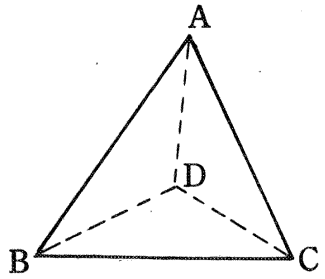
多面體之著色問題

高中組數學科第三名

台灣省立台中女子高級中學　　作　　者：王文惠、周逸玫
黃馨逸
指導教師：陳勝雄

一、研究動機

如果有四種顏色可供選擇，我們想在併排四個正方形格子上（如圖□□□□）著色，假定位置是固定的若限定四格異色，當然就有 P_4^4 種塗法，如果四格不須異色，就有 4^4 種，在同樣條件下，如果塗在一個可翻轉之正四面體上（如圖）E_1 表 ΔABC，E_2 表 ΔABD，E_3 表 ΔACD，例如㈠ $E_1 \rightarrow$ 白，$E_2 \rightarrow$ 黃，$E_3 \rightarrow$ 紅，和㈡ $E_1 \rightarrow$ 紅，$E_2 \rightarrow$ 白，$E_3 \rightarrow$ 黃，根據上面的算法，是㈠㈡兩種塗法，而事實上，當㈠適當地旋轉了 120° 後就是㈡了，所以應視爲同一種塗法，這正多面體對稱的特性，致使塗法數減少，引起我們探討的興趣。



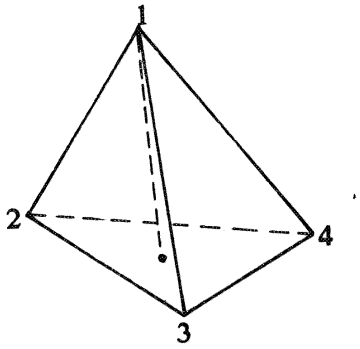
二、本　文

研究正多面體的塗法數，須先探討其對稱的特性，即尋求正多面體可能有的對稱軸，我們分四點討論：(1)點到對頂點（與前一點不同平面）所連成的軸，(2)點到對面中心所連成的軸，(3)稜中點到對稜中點所連成的軸，(4)面中心到對面中心所連成的軸。繞對稱軸旋轉一個固定角度（$0° \leq$ 轉角 $\leq 360°$），如果旋轉 n 次又回到原位，就稱此對稱軸爲 n 次對稱軸，我們現在就分限定各面爲異色與不限定各面爲異色兩種來討論。

㈠限定各面爲異色：

1. 正四面體：

(1)點到面：過正四面體之任一頂點（如圖之 1 ）向其底面作垂直線，則得到一個 3 次對稱軸，



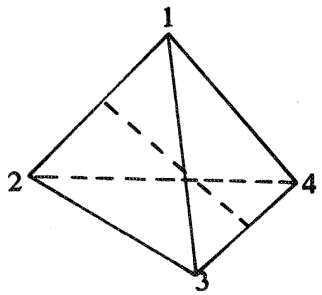
以這個軸旋轉之不變運動有

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 其中 $\begin{pmatrix} a_1 a_2 a_3 a_4 \\ b_1 b_2 b_3 b_4 \end{pmatrix}$

表示 $a_1a_2a_3a_4$ 運動後之位置依次爲 $b_1b_2b_3b_4$ ，因爲正四面體有 4 個頂點，3 次對稱軸就有 4 個，此部分之不變運動數 $G_1 = 4 \times (3-1)+1 = 9$ 。

(2)稜到稜：連接 3 對對稜的中點，得到 3 個 2 次對稱軸，以這個軸旋轉之不變運動有：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，此部份之不變運動數 $G_2 = 3 \times (2-1)+1 = 4$ 。



由(1)，(2)正四面體之不變運動數 G ＝本身＋$(G_1-1)+(G_2-1)$ 即 $G = 1+8+3 = 12$ 。

討論：

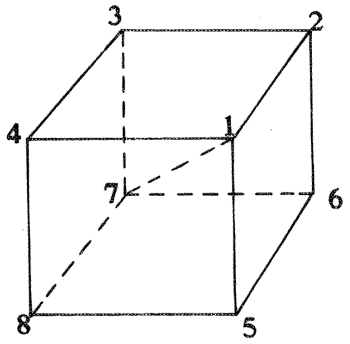
ㄅ. 由(1)，(2)可知，此 12 種圖形表面看起來雖不同，但事實上其相關位置均不曾改變，∴將此 12 種視爲同一種，故若有 4 種顏色欲塗於其上則方法共有 $\dfrac{\text{直線排列數}}{\text{不變運動數}}$

$= \dfrac{C_4^4 \times 4!}{12}$ 種。

ㄆ. 若有 n 種顏色（ $n \geq 4$ ）欲塗於正四面體之各個面上，

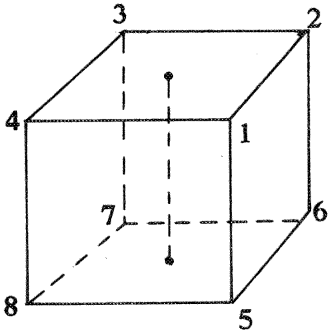
則其方法共有 $\dfrac{C_4^n \times 4!}{12}$ 種。

2. 正六面體：

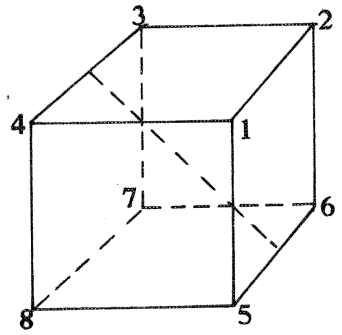


(1)點到點：通過立方體的一個頂點（如1）和它的對頂點（如7）就得到1個3次對稱軸。因爲正六面體有8個頂點可得4個3次對稱軸，

∴此部份之不變運動數 $G_1 = 4 \times (3-1)+1=9$。



(2)面對面：通過立方體每對對面的中心可得到一個4次對稱軸。∵六面體有6面，可得3個4次對稱軸，此部份之不變運動數 $G_2 = 3 \times (4-1)+1 = 10$。



(3)稜到稜：通過立方體每對對稜的中心，可得到1個2次對對稱軸，∵六面體有12個稜可得6個2次對稱軸，∴此部份之不變運動數 $G_3 = 6 \times (2-1)+1=7$。

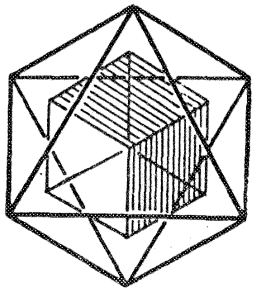
由(1)、(2)不變運動數 G ＝本身＋$(G_1-1)+(G_2-1)+(G_3-1)$，即 $G=1+4\times(3-1)+3\times(4-1)+6\times(2-1)=24$。

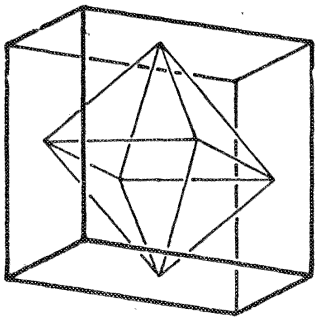
討論：

由上可知，若有 n 種顏色（$n \geq 6$）可供選擇於六面體之各個面上，則可得 $\dfrac{C_6^n \times 6!}{24}$ 種方法。

3. 正八面體：

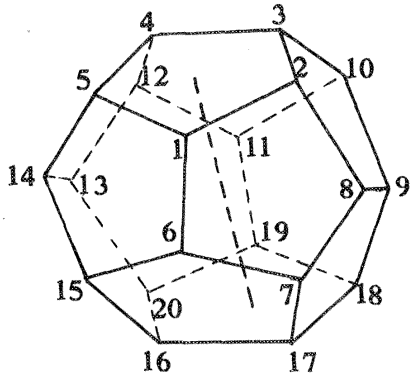
因爲連接八面體各面之中心，可得正六面體，而六面體之



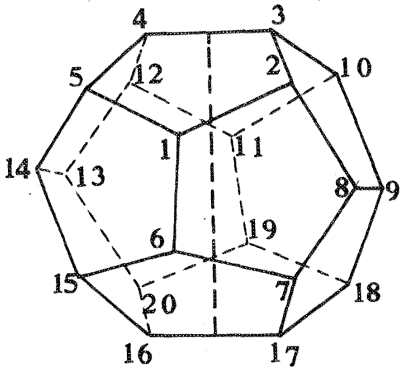


各面中心之連接又可得正八面體，故正八面體之不變運動數同於正六面體，不須再討論。若有 n 種顏色（ $n \geq 8$ ）可供選擇，塗於正八面體上，則有 $\dfrac{C_8^n \times 8!}{24}$ 種方法。

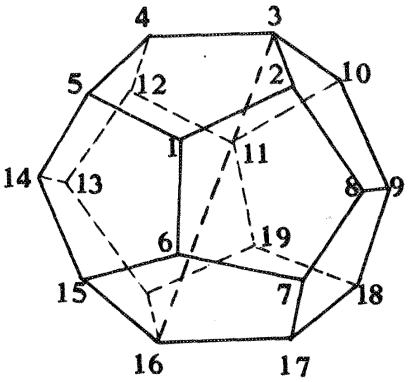
4. 正十二面體：



(1)面對面：每對對面的中心決定 1 個 5 次對稱軸，∵十二面體有 12 個面，∴共有 6 個 5 次對稱軸，此部份之不變運動數 $G_1 = 6 \times (5-1) + 1 = 25$ 。



(2)稜到稜：每對對稜的中點決定 1 個 2 次對稱軸，∵十二面體有 30 個稜，∴共有 15 個 2 次對稱軸，此部份之不變運動數 $G_2 = 15 \times (2-1) + 1 = 16$ 。



(3)點到點：每對對角的頂點決定 1 個 3 次對稱軸，∵十二面體有 20 個頂點，∴共有 10 個 3 次對稱軸，此部份之不變運動數 $G_3 = 10 \times (3-1) + 1 = 21$ 。

由(1)、(2)、(3)十二面體之所有不變運動數 G ＝本身＋（ G_1－

1）＋（G_2 －1）＋（G_3 －1）即G ＝ 1＋（25－1）＋（16－1）＋（21－1）＝60 。

討論：

由上可知，若有 n 種顏色（ n ≥ 12 ） 可供選擇塗於十二面體之各面上，則有（ C^n_{12} × 12! ）÷ 60 種方法。

5. 正二十面體：

因正二十面體各面的中心聯結起來成了正十二面體，反之，正十二面體各面之中心聯結起來，亦成爲一個正二十面體，∴正二十面體之不變運動數同於正十二面體，不必另外再考慮。若有 n 種顏色（ n ≥ 20 ）可供選擇，塗於正二十面體之各面上，則有 $\frac{C^n_{20} \times 20!}{60}$ 種方法。

㈡不限定各面爲異色：

當討論正多面體塗色問題，不限定每面均異色時，正多面體對稱情形雖跟㈠的討論類似，但顏色可能也對稱，∴就不能再用（直綫排列數）÷（不變運動數）來解決問題了。那麼該如何解決這個問題呢？讓我們先簡化成直綫的情形來討論。

例　以黑白兩種珠子串成如圖~~○○○~~，求其方法數？

設珠子之三位置爲（ 1 2 3 ）珠子之顏色爲（ ○ , ● ），S爲塗法數，可得S有 2^3 個，即S ＝｛（○○●），（●○○），（○●●），（●●○），（○○○），（○●○），（●○●），（●●●）｝，再由 $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix}$ 對稱關係，2→2顯然爲同一物，則2 2′ 位置有○，●兩種選擇，又由1→3且3→1，當我們把1，3視爲同一物時，（即1塗什麼色，3就塗什麼色），1、3又有○，●兩種選擇，即共有2 × 2（○●○）（●●●）（●○●）（○○○）四種可能情形……（ * ）。這四種情形，因1、3同色，例如○●○倒過來還是○●○，在S中本來就只是一種情形，

沒有重覆算兩遍。再如(a)○○●（1、3不同色），倒過來變成(b)●○○，在S中算是2次，但事實上是同一物，變成重覆算兩遍。觀察S中之元素發現(a)（○○●），(b)（●○○），(c)（○●●），(d)（●●○），（a、b）可視爲同一物，（c、d）視爲同一物，但重覆算兩遍倘若把S之所有元素，再加上（＊）中之四元素，則S中眞正不同之元素各重覆算兩遍，∴要將其除以2，卽可得塗法數＝½（2^3＋2×2），故珠子若有n種顏色可供選擇，則塗法數＝

$$\frac{1}{2}(n^3+n^2)。$$

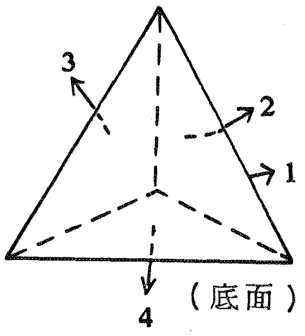
1. 正四面體：

由例之方法，我們拿來研究正四面體之着色問題。先設僅有黑白兩種顏色可供選擇，不考慮其對稱關係時，可能情形有$2^4=16$種，卽S：

面＼塗色法	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭	⑮	⑯
1	○	○	●	●	○	○	●	●	●	○	○	○	●	●	●	○
2	○	○	●	●	○	●	○	●	○	●	●	○	○	●	○	●
3	○	○	●	●	●	○	○	○	●	●	○	●	○	○	●	●
4	○	●	○	●	○	○	○	○	○	○	●	●	●	●	●	●

我們再研究其可能之對稱情形：

(1)不動：$\left(\begin{matrix}1&2&3&4\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 1&2&3&4\end{matrix}\right)\Rightarrow 2^4$



(2)對稱軸是點到面時，旋轉120°有2種（左旋，右旋）轉法：

$\left(\begin{matrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{matrix}\right)$，4→4，顯然爲同一物，有

○，●兩種選擇，又由 $\begin{matrix}1&2&3\\2&3&1\end{matrix}$ 和 $\begin{matrix}1&2&3\\3&1&2\end{matrix}$ 當我們把

1，2，3 視爲同一物時，共有 2 × 2（○○○●）（○○○○）（●●●○）（●●●●），四種可能情形……（＊）觀察 S，可發現除這四種外，其餘 12 種，每三個可視爲同一種塗法，（如：⑤⑥⑦，可視爲同一種），這些都重覆算了 3 遍，∴倘若把（S之所有元素）＋［（＊）之四元素×2］即相當於在目前這個階段塗法數的 3 倍。但可能的對稱情形不止於此。對稱軸是點到面的有 4 個，∴（S之所有元素）＋［（＊）之四元素× 2 × 4］⇒即 $2^4 + 8 \times 2^2$ ⇒ 相當於目前這個階段塗法數的 9 倍。

(3)對稱軸是稜到稜時，除不動之外的旋轉僅 1 種轉法

$\left(\begin{matrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{matrix}\right)$ 同樣的，我們將 1、2 視爲同物，3、4 又視爲同物，共有 2 × 2（○○●●）（○○○○）（●●○○）（●●●●）……（＊）（＊） 4 種可能情形。觀察 S 可發現除這 4 種外，其餘 12 種，每 2 個可視爲同一種塗法（如：⑥，⑦可視爲同一物），這些都重覆算了 2 遍再加上此種對稱軸有 3 個，∴連接(2)後面的結論，正四面體之塗法數爲：

$\frac{1}{1+8+3}$ {（S之所有元素）＋［（＊）之四元素×2 × 4］＋{（＊）（＊）之四元素× 3 ］} 即 $\frac{1}{12}(2^4 + 8 \times 2^2 + 3 \times 2^2)$。

結論：

ㄅ．n 種顏色在一正四面體之著色法有 $\frac{1}{12}(n^4+8n^2+3n^2)$。

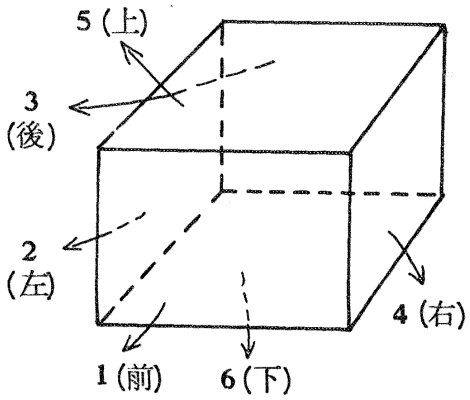
ㄆ. 正四面體各面的中心聯結起來還是正四面體（如圖），所以我們討論其面的塗色問題，亦相當於其四頂點塗色問題。

ㄇ. 由上面正四面體的情形，我們可以知道，研究正多面體著色問題，各面不須異色時，首先我們仍必須研究其對稱關係(1)不動(2)以後是不動以外的可能對稱情形，寫出轉法，轉法中第一列之部份元素所成集合若與其在第二列對應元素所成集合相等，符合這種條件之最小集合個數，以 ℓ 表之。例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\ell = 2$，有 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$，又如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ 有 $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$，故 $\ell = 3$，則若有 n 種顏色可供選擇，其塗法數即是：$\dfrac{1}{\text{不變運動數}}$ $(n^{\ell_1} + a \cdot n^{\ell_2} + b \cdot n^{\ell_3} + c \cdot n^{\ell_4} + \cdots\cdots)$。（a，b，c……表可能的對稱個數）

2. 正六面體：

(1)不動 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\ell_1 = 6$。

(2)對稱軸是面到面時（如圖），旋轉 90° 有 2 種（左旋、右旋），又有 3 個對稱軸，∴共 $3 \times 2 = 6$ 種，轉法：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \ell_3 = 3$。



(3)對稱軸仍是面到面，但轉 180° 時有 1 種（本身不算），有 3 個此種對稱軸∴共 3 種。轉法：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \ell_3 = 4$。

(4)對稱軸是稜到稜，爲6個2次對稱軸，∴ $6\times(2-1)=6$ 種，轉法：$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&3&2&1&6&5\end{pmatrix}\Rightarrow \ell_4=3$。

(5)對稱軸是點到對頂點，爲4個3次對稱軸，∴ $4\times(3-1)=8$ 種，轉法：$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&2&6&3&1\end{pmatrix}\Rightarrow \ell_5=2$。

結論：

ㄅ. n種顏色在一正六面體各面著色之塗法有

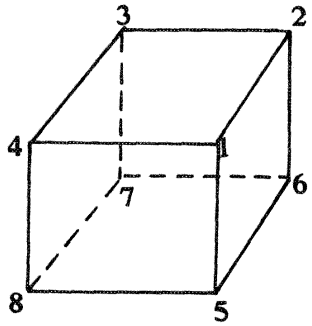
$$\frac{1}{24}(n^6+6n^3+3n^4+6n^3+8n^2)$$

ㄆ. 由㈠3.我們得知：正六面體之各面中心連接得正八面體，當我們翻轉正六面體時，八面體運動情形仍同，∴算正六面體各面塗色問題，亦相當於算正八面體頂點塗色問題，反過來說，算八面體各面塗色問題，相當於在正六面體頂點塗色問題。

3.正八面體⇒轉化爲正六面體頂點塗色問題：

(1)不動：$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&3&4&5&6&7&8\end{pmatrix}\Rightarrow \ell_1=8$。

(2)當以面到面對稱軸時，旋轉90°有2種（左旋、右旋），又此種對稱軸有3個∴共有 $3\times2=6$ 種，轉法：$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&1&2&3&8&5&6&7\end{pmatrix}$



$\Rightarrow \ell_2=2$。

(3)同(2)但轉180°時，有一種（本身不算）∴共有 $3\times1=3$ 種，轉法：$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&4&1&2&7&8&5&6\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \ell_2=4$。

(4)當以稜到稜爲對稱軸時，爲6個2次對稱軸，但須扣除本身

，∴ 6 × (2 − 1) = 6 種，轉法：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \ell_4 = 4$。

(5)當以點到點爲對稱軸時，爲 4 個 3 次對稱軸，∴ 4 × (3 − 1) = 8 種，轉法：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \ell_5 = 4$。

結論：

$$\frac{1}{24}\left(n^8 + 6n^2 + 3n^4 + 6n^4 + 8n^4 \right)$$

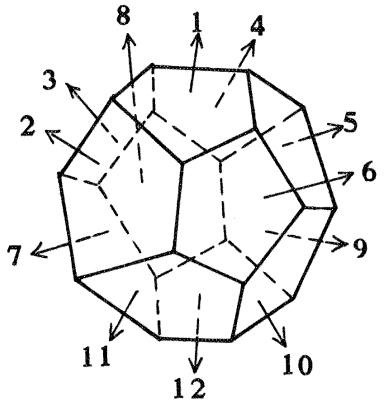
4. 正十二面體：

(1)不動：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \ell_1 = 12$

(2)當以面到面爲對稱軸時，爲 6 個 5 次對稱軸，∴ 6 × (5 − 1) = 24 種，轉法：

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 11 & 7 & 8 & 9 & 10 & 12 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \ell_4 = 4$。



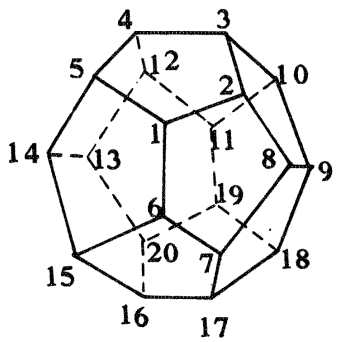
(3)當以稜到稜爲對稱軸時，爲 15 個 2 次對稱軸，∴ 15 × (2 − 1) = 15 種，轉法：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 9 & 5 & 1 & 3 & 8 & 10 & 6 & 2 & 7 & 12 & 11 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \ell_3 = 6$。

(4)當以點到點爲對稱軸時，爲 10 個 3 次對稱軸，∴ 10 × (3 − 1) = 20 種，轉法：

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 4 & 9 & 10 & 6 & 1 & 8 & 12 & 11 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \ell_4 = 4$。



結論：

$$\frac{1}{60} \times \left(n^{12} + 24n^4 + 15n^6 + 20n^4 \right)$$

5. 正二十面體⇒轉化爲算十二面體的頂點：

(1)不動：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \ell_1 = 20$

(2)以面到面爲對稱軸時，爲 6 個 5 次對稱軸，$6 \times (5-1) = 24$ 種，

轉法：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 14 & 15 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 20 & 16 & 17 & 18 & 19 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\ell_2 = 4$。

(3)以稜到稜爲對稱軸時，爲 15 個 2 次對稱軸，$\therefore 15 \times (2-1) = 15$ 種，轉法：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 12 & 13 & 14 & 5 & 4 & 11 & 19 & 20 & 16 & 15 & 6 & 1 & 2 & 3 & 10 & 9 & 18 & 17 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \ell_3 = 10$。

(4)當以點到點爲對稱軸時，爲 10 個 3 次對稱軸，$\therefore 10 \times (3-1) = 20$ 種，轉法：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 9 & 10 & 3 & 2 & 8 & 18 & 19 & 11 & 12 & 4 & 5 & 1 & 6 & 7 & 17 & 16 & 20 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \ell_4 = 8$。

結論：

$$\frac{1}{60}\left(n^{20} + 24n^4 + 15n^{10} + 20n^8 \right)$$

三、總　結

多面體之著色問題，亦可照正多面體著色問題的方法探討其對稱關係而求出塗法數。

四、參考資料

㈠人間數學通俗講話：對稱。

㈡數學傳播第四卷第二期。

評語 1. 本作品爲作者在教科書中排列組合單元中所觸發聯想到的問題，利用幾何的對稱觀念研究多面體之着色問題。

2. 作品完全由作者獨立研究的成果，數學結論具完整性，討論過程相當嚴密。

3. 作者已能了解體會數學的精神與態度，在校成績極佳，且有志於從事數學研究工作，應予鼓勵並栽培。