)+C$

$=m(a+3b+5C)/2(a+b+C)$

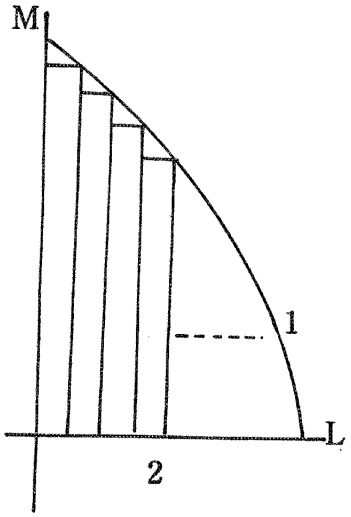


若有n片等寬的矩形並列，其長分別是a_1、a_2 ……a_n，則其重與M之距離是

$$m\,[a_1+3a_2+\cdots+(2n-1)a_n]\,/\,2(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$$
$$=m\sum_{R=1}^{n}(2R+1)\,a_R/\,2\sum_{R=1}^{n}a_R$$

現在我們將二次函數 $y=4-x^2$ $0\leq x\leq 2$ 之圖形分成n片並列矩形，寬爲$\frac{2}{n}$，其長爲$4-(\frac{2R}{n})^2$ $R=1$、$2\cdots\cdots n$

由上面的觀念，其重心與L之距離是 $\sum_{R=1}^{n}[4-(\frac{2R}{n})^2]^2/2\sum_{R=1}^{n}[4-(\frac{2R}{n})^2]$與M之距離是 $\frac{2}{n}\sum_{R=1}^{n}(2R-1)[4-(\frac{2R}{n})^2]/\,2\sum_{R=1}^{n}[4-(\frac{2R}{n})^2]$



有了化簡上式，我們導出下列各式

$$\sum_{R=1}^{n}R=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}\qquad \sum_{R=1}^{n}R^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$

$$\sum_{R=1}^{n}R^3=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}$$

$$\sum_{R=1}^{n}R^4=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}+\frac{n}{30}$$

得到結果是：拋物線圖形之重心與L距離$\frac{8}{5}$，與M距離是$\frac{3}{4}$

五、實驗結果

我們利用木板作模型，用我們的方法找出重心，用鉛筆尖頂起來

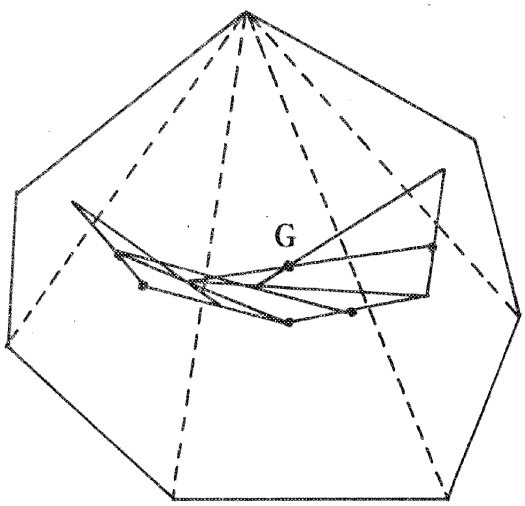
，確實能平衡，證實了我們所找到的方法是正確的。

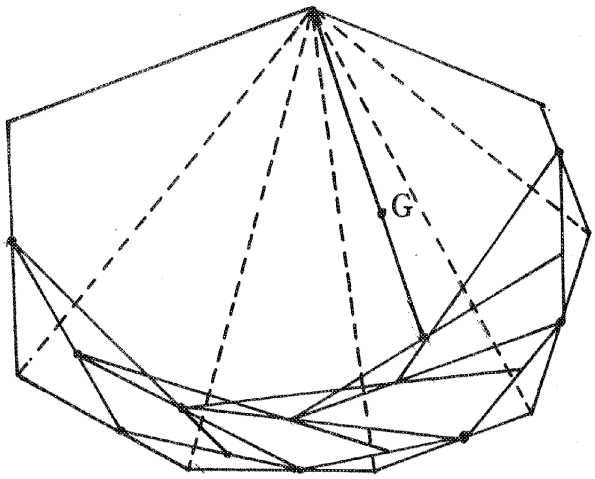
六、討　論

找四邊形重心之方法1的優點是只要作兩個△的重心及利用等線段作圖即可，而方法2是只要用等線段作圖即可，方法3的優點是只要找出邊上中點，再用筆線段與三等分線段的作圖就可找到重心。扇形，只要代入公式，立刻可求出重心與圓心之距離。矩形也一樣，而且我們在計算過程中發現只要求出 $\sum_{R=1}^{n}[4-(\frac{2R}{n})^2]$ 與 $\sum_{R=1}^{n}[4-(\frac{2R}{n})^2]^2$ 之n項的係數，再求出 $\sum_{R=1}^{n}(2R-1)(4-(\frac{2R}{n})^2]$ 之 n^2 項係數，代公式，即可求出重心與L、M之距離。

七、結　論

(一) n邊形可分割成 n－2 片相鄰的△，由每片的重心，可找到n邊形重心的位置，如下圖。

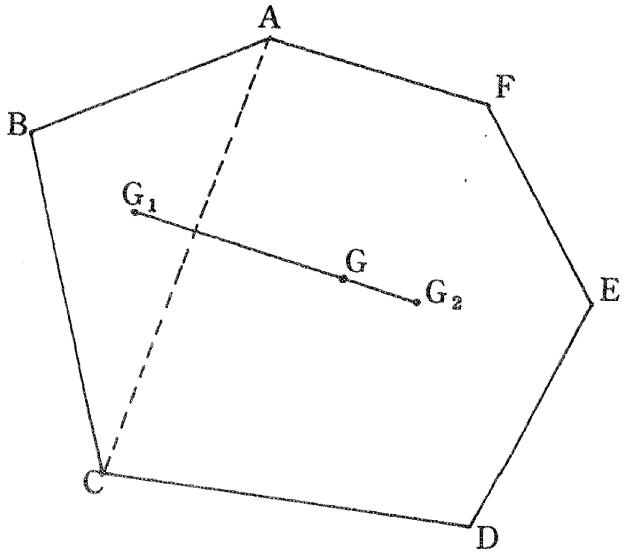


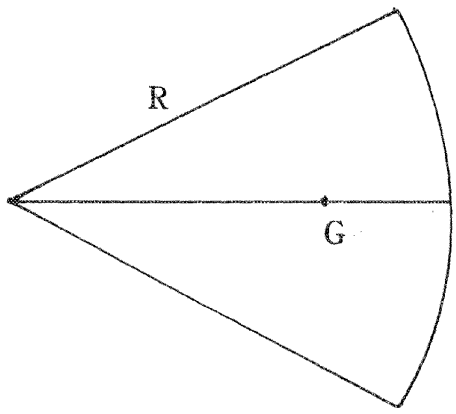


(二) n邊形的重心也可利用邊之中點與對角線找出。如上圖之G即爲八邊形的重心。

(三)多邊形S由一條對角線分成兩個多邊形A與B，其重心分別爲G_1，G_2，若S之重心是G，則$\overline{GG_1}:\overline{GG_2}=B:A$，如下圖。

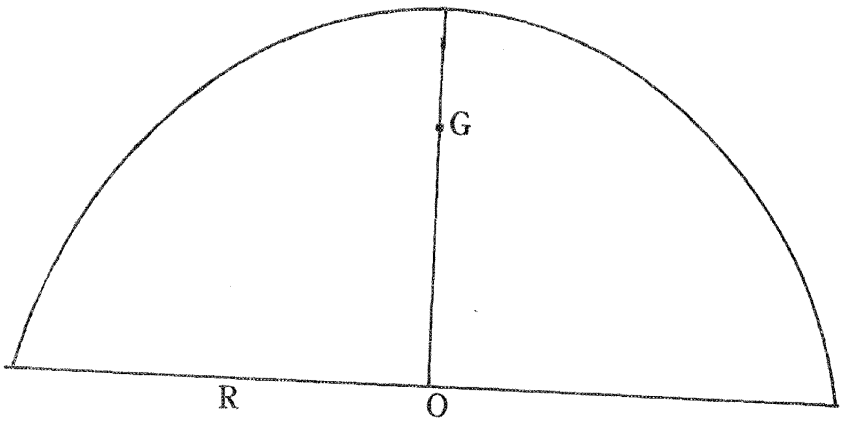
(四)若扇形之半徑是r，扇形角是θ，則其重心在扇形角之平分線上





且與圓心之距離是 $4r\sin\frac{\theta}{2}/3\theta$。

(五)半圓之半徑是 r，則其重心在直徑之中垂線上，且與圓心距離是 $4r/3\pi$。



(六)利用上面的觀念再配合極限的概念，可以找到二次函數圖形或其他函數之重心位置。例如：$y=x^3+1 \quad 0\leq x\leq 4$

將圖形分成 n 片矩形，其寬是 $\frac{4}{n}$，長是 $(\frac{4R}{n})^3+1$，$R=1$，2……n，先求出 $\sum_{R=1}^{n}[(\frac{4R}{n})^3+1]$ 之 n 的係數，再求出 $\sum_{R=1}^{n}[(\frac{4R}{n})^3+1]^2$ 之 n 的係數，代入公式，算出距離 L 是 4327/238 再求出 $\sum_{R=1}^{n}(2R-1)[(\frac{4R}{n})^3+1]$ 之 n^2 的係數，代入公式，算出重心距離 M 是 266/85。

八、參考資料

(一)新三角學講義	朱　豪	大中國圖書公司
(二)極限	楊獻猷	中央書局
(三)數學第四册	國立編譯館	幼獅書局
(四)數列與級數	李福城	建橋出版社

評　語

1. 利用數學的方法決定不規則圖形的重心位置，並輔以具體的實驗，整個問題甚爲完整。
2. 能將所學的有關物理與數學的知識融會應用，研究精神亦佳。