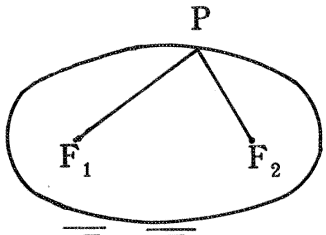
橢圓的衍生—蛋形方程式

高中組數學科第三名

省立台南家齊女中　　作　　者：林昀初等五人
指導教師：吳安生、黃正成

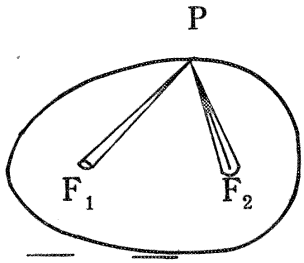
一、研究動機

㈠在高中數學課本（東華本自然組第四冊）中，我們學到橢圓的定義和作圖。其定義如下：一動點P（x，y）到兩定點F_1（c，o）、F_2（－c，o）的距離和爲一定值，即$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$。（2a表橢圓的長軸長）。



$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$

㈡在數學圈雜誌（第2卷第四期）上提到了數學一般化的觀念。繪出$m\overline{PF_1}+n\overline{PF_2}=k$的圖形，而橢圓即爲m＝n的特殊結果。$m\overline{PF_1}+n\overline{PF_2}=k$，$k>\overline{F_1F_2}$的圖形稱爲“笛卡兒蛋形”，繪出如$2\overline{PF_1}+3\overline{PF_2}=k$之類的圖形，但能像橢圓一樣用方程式表出嗎？



$2\overline{PF_1}+3\overline{PF_2}=k$

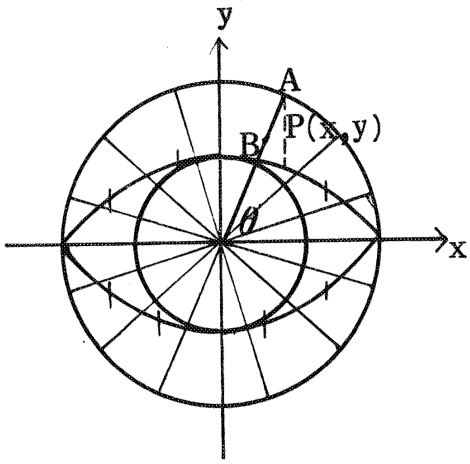
㈢將“$m\overline{PF_1}+n\overline{PF_2}=k$”這一式子化成方程式，發現此乃一二元四次方程式，所求出的解有虛根、增根、減根等現象產生，我們認爲此方程式很繁雜，因此就著手尋找一較簡便的方程式來表示。

二、研究目的

求卵形方程式。

三、研究過程及結果

因爲橢圓的另一參數作圖法爲將兩同心圓（大圓半徑 a ，小圓半徑 b ），由圓心任作一射線交大小兩圓於A 、B ，由A 、B 兩點各做 x 軸、y 軸的垂線交於P點，此P點的軌跡即爲橢圓。令 θ 爲射線與 x 軸的夾角，可得橢圓的參數式



$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$$

由此定義法使我們想到若是兩圓不同同心時，其圖形爲何？我們繪出幾個圖後，發現圖形與卵形很相似，所以就朝這個目標——求卵形的方程式——邁進。

㈠以小圓圓心爲原點：

大小兩圓，大圓半徑 a ，小圓半徑 b ，連心距 d ，取小圓的圓心爲原點，由原點任作一射線交大圓於A 點，小圓於B 點。

點集合 $P=\{(x,y)\mid(x,y)=(A_x,B_y)$，$A_x$即取A之 x 軸座標，$B_y$ 即取B之 y 軸座標$\}$ 則點集合P即可爲卵形。

吾人將討論其方程式如下：

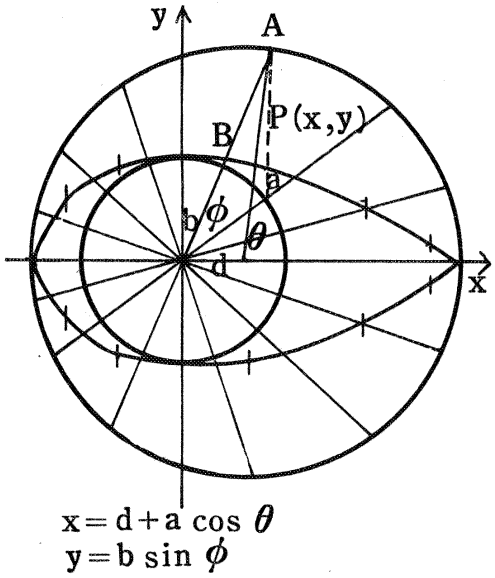
甲類 1. 內離時：

由正弦定律

$$\frac{a}{\sin\phi}=\frac{d}{\sin(\theta-\phi)}$$

$$a\sin\theta\cos\phi - a\cos\theta\sin\phi = d\sin\phi$$

(1) $\phi=0$，π 時，θ 亦爲 0，π　　∴原式成立



(2) $\phi \neq 0$，π 時，$\theta \neq 0$，π　　∴同除 $\sin\phi$

$$a\sin\theta\cot\phi - a\cos\theta = d$$

$$a\sin\theta\cot\phi - (x-d) = d$$

$$\therefore\quad x = a\sin\theta\cot\phi \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\cos\theta = \frac{x-d}{a} \Rightarrow \sin\theta = \pm\frac{\sqrt{a^2-(x-d)^2}}{a} \quad ②$$

$$\sin\phi = \frac{y}{b} \Rightarrow \cot\phi = \pm\frac{\sqrt{b^2-y^2}}{y} \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

將②③代入①並平方

$$x^2 = a^2 \times \frac{[a^2-(x-d)^2]}{a^2} \times \frac{(b^2-y^2)}{y^2}$$

$$\therefore\quad x^2y^2 = [a^2-(x-d)^2](b^2-y^2)$$

此時 $d < a - b$

2. 內切時

利用正弦定律亦可導出

$$x^2y^2 = [a^2-(x-d)^2](b^2-y^2)$$

此時 $d = a - b$

3. 相交時

同上導得方程式爲

$$x^2y^2 = [a^2-(x-d)^2](b^2-y^2)$$

此時 $a - b < d < a + b$

4. 外離時

同上導得方程式爲

$$x^2y^2 = [b^2(x-d)^2](a^2-y^2)$$

此時 $d > a + b$

5. 外切時

同上導得方程式爲

$$x^2y^2 = [b^2-(x-d)^2](a^2-y^2)$$

此時 $d = a + b$

點集合 $P=\{(x,y)\mid(x,y)=(B_x,A_y)$，$B_x$ 即取 B 之 x 軸座標，A_y 即取 A 之 y 軸座標$\}$ 則點集合 P 即可爲卵形。

吾人將討論其方程式如下：

乙類 1. 內離時

導得方程式爲：此時 $a-b>d$

當 $\theta\in$ Ⅰ，Ⅱ

$$(a^2-y^2)(b^2-x^2)=x^2y^2-2xyd\sqrt{b^2-x^2}+d^2(b^2-x^2)$$

當 $\theta\in$ Ⅲ，Ⅳ

$$(a^2-y^2)(b^2-x^2)=x^2y^2+2xyd\sqrt{b^2-x^2}+d^2(b^2-x^2)$$

2. 內切時　導得方程式爲：此時 $a-b=d$

當 $\theta\in$ Ⅰ，Ⅱ

$$(a^2-y^2)(b^2-x^2)=x^2y^2-2xyd\sqrt{b^2-x^2}+d^2(b^2-x^2)$$

當 $\theta\in$ Ⅲ，Ⅳ

$$(a^2-y^2)(b^2-x^2)=x^2y^2+2xyd\sqrt{b^2-x^2}+d^2(b^2-x^2)$$

3. 相交時　導得方程式爲：此時 $a-b<d<a+b$

當 $\theta\in$ Ⅰ，Ⅱ

$$(a^2-y^2)(b^2-x^2)=x^2y^2-2xyd\sqrt{b^2-x^2}+d^2(b^2-x^2)$$

當 $\theta\in$ Ⅲ，Ⅳ

$$(a^2-y^2)(b^2-x^2)=x^2y^2+2xyd\sqrt{b^2-x^2}+d^2(b^2-x^2)$$

證明：當在橢圓圖形中，取大圓 y 軸，小圓 x 軸則得到倒立的橢圓。而當我們在作卵形圖時，取大圓 y 軸、小圓 x 軸，所得的圖形則爲變形之卵形。

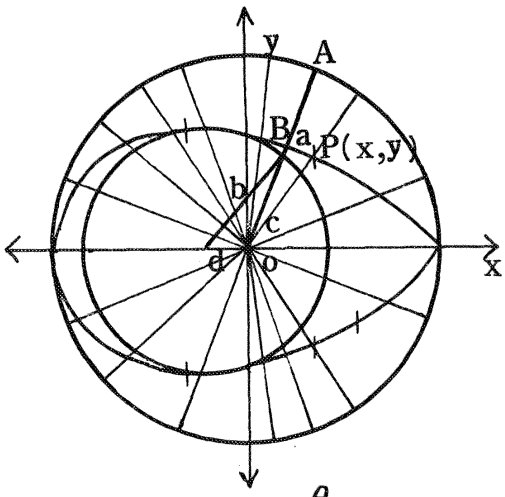
㈡以大圓圓心爲原點：

大小兩圓，大圓半徑 a，小圓半徑 b，連心距 d，取大圓的圓心爲原點，由原點任作一射線交大圓於A點，小圓於B點。

點集合 $P=\{(x,y)\mid(x,y)=(A_x,B_y)$，$A_x$ 卽取A之 x 軸座標，B_y 卽取B之 y 軸座標$\}$ 則點集合 P 卽爲卵形。

吾人將討論其方程式如下：

丙類 1. 內離時



$x=a\cos\theta$
$y=b\sin\phi$

由正弦定律

$$\frac{b}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{d}{\sin(\theta-\phi)}$$

$b\sin\theta\cos\phi-$

$\quad b\cos\theta\sin\phi$

$=d\sin\theta$

$b\cos\phi-b\cot\theta\sin\phi$

$=d$　兩邊平方

$b^2\cos^2\phi=(b\cot\theta\sin\phi+d)^2$

$b^2-b^2\sin^2\phi=(b\cot\theta\sin\phi+d)^2$

$b^2-y^2=(y\cot\theta+d)^2$

又　$a\cos\theta=x$

∴當　$\theta\in$ Ⅰ，Ⅱ

$$\cos\theta=\frac{x}{a}\Rightarrow\cot\theta=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\Rightarrow(b^2-y^2)(a^2-x^2)=x^2y^2+2xyd\sqrt{a^2-x^2}+d^2(a^2-x^2)$$

當　$\theta\in$ Ⅲ，Ⅳ

$$\cos\theta=\frac{x}{a}\Rightarrow\cot\theta=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\Rightarrow(b^2-y^2)(a^2-x^2)=x^2y^2-2xyd\sqrt{a^2-x^2}+d_2(a^2-x^2)$$

此時 $d<a+b$

2. 內切時　方程式爲

當　$\theta \in$ Ⅰ，Ⅱ

$$(b^2-y^2)(a^2-x^2)=x^2y^2+2xyd\sqrt{a^2-x^2}+d^2(a^2-x^2)$$

當　$\theta \in$ Ⅲ，Ⅳ

$$(b^2-y^2)(a^2-x^2)=x^2y^2-2xyd\sqrt{a^2-x^2}+d^2(a^2-x^2)$$

此時 $d=a-b$

3. 相交時　方程式爲

當　$\theta \in$ Ⅰ，Ⅱ

$$(b^2-y^2)(a^2-x^2)=x^2y^2+2xyd\sqrt{a^2-x^2}+d^2(a^2-x^2)$$

當　$\theta \in$ Ⅲ，Ⅳ

$$(b^2-y^2)(a^2-x^2)=x^2y^2-2xyd\sqrt{a^2-x^2}+d^2(a^2-x^2)$$

此時 $a-b<d<a+b$

點集合 $P=\{(x,y)\mid(x,y)=(B_x,A_y)$，$B_x$ 卽取 B 之 x 軸座標，A_y 卽取 A 之 y 軸座標 $\}$ 則點集合 P 卽爲卵形。

吾人將討論其方程式如下：

丁類 1. 內離時　方程式爲

$[b^2-(x+d)^2](a^2-y^2)=x^2y^2$　此時 $a-b>d$

2. 內切時　方程式爲

$[b^2-(x+d)^2](a^2-y^2)=x^2y^2$　此時 $a-b=d$

3. 相交時　方程式爲

$[b^2-(x+d)^2](a^2-y^2)=x^2y^2$

此時 $a-b<d<a+b$

4. 外離時　方程式爲

$[a^2-(x-d)^2](b^2-y^2)=x^2y^2$　此時 $a>a+b$

5. 外切時　方程式爲

$[a^2-(x-d)^2](b^2-y^2)=x^2y^2$　此時 $d=a+b$

四、結　論

㈠在內離（ $d < a - b$ ）時，卵形之長軸長恰爲大圓的直徑，短軸長恰爲小圓直徑。

［註］：(1)長軸長表卵形圖形之最長距離。

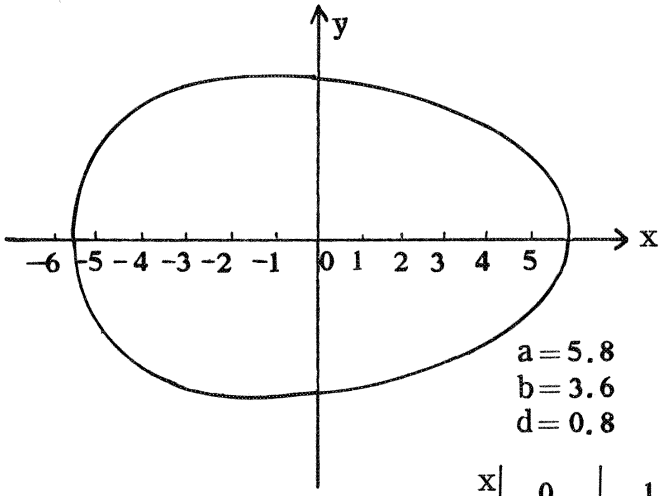
(2)短軸長表卵形圖形之最寬距離。

㈡當兩圓內離時，由大（小）圓圓心所作之射線與兩圓的交點，僅可得一動點P，得一確定之卵形。當兩圓外離時，却可得兩動點（遠近兩點），同時取兩點之座標則卵形卽可成立。

㈢若給一卵形或拿鷄蛋作投影所得的蛋形欲知其方程式可先畫出其長軸長、短軸長及作出長軸、短軸的中點，此爲內切圓與外切圓的圓心，使可知連心距，代入標準式（F①②二式）中，卽可求出其方程式。

㈣在方程式① $x^2y^2 = [a^2 - (x-d)^2](b^2 - y^2)$ 及② $(a^2 - y^2)(b^2 - x^2) = x^2y^2 \pm 2xyd\sqrt{b^2 - x^2} + d^2(b^2 - x^2)$ 中所給予 a、b、d 可決定各種曲度不盡相同的卵形。

㈤我們已知由笛卡兒作圖，可繪出一卵形，先測出其長軸長（2a）與短軸長（2b）後，我們可分別利用長軸長與短軸長爲直徑繪出



$x^2y^2 = [33.6 - (x-0.8)^2][13 - y^2]$

$33y^2 + 13x^2 + 1.6xy^2 = 450$

（附圖一）

x	0	1	−1	2	−2	3	−3	4	−4	5	−5	5.88	−5.88
y	±3.69	±3.55	±3.73	±3.32	±3.65	±2.97	±3.44	±2.48	±3.02	±1.75	±2.24	0	0

兩內離的圓，並求出圓心距d，將a、b、d代入已導出之內離公式中，描點所繪出的圖形竟與笛卡兒蛋形作圖所畫出的圖形吻合。（如附圖一）且利用參數作圖所畫出的卵形，無論以小圓圓心爲原點出發或以大圓圓心爲原點出發，也皆與笛卡兒蛋形相同，因此說明我們欲求一簡易方程式的目的已達成。

因此證明利用方程式求出的坐標點所描繪出的卵形恰與笛卡兒蛋形重疊。

(六)在 $m\overline{PF_1}+n\overline{PF_2}=k$ 之蛋形方程式中，若固定k，而逐漸增長 $\overline{F_1F_2}$，則笛卡兒蛋形漸扁，若固定 $\overline{F_1F_2}$ 的長，變動k，則所得之蛋形僅改變3大小，曲率並不改變。（如附圖二）（參考補充資料）

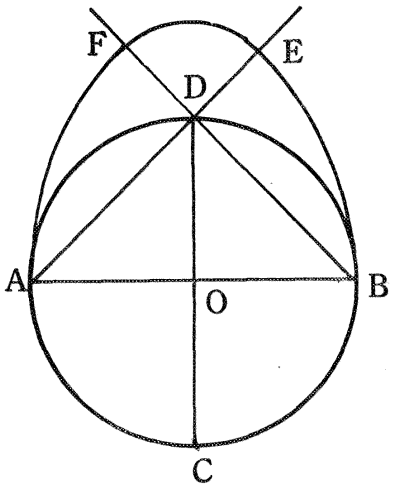
五、研究發展

(一)在我們生活的周遭裡，應用到非常多的幾何圖形，現在將卵形的作圖法一般化後，可使生活圈中的圖案在您巧妙的安排下更具色彩。

(二)在美術課本中提到卵形的作圖法（說明一），但那只爲近似的圖形，而我們的作圖法可畫出較準確的圖形及求出此圖形方程式，此方程式求出後，設計師們在運用上可依實際需要代入方程式中，即可得出理想卵形。

［說明一］其作圖法如下：

1. 設O圓爲已知單位圓。
2. 過圓心O點互爲垂直的直徑 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 交圓周於A、B、C、D各點。
3. 連結 $\overline{AD}$ 和 $\overline{BD}$ 且各延長之。
4. 各以A、B爲圓心



圖一

，$\overline{AB}$ 長爲半徑作弧，各交 $\overline{AD}$ 和 $\overline{BD}$ 之延長線於 E、F 點。

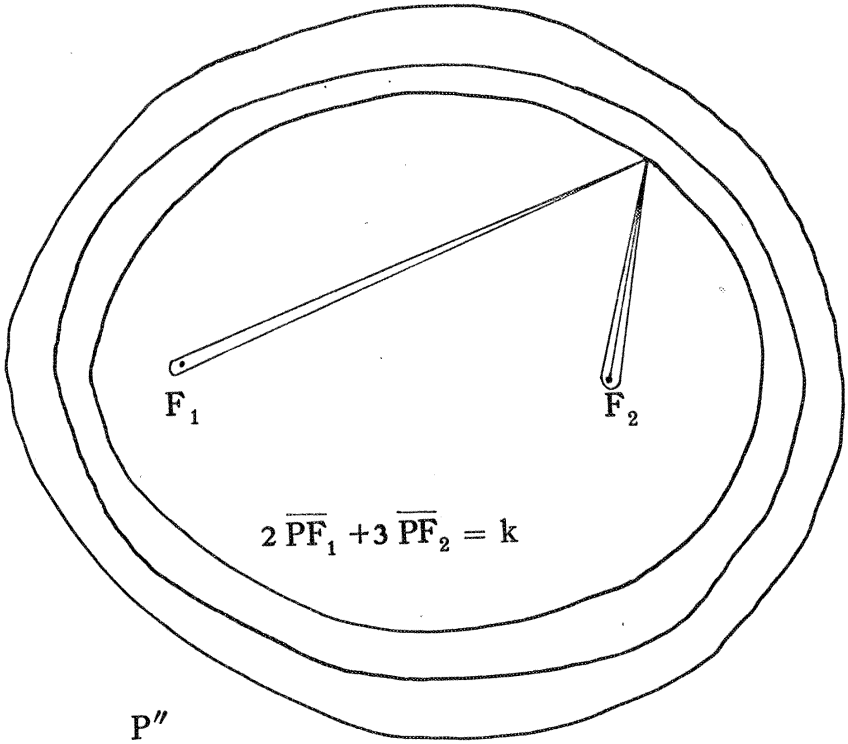
5. 以 D 爲圓心，$\overline{DE}$ 長爲半徑作弧，卽爲所求之卵形。

六、參考資料

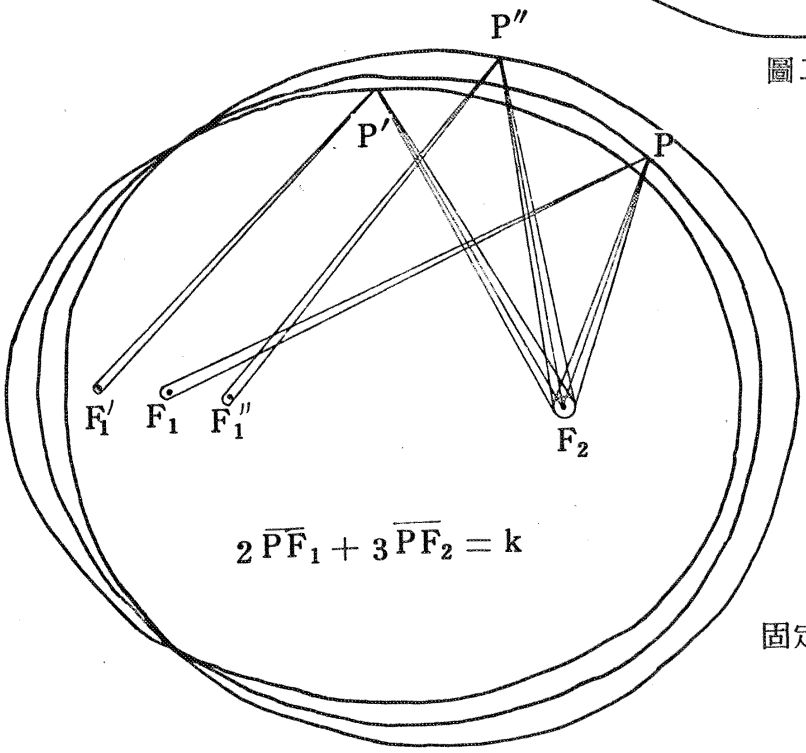
㈠高中數學（東華本自然組第四册）　　東華書局

㈡數學圈（第二卷第四期）　　數學圈雜誌社

七、補充資料



圖二　固定 F_1F_2 而改變線長



固定線長及 F_2，改變 F_1

評語 1. 本作品係由教科書中橢圓概念觸發聯想而衍生的問題，它將橢圓觀念一般化後得一嶄新的方程式，而其幾何圖形爲蛋形。

2. 一般化過程中，求方程式的歷程相當困難，作者均予以突破，作者的研究精神與態度，值得嘉勉。

3. 整個作品具有創新性、嚴密性、完整性。