賭徒破產問題解決之探討

高中教師組數學科第三名

省立嘉義高級中學　　作　　者：王秋夫

一、研究動機

賭徒破產問題爲機率名題之一，黃武雄教授多年前曾以醉步問題在嘉義女中，做了一次精彩之演說，遂引起吾人對其解法之研究興趣，而加以探討。

二、研究目的

想以黃教授之講解內容利用線性差分方程式及馬可夫鏈的理論來解賭徒破產問題。

三、研究依據

(一)齊次常係數線性差分方程式的解法。

(二)馬可夫鏈法。

(三)遞廻數列法。

四、問題與解法

【問題】

甲有 a 元乙有 b 元，今展開每局必分勝負之賽局，該賽局前後局之勝負彼此獨立無關，今若甲、乙約定每局輸贏各一元且連續比賽，直到甲、乙有一方破產（輸光）才停止，今假設甲每局得勝之機會爲 p（$0<p<1$），乙每局得勝之機會爲 $q=1-p$，則當賽局結束乙能贏得甲之 a 元的機會有多少？（即甲破產之機率）

【解一】

1. 利用齊次常係數線性差分方程式之解法。

2. 令 $f(k)$ 爲甲持有 k 元而賭至最後破產之機率（$1 \leq k$）令先賭一次，甲成爲（$k+1$）元之機率爲 p，成爲（$k-1$）元之機率爲 $q=1-p$，則 $f(k)=pf(k+1)+qf(k-1)$。

3. 但當甲有 0 元時，無資本可賭，視爲破產，當甲已達 $a+b$ 元時，乙無資本可賭，甲恒不破產。

4. 故 $f(k)=pf(k+1)+qf(k-1)$ 滿足 $f(0)=1$，與 $f(a+b)=0$ 而形成差分方程式（帶邊界值條件）如下：

$$\begin{cases} f(k)=pf(k+1)+qf(k-1) \\ f(o)=1 \\ f(a+b)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} pf(k+2)-f(k+1)+qf(k)=0 \\ f(0)=1 \\ f(a+b)=0 \end{cases}$$

其輔助方程式爲 $pm^2-m+q=0$ （令 $f(x+k)=m^{x+k}$）

$$\Rightarrow \quad m=\frac{1\pm\sqrt{1-4pq}}{2p}=\frac{1\pm\sqrt{1-4p+4p^2}}{2p}$$

$$=\frac{1\pm(2p-1)}{2p}=1 \quad 或 \quad \frac{q}{p}$$

5. ①若 $p \neq q$，m 有二相異實根 1 及 $\frac{q}{p}$，令 $r=\frac{q}{p}$

則 $f(k)=c_1+c_2 \cdot r^k$

$f(0)=1 \Rightarrow c_1+c_2=1$

$f(a+b)=0 \Rightarrow c_1+c_2 \cdot r^{a+b}=0$

解之得 $c_1=\frac{-r^{a+b}}{1-r^{a+b}}$，$c_2=\frac{1}{1-r^{a+b}}$

$$\therefore \quad f(k)=\frac{-r^{a+b}}{1-r^{a+b}}+\frac{r^{k}}{1-r^{a+b}}$$

$$=\frac{r^{k}-r^{a+b}}{1-r^{a+b}}$$

取 $k=a$ 代入得

$$f(a)=\frac{r^{a}-r^{a+b}}{1-r^{a+b}}=\frac{1-r^{b}}{1-r^{a+b}}$$

此即賭至最後甲破產之機率。

6.②若 $p=q=\frac{1}{2}$，則m有二重根 $m=1$

則 $f(k)=c_3+c_4 k \ (\because 1^k=1)$

$f(0)=1 \Rightarrow c_3=1$

$f(a+b)=0 \Rightarrow c_3+c_4(a+b)=0$

$c_3=1$

$$c_4=\frac{-1}{a+b}$$

$$\therefore \quad f(k)=1-\frac{k}{a+b}=\frac{a+b-k}{a+b}$$

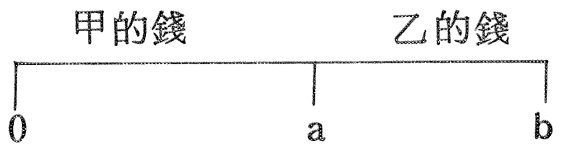
取 $k=a$ 代入得 $f(a)=\frac{b}{a+b}$，此即賭至最後甲破產之機率。

【解二】

利用馬可夫吸收鏈的解法：

［分析］

先將問題設立爲馬可夫鏈，令 $N=a+b$ 表示遊戲中所用的金額，令 0，1，2，……，N等的數爲狀態（State），它表示這個過程在甲手裏有的金額所表現的位置。



若甲贏一次甲的錢增加一元，賭徒的錢少了一元，故這個過程的狀態向右移動一步，若甲輸一次，過程就向左移一步，因此每個過程均有 p 的機率向右移動一步又有 1 − p 的機率向左移動一步。若這個過程到達 N 表示甲已贏得全部的錢，則賭徒破產，若過程到達 0，則甲已破產，因此 0 與 N 爲吸收狀態。

這個過程是吸收馬可夫鏈，我們可利用吸收鏈的公式研究其性質，但因狀態爲數過多，又因矩陣構造相當不簡單，故以特殊方法研究其機率。

［解］

1. 令 x_i 爲從狀態 i 開始時（甲有 i 元）這個狀態被 0 吸收（甲破產）之機率，若 N 爲 5，則 x_0，x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 等 6 個未知數。
2. 設從 i = 2 開始，因這個過程以 p 的機率向 3 狀態移動，以 q = 1 − p 之機率向 1 移動，故 p_r［全輸｜由 2 開始］= p_r［全輸｜由 3 開始］• p + p_r［全輸｜由 1 開始］• q 上式係利用條件機率公式且含有二種變化，不過一旦變成狀態 3 馬可夫吸收鏈重新在 3 再開始移動，故 p_r［全輸｜由 3 開始］= x_3 同理 p_r［全輸｜由 1 開始］= x_1，因此 $x_2 = px_3 + qx_1$

即 $(p+q)x_2 = px_3 + qx_1$

$p(x_2 - x_3) = q(x_1 - x_3)$

$\therefore\ x_1 - x_2 = r(x_2 - x_3)$

但 $r = \dfrac{p}{q}$，故 $r < 1$

3. 這個關係推演到其他狀態得

$$(1)\ \begin{cases} x_0 - x_1 = r(x_1 - x_2) \\ x_1 - x_2 = r(x_2 - x_3) \\ x_2 - x_3 = r(x_3 - x_4) \\ x_3 - x_4 = r(x_4 - x_5) \end{cases}$$

吸收狀態也考慮在內，則 $x_0 = 1$ ， $x_5 = 0$

4. 故

$$
(2)\begin{cases}
x_4 = x_4 \\
x_3 - x_4 = r x_4 \\
x_2 - x_3 = r^2 x_4 \\
x_1 - x_2 = r^3 x_4 \\
x_0 - x_1 = r^4 x_4
\end{cases}
$$

各邊相加得 $x_0 = (1 + r + r^2 + r^3 + r^4)\, x_4$

5. ∵已知 $x_0 = 1$

$$(1 + r + r^2 + r^3 + r^4)(1 - r) = 1 - r^5$$

$$\therefore \quad x_4 = \frac{1 - r}{1 - r^5}$$

6. 由(2)式知 $x_3 = (1 + r)\, x_4 = \dfrac{1 - r^2}{1 - r^2}$

$$x_2 = \frac{1 - r^3}{1 - r^5}, \quad x_1 = \frac{1 - r^4}{1 - r^5}$$

7. 一般式可由

$$
\begin{cases}
x_0 - x_1 = r(x_1 - x_2) \\
x_1 - x_2 = r(x_2 - x_3) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{N-2} - x_{N-1} = r(x_{N-1} - x_N)
\end{cases}
$$

8. $x_0 = 1$ ， $x_N = 0$

$$
\begin{cases}
x_{N-1} = x_{N-1} \\
x_{N-2} - x_{N-1} = r x_{N-1} \\
x_{N-3} - x_{N-2} = r^2 x_{N-1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_0 - x_1 = r^{N-1} x_{N-1}
\end{cases}
$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = (1 + r + r^2 + \cdots\cdots + r^{N-1})\, x_{N-1}$$

$$\Rightarrow \quad x_{N-1} = \frac{1-r}{1-r^N}$$

9. 依此類推對於任何N值可推得其一般式爲：

$$x_a = \frac{1-r^b}{1-r^N} = \frac{1-(\frac{p}{q})^b}{1-(\frac{p}{q})^{a+b}}$$

上式告知我們若甲持有a元，乙持有b元，合計N元，且甲賭勝之機率爲p，又令 $r = \frac{p}{q}$ 時（$r < 1$），則甲破產之機率爲：

$$x_a = \frac{1-r^b}{1-r^N} = \frac{1-(\frac{p}{q})^b}{1-(\frac{p}{q})^{a+b}}$$

由此公式可知 $1-r^N < 1$，故 $x_a \geqslant 1-r^b$ 此項估計值與甲賭本之多寡無關，僅受p及b之影響，若使b足夠大時 $r^b \to 0$，由此幾乎使甲注定全輸。

【解三】

1. 設 $f(k)$ 表甲持有k元時賭至全部破產之機率則 $f(o)=1$，$f(a+b)=0$，令 $q=1-p$。

2. 甲持有k元 $\begin{cases} \xrightarrow{p} \text{甲持有}(k+1)\text{元}\to\text{以後破產之機率爲}f(k+1) \\ \xrightarrow{q} \text{甲持有}(k-1)\text{元}\to\text{以後破產之機率爲}f(k-1) \end{cases}$。

3. $\therefore \quad f(k)=pf(k+1)+qf(k-1)$

$\therefore \quad (p+q)f(k)=pf(k+1)+qf(k-1)$

4. $\therefore \quad p[f(k+1)-f(k)]=q[f(k)-f(k-1)]$

$\therefore \quad f(k+1)-f(k)=\frac{q}{p}[f(k)-f(k-1)]$

5. 設 $f(1)=x$，則

$$f(k)=f(o)+[f(1)-f(o)]+[f(2)-f(1)]+\cdots\cdots+[f(k)-f(k-1)]$$

$$= 1+(x-1)+\frac{q}{p}(x-1)+\left(\frac{q}{p}\right)^2(x-1)+\cdots\cdots$$

$$+\left(\frac{q}{p}\right)^{k-1}(x-1)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

6.①若 $p \neq \frac{1}{2}$，$p>0$，$\Rightarrow \frac{q}{p} \neq 1$，令 $r=\frac{q}{p}$

$$\therefore \quad f(k)=1+(x-1)\frac{-r^k}{1-r}$$

7°∵ $f(a+b)=0$

$$\therefore f(a+b)=1+(x-1)\frac{1-r^{a+b}}{1-r}=0$$

$$\therefore (x-1)=\frac{-(1-r)}{1-r^{a+b}}$$

8°∴ $f(k)=1+(x-1)\frac{1-r^k}{1-r}$

$$=1+\frac{-(1-r)}{1-r^{a+b}}\cdot\frac{1-r^k}{1-r}$$

$$=1-\frac{1-r^k}{1-r^{a+b}}$$

$$=\frac{1-r^{a+b}-1+r^k}{1-r^{a+b}}$$

$$=\frac{r^k-r^{a+b}}{1-r^{a+b}}$$

9°∴ $f(a)=\frac{r^a-r^{a+b}}{1-r^{a+b}}=\frac{1-\left(\frac{1}{r}\right)^b}{1-\left(\frac{1}{r}\right)^{a+b}}$

7.②若 $p=q=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{q}{p}=1$

由 (A) 式知　$f(k)=1+k(x-1)$

由 $f(a+b)=0$ 知　$1+(a+b)(x-1)=0$

$$\therefore x-1=\frac{-1}{a+b}$$

$$\therefore f(k)=1+k\cdot\frac{-1}{a+b}=\frac{a+b-k}{a+b}$$

$$\therefore f(a)=\frac{a+b-a}{a+b}=\frac{b}{a+b}$$

【例 1 】

若甲持有 1 元乙持有 3 元，展開每局必分勝負之賽局，該賽局前後局之勝負彼此無關，今若甲、乙約定每局輸贏各一元且連續比賽，直到甲、乙有一方破產才停止，今假設甲每局得勝之機率爲 $p=\frac{1}{3}$，乙每局得勝之機率爲 $q=\frac{2}{3}$，求當局結束時甲破產之機率爲何？

[解 1]

1. $a=1$，$b=3$，$p=\frac{1}{3}$，$q=\frac{2}{3}$，$\frac{p}{q}=\frac{1}{2}$

2. 代入公式甲破產之機率爲

$$f(a)=\frac{1-(\frac{1}{2})^3}{1-(\frac{1}{2})_4}=\frac{1-\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{14}{15}$$

[解 2]

1. 利用馬可夫鏈設 0 ，1 ，2 ，3 ，4 等五種情況，且設情況 0 與 4 均係吸收情況，則其遞移矩陣爲：

（列於次頁）

$$
p = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\
0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

2. 將 p 化成標準形式：

$$
p = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\left(\begin{array}{cc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\
0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0
\end{array}\right)
\end{array}
\qquad
I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\qquad
\Rightarrow R = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix},
$$

$$
Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}
$$

3. $N=(I-Q)^{-1}=\frac{9}{5}\begin{pmatrix}\frac{7}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9}\\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3}\\ \frac{4}{9} & \frac{2}{3} & \frac{7}{9}\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\frac{7}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{6}{5} & \frac{9}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & \frac{7}{5}\end{pmatrix}$$

4. $B=NR=\begin{pmatrix}\frac{7}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{6}{5} & \frac{9}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & \frac{7}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{14}{15} & \frac{1}{15}\\ \frac{12}{15} & \frac{3}{15}\\ \frac{8}{15} & \frac{7}{15}\end{pmatrix}$

5. 故甲破產之機率爲 $\frac{14}{15}$ 。

五、結　論

㈠職業賭徒使顧客破產的手段有兩種：

1. 小賭場是把遊戲的規則定爲對他們相當有利，即使 r 比 1 小得多而達成目的。這時以較小資本也足夠使賭場得勝。
2. 大賭場因資本雄厚，可擔得起比較公平的遊戲規則。

㈡財富多，技又高一籌，則勝算的機率愈大，財富少，但技高一籌

，則勝算之機率也較高。

㈢解一、二、三導出之方法雖不同，但其結果却是一致的，由公式可知，賭博優勝與否僅與優勝率 p 及賭場賭本 b 之大小有關，與甲之賭本無關，若 b 足夠大時，幾乎注定使甲全輸。

㈣由上結論知資本大及賭技有詐的老千，是最後的贏家。

六、參考書籍

㈠M. R. Spiegel : Theory and, problemes of calculus of finite differences and difference equation.

㈡趙文敏：有限差分之初步。

㈢沈　璿：微分方程式。

㈣呂溪木：近世代數講義。

㈤Kai Lai Chung : Elementary Probability theory with Stochastic Proceses.

㈥Lipschutz : Theory and problems of finite mathematics.

㈦Mosteller : Fifty Challenging Problems in probability.

評　語

1. 取題良好。
2. 有關文獻充分瞭解。
3. 對各種不同解法，有分析比較之精神。
4. 對馬可夫鏈可進一步探究。