

正多邊形極坐標方程式之研究及其應用

高中組數學科第三名

省立基隆高級中學

作 者：劉明澤、陳嘉瑞

指導教師：謝敏致

一、研究動機

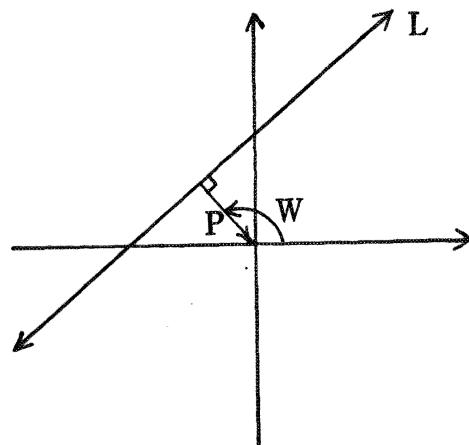
像直線、圓、圓錐曲線這些幾何圖形，在教科書上，我們可學得它們的極坐標方程式。另一類曲線，像正三角形、正四邊形……正 n 邊形，也是我們所熟悉的幾何圖形，似乎也應該有它所對應的極坐標方程式，是否它們被遺忘了呢？我們願意試著爲它尋找！

二、前 言

爲了方便我們對問題的討論，我們先定義幾個名詞並提出一個課本上的定理作爲我們的引理。

定義(1)：若在平面上給一定點 O ，一正數 d ，作三線段 \overline{OP} 、 \overline{OQ} 、 \overline{OR} 使 $\overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OR} = d$ ，且 $\angle POQ = \angle ROP = \angle QOR = \frac{2\pi}{3}$ ，過 P 、 Q 、 R 三點作三直線 \overleftrightarrow{AC} 、 \overleftrightarrow{AB} 、 \overleftrightarrow{BC} 使 $\overleftrightarrow{AC} \perp \overline{OP}$ ， $\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{OQ}$ ， $\overleftrightarrow{BC} \perp \overline{OR}$ ，則 $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$ 稱爲以 O 為中心，邊心距 d ， \overline{OP} 、 \overline{OQ} 、 \overline{OR} 為「模」的正三角形 ABC 。

定義(2)：在極坐標平面上，以極點 O 為中心， d 為邊心距， \overline{OP} 、 \overline{OQ} 、 \overline{OR} 為模的正三角形 ABC ，



設 \overrightarrow{OP} 、 \overrightarrow{OQ} 、 \overrightarrow{OR} 與極軸正向所夾的最小正角或零角爲 α ，則稱 α 為正 $\triangle ABC$ 的「模角」。

定義(3)：一線段 \overline{AB} ，若去除點 B 則稱 \overrightarrow{AB} 為線段 \overline{AB} 的半線段。

引理：若一直線 L，它的法角是 W ，法距 P ，則極坐標方程式是 $r \cos(\theta - W) = P$ ，如圖一所示。

三、內容

(→)我們的問題：在極坐標平面上以極點 O 為中心， d 為邊心距，模角爲 α 的正三角形的極坐標方程式爲何？

依給定條件在極坐標平面上作一正三角形 ABC，如圖二所示，因 $\angle POQ = \angle QOR$

$$= \angle ROP = \frac{2\pi}{3}.$$

由引理知：

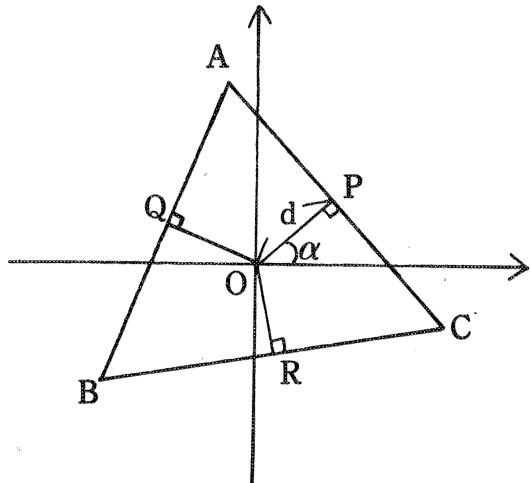
\overleftrightarrow{AC} 方程式：

$$r \cos(\theta - \alpha) = d$$

\overleftrightarrow{AB} 擴程式：

$$r \cos[\theta - (\alpha + \frac{2\pi}{3})] = d$$

$$= d$$



圖二

\overleftrightarrow{BC} 方程式：

$$r \cos[\theta - (\alpha + \frac{4\pi}{3})] = d$$

但是 $\angle AOP = \angle COP = \angle AOQ = \angle BOQ = \angle BOR = \angle COR$

$$= \frac{\pi}{3}。故$$

$$\overrightarrow{CA} : r \cos(\theta - \alpha - 0 \times \frac{2\pi}{3}) = d, \alpha - \frac{\pi}{3} \leq \theta < \alpha + \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\theta - (\alpha - \frac{\pi}{3})}{\frac{\pi}{3}} \right] = 0$$

$$\overrightarrow{AB} : r \cos (\theta - \alpha - 1 \times \frac{2\pi}{3}) = d, \alpha + \frac{\pi}{3} \leq \theta < \alpha + \pi$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\theta - (\alpha - \frac{\pi}{3})}{\frac{\pi}{3}} \right] = 1$$

$$\overrightarrow{BC} : r \cos (\theta - \alpha - 2 \times \frac{2\pi}{3}) = d, \alpha + \pi \leq \theta < \alpha + \frac{5\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\theta - (\alpha - \frac{\pi}{3})}{\frac{\pi}{3}} \right] = 2$$

因此 $\overrightarrow{CA} : r \cos \{ \theta - \alpha - [\frac{\theta - (\alpha - \frac{\pi}{3})}{\frac{2\pi}{3}}] \times \frac{2\pi}{3} \} = d$

$$\alpha - \frac{\pi}{3} \leq \theta < \alpha + \frac{\pi}{3}$$

$$\overrightarrow{AB} : r \cos \{ \theta - \alpha - [\frac{\theta - (\alpha - \frac{\pi}{3})}{\frac{2\pi}{3}}] \times \frac{2\pi}{3} \} = d$$

$$\alpha + \frac{\pi}{3} \leq \theta < \alpha + \pi$$

$$\overrightarrow{BC} : r \cos \{ \theta - \alpha - [\frac{\theta - (\alpha - \frac{\pi}{3})}{\frac{2\pi}{3}}] \times \frac{2\pi}{3} \} = d$$

$$\alpha + \pi \leq \theta < \alpha + \frac{5\pi}{3}$$

因 $\overrightarrow{CA} \cup \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BC} = \Delta ABC$ ，故 ΔABC 的方程式爲

$$r \cos \left\{ \theta - \alpha - \left[\frac{\theta - (\alpha - \frac{\pi}{3})}{\frac{2\pi}{3}} \right] \times \frac{2\pi}{3} \right\} = d$$

$$\alpha - \frac{\pi}{3} \leq \theta < \alpha + \frac{5\pi}{3}$$

而 $(\alpha + \frac{5\pi}{3}) - (\alpha - \frac{\pi}{3}) = 2\pi$ ，又同界角的三角形函數值

必相等，故可得 ΔABC 的方程式爲

$$r \cos \left\{ \theta - \alpha - \left[\frac{\theta - (\alpha - \frac{\pi}{3})}{\frac{2\pi}{3}} \right] \times \frac{2\pi}{3} \right\} = d, \theta \in R$$

因此我們得到下列的第一個結果：

定理(A)：在極坐標平面上以極點O爲中心，d爲邊心距，模角爲
 α 的正三角形極坐標方程式是：

$$r \cos \left\{ \theta - \alpha - \left[\frac{\theta - (\alpha - \frac{\pi}{3})}{\frac{2\pi}{3}} \right] \times \frac{2\pi}{3} \right\} = d$$

我們將定義(1)定義(2)推廣爲定義(1')定義(2')：

定義(1')：若在平面上給一定點O，一正數d作n線段($n \geq 3$)
($n \in N$)， $\overline{OQ_1}, \overline{OQ_2}, \dots, \overline{OQ_n}$ 使 $\overline{OQ_1} = \overline{OQ_2} = \dots = \overline{OQ_n} = d$ ，且 $\angle Q_1 OQ_2 = \angle Q_2 OQ_3 = \dots$

$\dots, \angle Q_n OQ_1 = \frac{2\pi}{n}$ ，過 Q_1, Q_2, \dots, Q_n 作n條

直線 $\overleftrightarrow{P_n P_1}, \overleftrightarrow{P_1 P_2}, \dots, \overleftrightarrow{P_{n-1} P_n}$ 使 $\overleftrightarrow{P_n P_1} \perp \overline{OQ_1}, \overleftrightarrow{P_1 P_2} \perp \overline{OQ_2}, \dots, \overleftrightarrow{P_{n-1} P_n} \perp \overline{OQ_n}$ ，則 $\overleftrightarrow{P_1 P_2} \cup \overleftrightarrow{P_2 P_3} \cup \dots$

$\cdots \cup \overleftrightarrow{P_{n-1}P_n} \cup \overleftrightarrow{P_nP_1}$ 稱爲以 O 為中心， d 為邊心距，
 OQ_1, OQ_2, \dots, OQ_n 為模的正多邊形 $P_1P_2 \dots P_n$
 \circ

定義(2)：在極坐標平面上，以極點 O 為中心， d 為邊心距， OQ_1 、 OQ_2, \dots, OQ_n 為模的正多邊形 $P_1P_2 \dots P_n$ ，設
 OQ_1, OQ_2, \dots, OQ_n 與極軸正向所夾最小正角或零角爲 α ，則 α 為正 n 邊形 $P_1P_2 \dots P_n$ 的「模角」。

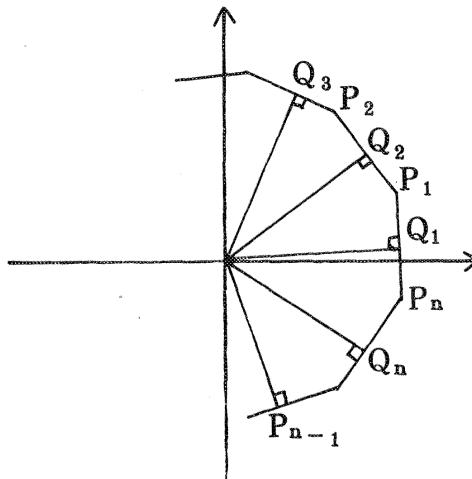
(二)我們的問題也將隨之推廣爲：在極坐標平面上以極點 O 為中心；
 d 為邊心距，模角爲 α 的正 n 邊形極坐標方程式爲何？

依給定條件在極坐標平面
上作一正 n 邊形 $P_1P_2 \dots P_n$
如圖三所示：

$$\begin{aligned} \text{因 } \angle Q_1OQ_2 &= \angle Q_2OQ_3 \\ &= \dots = \angle Q_nOQ_1 = \frac{2\pi}{n}, \end{aligned}$$

故正 n 邊形相鄰兩邊法角差皆

$$\text{爲 } \frac{2\pi}{n}.$$



圖三

$$\text{由引理知: } \overleftrightarrow{P_nP_1} : r \cos(\theta - \alpha) = d, \theta \in \mathbb{R}$$

$$\overleftrightarrow{P_1P_2} : r \cos[\theta - (\alpha + \frac{2\pi}{n})] = d, \theta \in \mathbb{R}$$

.....

$$P_kP_{k+1} : r \cos[\theta - (\alpha + \frac{2\pi}{n} \times k)] = d$$

$$\theta \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, (n-1)$$

$$\text{而 } \overrightarrow{P_nP_1} : r \cos(\theta - \alpha - 0 \times \frac{2\pi}{n}) = d, \alpha - \frac{\pi}{n} \leq \theta < \alpha + \frac{\pi}{n}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\theta - (\alpha - \frac{\pi}{n})}{\frac{2\pi}{n}} \right] = 0$$

$$\overrightarrow{P_1 P_2}^o : \gamma \cos(\theta - \alpha - 1 \times \frac{2\pi}{n}) = d, \quad \alpha + \frac{\pi}{n} \leq \theta < \alpha + \frac{3\pi}{n}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\theta - (\alpha - \frac{\pi}{n})}{\frac{2\pi}{n}} \right] = 1$$

.....

$$\overrightarrow{P_k P_{k+1}}^o : \gamma \cos(\theta - \alpha - k \times \frac{2\pi}{n}) = d$$

$$\alpha + \frac{(2k-1)\pi}{n} \leq \theta < \alpha + \frac{(2k+1)\pi}{n}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\theta - (\alpha - \frac{\pi}{n})}{\frac{2\pi}{n}} \right] = k$$

$$\text{故 } \overrightarrow{P_n P_1}^o : \gamma \cos \left\{ \theta - \alpha - \left[\frac{\theta - (\alpha - \frac{\pi}{n})}{\frac{2\pi}{n}} \right] \times \frac{2\pi}{n} \right\} = d$$

$$\alpha - \frac{\pi}{n} \leq \theta < \alpha + \frac{\pi}{n}$$

$$\overrightarrow{P_1 P_2}^o : \gamma \cos \left\{ \theta - \alpha - \left[\frac{\theta - (\alpha - \frac{\pi}{n})}{\frac{2\pi}{n}} \right] \times \frac{2\pi}{n} \right\} = d$$

$$\alpha + \frac{\pi}{n} \leq \theta < \alpha + \frac{3\pi}{n}$$

.....

$$\overrightarrow{P_{n-1}P_n} : \gamma \cos \left\{ \theta - \alpha - \left[\frac{\theta - (\alpha - \frac{\pi}{n})}{\frac{2\pi}{n}} \right] \times \frac{2\pi}{n} \right\} = d$$

$$\alpha + \frac{(2n-3)\pi}{n} \leq \theta < \alpha + \frac{(2n-1)\pi}{n}$$

$\overrightarrow{P_nP_1} \cup \overrightarrow{P_1P_2} \cup \overrightarrow{P_2P_3} \cup \dots \cup \overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ 即為正多邊形 $P_1P_2 \dots P_n$ ，故正多邊形 $P_1P_2 \dots P_n$ 的方程式為：

$$\gamma \cos \left\{ \theta - \alpha - \left[\frac{\theta - (\alpha - \frac{2\pi}{n})}{\frac{2\pi}{n}} \right] \times \frac{2\pi}{n} \right\} = d$$

$$\alpha - \frac{\pi}{n} \leq \theta < \alpha + \frac{(2n-1)\pi}{n}$$

而 $[\alpha + \frac{(2n-1)\pi}{n}] - (\alpha - \frac{\pi}{n}) = 2\pi$ ，又同界角

三角函數值必相等，故可得正 n 邊形 $P_1P_2 \dots P_n$ 方程為：

$$\gamma \cos \left\{ \theta - \alpha - \left[\frac{\theta - (\alpha - \frac{\pi}{n})}{\frac{2\pi}{n}} \right] \times \frac{2\pi}{n} \right\} = d$$

因此我們得到下列的結果：

定理(A')：在極坐標平面上，以極點O為中心，d為邊心距，模角為 α 的正多邊形的極坐標方程式為：

$$\gamma \cos \left\{ \theta - \alpha - \left[\frac{\theta - (\alpha - \frac{\pi}{n})}{\frac{2\pi}{n}} \right] \times \frac{2\pi}{n} \right\} = d$$

令 $\alpha = 0$ ，而 n 分別以 5、6 輸入電腦，可得附表(甲)之圖形。

四、應用

由上述結果，我們知道，當 $n > 2$ 且 $n \in N$ 時，極坐標方程式

$$\gamma \cos \left\{ \theta - \alpha - \left[\frac{\theta - (\alpha - \frac{\pi}{n})}{\frac{2\pi}{n}} \right] \times \frac{2\pi}{n} \right\} = d \dots\dots\dots\dots (A)$$

之圖形為正 n 邊形。

當(A)式中的 n 由大於 2 的有理數代入；又會得到怎樣的圖形呢？

令 $\alpha = 0$ ，而 $n = \frac{q}{p}$ ，以 $\frac{5}{2}$ ， $\frac{8}{3}$ 等輸入電腦；我們得到附表(乙)的一些多星形的圖形，經仔細觀察，歸納出下列有趣結果：(1)它們都是一筆劃出的多角封閉圖形。(2)分子 $q = 5$ 、 8 恰好是多角星形的角數（亦是邊數）。(3)分母 $p = 2$ 、 3 恰好是以星形一頂點為起點，一筆畫完成該星形圖形時繞極點O所旋轉的最少圈數。

這事實引起了我們對另一問題的興趣，是否當 $n > 2$ 且 $n = q/p$ ， $p, q \in N$ ， $(p, q) = 1$ 時，則極坐標方程式(A)也都能滿足前述的三個有趣的結果呢？經過我們的研究，發現這事實是成立的。

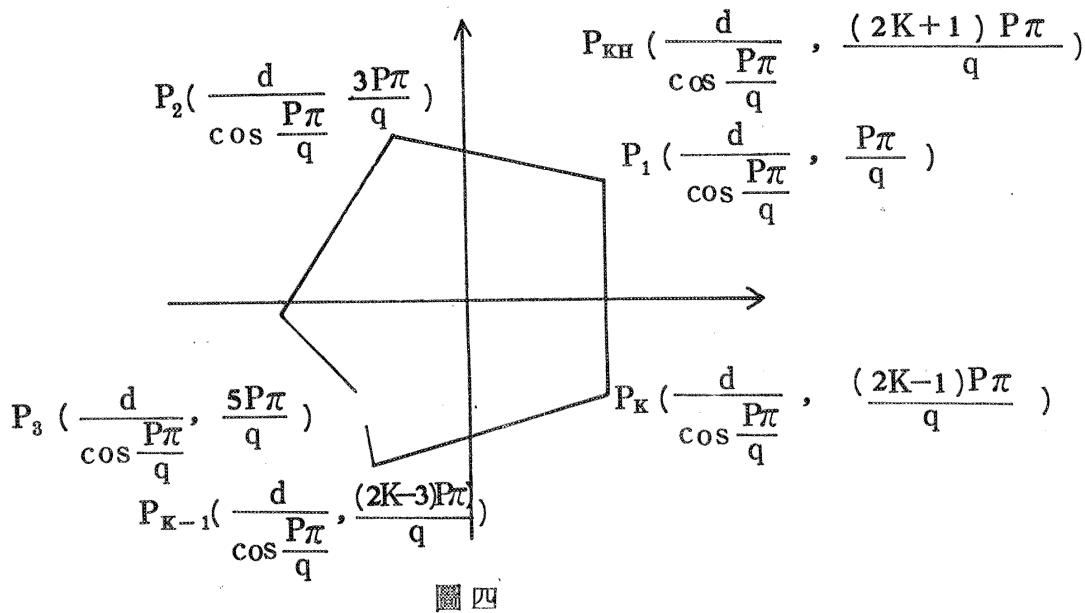
考慮極坐標方程式：

$$\gamma \cos \left\{ \theta - \frac{2\pi}{n} \times \left[\frac{\theta + \frac{\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} \right] \right\} = d \dots\dots\dots\dots (B)$$

當 $\frac{q}{p} > 2$ ， $p, q \in N$ ， $(p, q) = 1$ ，由(B)式得

$$\gamma \cos \left[\theta - \frac{2p\pi}{q} \times \left(\frac{\theta + \frac{p\pi}{q}}{\frac{2p\pi}{q}} \right) \right] = d$$

$$\text{令 } \left[\frac{\theta + \frac{p\pi}{q}}{\frac{2p\pi}{q}} \right] = m \Leftrightarrow \frac{2pm\pi}{q} - \frac{p\pi}{q} \leq \theta < \frac{2pm\pi}{q} + \frac{p\pi}{q}$$



圖四

當 $m = 1 \Leftrightarrow \frac{p\pi}{q} \leq \theta < \frac{3p\pi}{q}$, $\gamma \cos(\theta - \frac{2p\pi}{q}) = d$

可得 $\overrightarrow{P_1 P_2}$

當 $m = 2 \Leftrightarrow \frac{3p\pi}{q} \leq \theta < \frac{5p\pi}{q}$, $\gamma \cos(\theta - \frac{4p\pi}{q}) = d$, 可得 $\overrightarrow{P_2 P_3}$

.....

當 $m = k \Leftrightarrow \frac{2pk\pi}{q} - \frac{p\pi}{q} \leq \theta < \frac{2pk\pi}{q} + \frac{p\pi}{q}$,

$\gamma \cos(\theta - k \times \frac{2p\pi}{q}) = d$ 可得 $\overrightarrow{P_k P_{k+1}}$

其中 P_k 坐標為 $(\frac{d}{\cos \frac{p\pi}{q}}, \frac{(2k-1)p\pi}{q})$

如圖四所示。

是否存在一正整數 k , 使得點 P_{k+1} 與 P_1 重合, 亦即是否存在一正整數 ℓ 使得 $(\frac{2pk\pi}{q} + \frac{p\pi}{q}) - \frac{p\pi}{q} = 2\pi\ell$ 即 $\frac{2pk\pi}{q} = 2\pi\ell \Rightarrow p \times k = q \times \ell$ 。

$$\text{因 } (p, q) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \ell = p \times t \\ k = q \times t, t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

因 ℓ 取最小正整數所以 t 取 1，

$$\text{故 } \ell = p, q = k, n = \frac{q}{p} =$$

$$\frac{\text{角數}}{\theta \text{ 所繞之最少圈數}}.$$

如圖五所示，若 $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E$ ，且 $\overline{AC} = \overline{CE} = \overline{BE} = \overline{BD} = \overline{DA}$ ，我們稱 $\angle A$ 為正五角星形的頂角， \overline{AC} 為其邊長。

如圖六所示：

$$2\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{n} + \angle A$$

$$\text{頂角 } \angle A = \frac{(n-2)\pi}{n}$$

$$\text{邊長} = 2 \times d \times \tan \frac{\pi}{n}$$

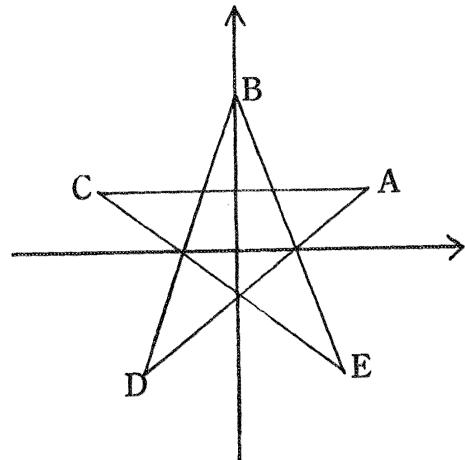
我們得到了下列的結果：

定理(B)：極坐標方程式：

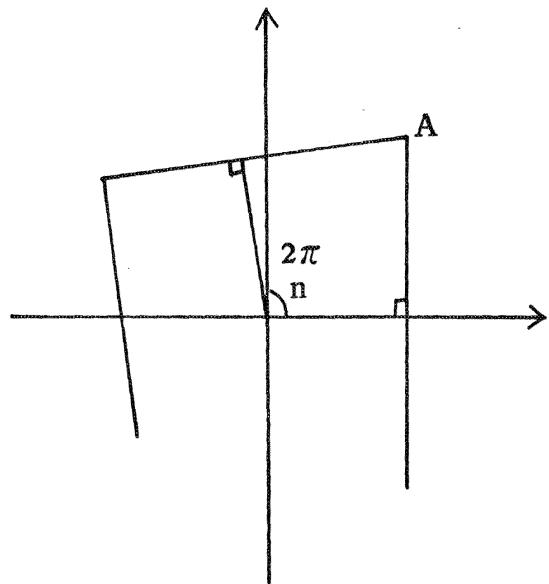
$$\gamma \cos [\theta - \alpha - \frac{2p\pi}{q}]$$

$$\times (\frac{\theta - \alpha + \frac{p\pi}{q}}{\frac{2p\pi}{q}})] = d, p, q \in \mathbb{N}, (p, q) = 1,$$

$$q > 2p$$



圖五



圖六

表一個以極點為中心， d 為邊心距，模角為 α ，邊長為 $2 \times d \times \tan \frac{p\pi}{q}$ ，頂角為 $\frac{(q-2p)\pi}{q}$ ；繞 p 圈完成之正 q 角星形。

註：當 n 為大於 2 之無理數時 $(\frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{n}) - \frac{\pi}{n} = 2\ell\pi$ ， ℓ 、 $k \in \mathbb{N} \Rightarrow k = \ell \times n$ （不合）（因 n 為無理數且 ℓ 、 k 為自然數），所以當 n 為無理數時，永遠無法得到一頭尾相連的封閉圖形。

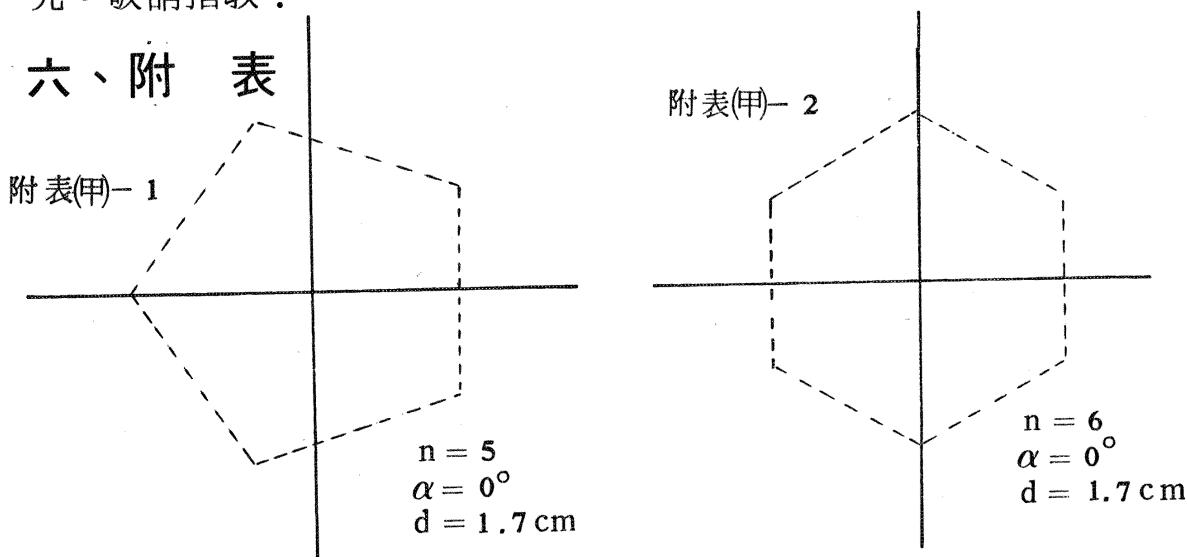
五、結論

在極坐標系裏，我們首先為正三角形求出了標準式，然後再推廣求出正 n 邊形的一般式為

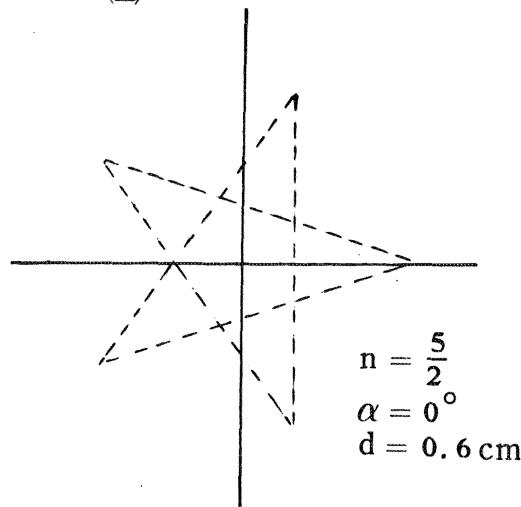
$$\gamma \cos [\theta - \alpha - \frac{2\pi}{n} \times (\frac{\theta - \alpha + \frac{\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}})] = d$$

藉電腦輔助作圖，又意外的發現當 n 為大於 2 的有理數時，可代表多角星形之方程式。因為有以上之應用，而當 $n = 1$ 或 2 時顯然可分別表一直線或二平行直線，但 $n = \frac{q}{p}$ ， $(p, q) = 1$ ，且 $0 < n < 2$ ， $n \neq 1$ 時，其部份圖形如附表丙，其分子之特性仍在，而分母經過一番努力仍無法歸納出其與 θ 繞轉之最少圈數關係，仍待我們繼續研究。敬請指教！

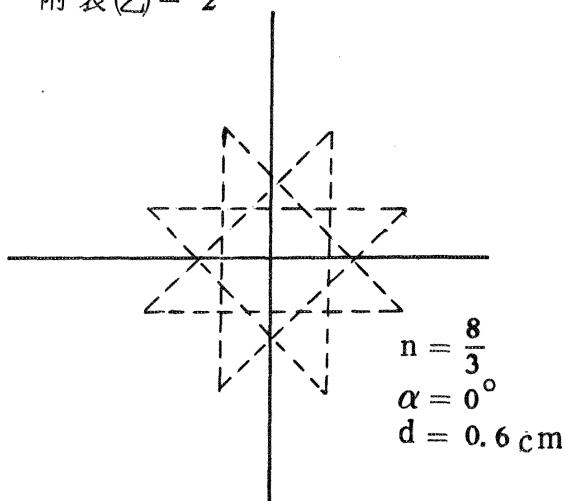
六、附表



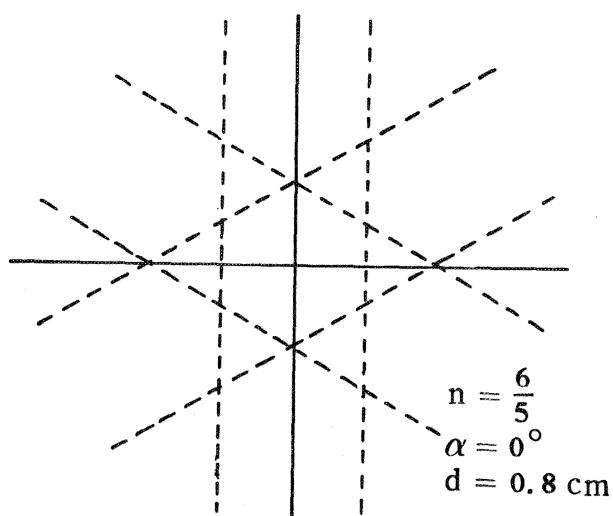
附表(乙)-1



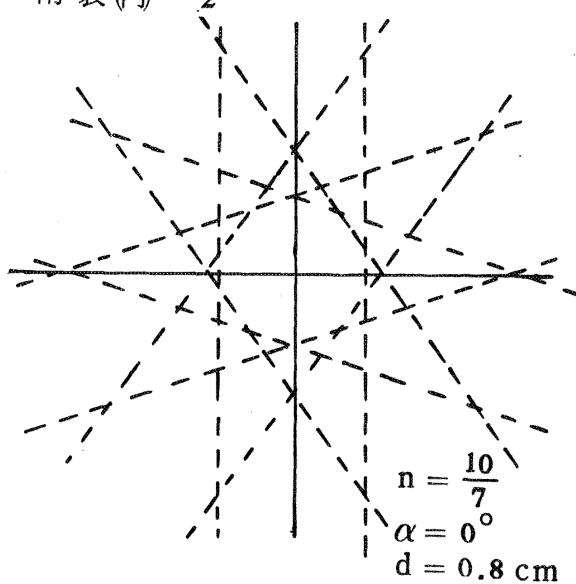
附表(乙)-2



附表(丙)-1



附表(丙)-2



評語：將圖形由直角坐標換為橫坐標，目前所有者，祇限於某些特殊圖形，作者將對稱多邊形加以轉換，具有理論根據，實為可貴，但對於不對稱圖形如何？可繼續研究。

再者，對 n 空間 ($n > 2$) 如何？可以研究。