空間中的極小原理

高中組數學科第二名

省立嘉義高級中學　　作　　者：郭仲祺
指導教師：郭茂雄

一、研究動機

在平面上有一種極小原理：已知平面上一直綫與相異二定點A、B，則可在L找出一點P使$\overline{PA}+\overline{PB}$爲最小，方法如下：

㈠A、B在L之同側時，求出A關於L的對稱點A′，或 B關於L的對稱點B′，連接$\overline{A'B}$ 或 $\overline{AB'}$ 與L的交點卽爲所求之P。

㈡A、B在L之反側時，$\overline{AB}$ 與 L的交點卽爲所求之P。

現在我們推廣到空間中，對於空間中一直紗L與二定點A、B如何在L上找一點P，使$\overline{PA}+\overline{PB}$爲最小。

二、初步的解法

設空間中二定點A（x_1，y_1，z_1），B（x_2，y_2，z_2）而直綫上的參數式爲：

$$x=a_1t+b_1\ ,\ y=a_2t+b_2\ ,\ z=a_3t+b_3$$

令　$P(a_1t+b_1\ ,\ a_2t+b_2\ ,\ a_3t+b_3)$

則　$f(t)=\overline{PA}+\overline{PB}$

$$=\sqrt{(a_1t+b_1-x_1)^2+(a_2t+b_2-y_1)^2+(a_3t+b_3-z_1)^2}$$
$$+\sqrt{a_1t+b_1-x_2)^2+(a_2t+b_2-y_2)^2+(a_3t+b_3-z_2)^2}$$
$$=\sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)t^2+2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3-a_1x_1-a_2x_2-a_3z_1)t+(b_1-x_1)^2+(b_2-x_1)^2+(b_3-z_1)^2}$$
$$+\sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)t^2+2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3-a_1x_2-a_2y_2-a_3z_2)t+(b_1-x_2)^2+(b_2-y_2)^2+(b_3-z_2)^2}$$

$$= \sqrt{A_1 t^2 + B_1 t + C_1} + \sqrt{A_2 t^2 + B_2 t + C_2}$$

其中 $A_1 = A_2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

$B_1 = 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_1 x_1 - a_2 y_1 - a_3 z_1)$

$C_1 = (b_1 - x_1)^2 + (b_2 - y_1)^2 + (b_3 - z_1)^2$

$B_2 = 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_1 x_2 - a_2 y_2 - a_3 z_2)$

$C_2 = (b_1 - x_2)^2 + (b_2 - y_2)^2 + (b_3 - z_2)^2$

(一)方法：

1. $f'(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{2A_1 t + B_1}{\sqrt{A_1 t^2 + B_1 t + C_1}} + \frac{2A_2 t + B_2}{\sqrt{A_2 t^2 + B_2 t + C_2}}\right)$

令 $f'(t) = 0 \Rightarrow \frac{2A_1 t + B_1}{\sqrt{A_1 t^2 + B_1 t + C_1}} = \frac{2A_2 t + B_2}{\sqrt{A_2 t^2 + B_2 t + C_2}}$

$\therefore (2A_1 t + B_1)^2 (A_2 t^2 + B_2 t + C_2)$

$= (2A_2 t + B_2)^2 (A_1 t^2 + B_1 t + C_1)$

化簡後 t 之三次，利用卡丹公式解，所得之 t 使 $f''(t) > 0$ 者即爲所求。

2. 因 $A_1 = A_2$，

故 $f(t) = \sqrt{A_1 t^2 + B_1 t + C_1} + \sqrt{A_2 t^2 + B_2 t + C_2}$

$$= \sqrt{A_1}\left(\sqrt{t^2 + \frac{B_1}{A_1} t + \frac{C_1}{A_1}} + \sqrt{t^2 + \frac{B_2}{A_2} t + \frac{C_2}{A_2}}\right)$$

$$= \sqrt{A_1}\left(\sqrt{\left(t + \frac{B_1}{2A_1}\right)^2 + \frac{4A_1 C_1 - B_1^2}{4A_1^2}}\right.$$

$$\left. + \sqrt{\left(t + \frac{B_2}{2A_2}\right)^2 + \frac{4A_2 C_2 - B_2^2}{4A_2^2}}\right)$$

令 $P(t, 0)$、$A\left(-\frac{B_1}{2A_1}, \frac{\sqrt{4A_1 C_1 - B_1^2}}{2A_1}\right)$，

$B\left(-\frac{B_2}{2A_2}, \frac{\sqrt{4A_2 C_2 - B_2^2}}{2A_2}\right)$

則 $f(t) = \sqrt{A_1}(PA + PB)$

即在X軸上找一點P，使PA＋PB爲最小，成爲平面上的極小原理問題，故用平面上的做法求解。

㈡以上兩種解法計算甚爲複雜，方法1利用卡丹公式解三次方程式甚爲不便，方法2轉成平面解法，較易求解，下面我們適當的選取坐標系，利用以上的方法探求其結果，再推演其幾何意義，推出一般的結論。

三、進一步的探討

空間中，令L爲X軸其一定點所在爲Y軸的正向，即令A(a,b,c)，B(o,d,o)而a＞o，d＞o，P(t,o,o)表L上之動點

則 $f(t)=PA+PB=\sqrt{(t-a)^2+b^2+c^2}+\sqrt{t^2+d^2}$

㈠方法1.

$$f'(t)=\frac{2(t-a)}{\sqrt{(t-a)^2+b^2+c^2}}+\frac{2t}{\sqrt{t^2+d^2}}$$

$$f''(t)=[2(t-a)]^2[(t-a)^2+b^2+c^2]^{-\frac{3}{2}}$$

$$+2[(t-a)^2+b^2+c^2]^{-\frac{1}{2}}+(2t)^2[t^2+d^2]^{-\frac{3}{2}}$$

$$+2(t^2+d^2)^{-\frac{1}{2}}$$

令 $f(t)=0$

$$\Rightarrow\frac{2(t-a)}{\sqrt{(t-a)^2+b^2+c^2}}=-\frac{2t}{\sqrt{t^2+d^2}}\qquad 0\le t\le a$$

$$\therefore\ \frac{(t-a)^2}{(t-a)^2+b^2+c^2}=\frac{t^2}{t^2+d^2}$$

$$\Rightarrow(t-a)^2t^2+(t-a)^2d^2=(t-a)^2t^2+(b^2+c^2)t^2$$

$$\therefore(d^2-b^2-c^2)t^2-2ad^2t+a^2d^2=0$$

$$\Rightarrow t=\frac{ad^2\pm ad\sqrt{b^2+c^2}}{d^2-b^2-c^2}=\frac{ad}{a\pm\sqrt{b^2+c^2}}\quad 0\le t\le a$$

$\therefore t=\dfrac{ad}{d+\sqrt{b^2+c^2}}$ 又 $d^2=b^2+c^2$ 時 $t=\dfrac{a}{2}$，

而 $t=\dfrac{ad}{d+\sqrt{b^2+c^2}}$ 時，$f'(t)>0$

故 $f\left(\dfrac{ad}{d+\sqrt{b^2+c^2}}\right)$ 爲最小值

$$f\left(\frac{ad}{d+\sqrt{b^2+c^2}}\right)=\sqrt{\left(\frac{ad}{d+\sqrt{b^2+c^2}}-a\right)^2+b^2+c^2}$$

$$+\sqrt{\left(\frac{ad}{d+\sqrt{b^2+c^2}}\right)^2+d^2}$$

$$=\sqrt{a^2+\left(d+\sqrt{b^2+c^2}\right)^2}$$

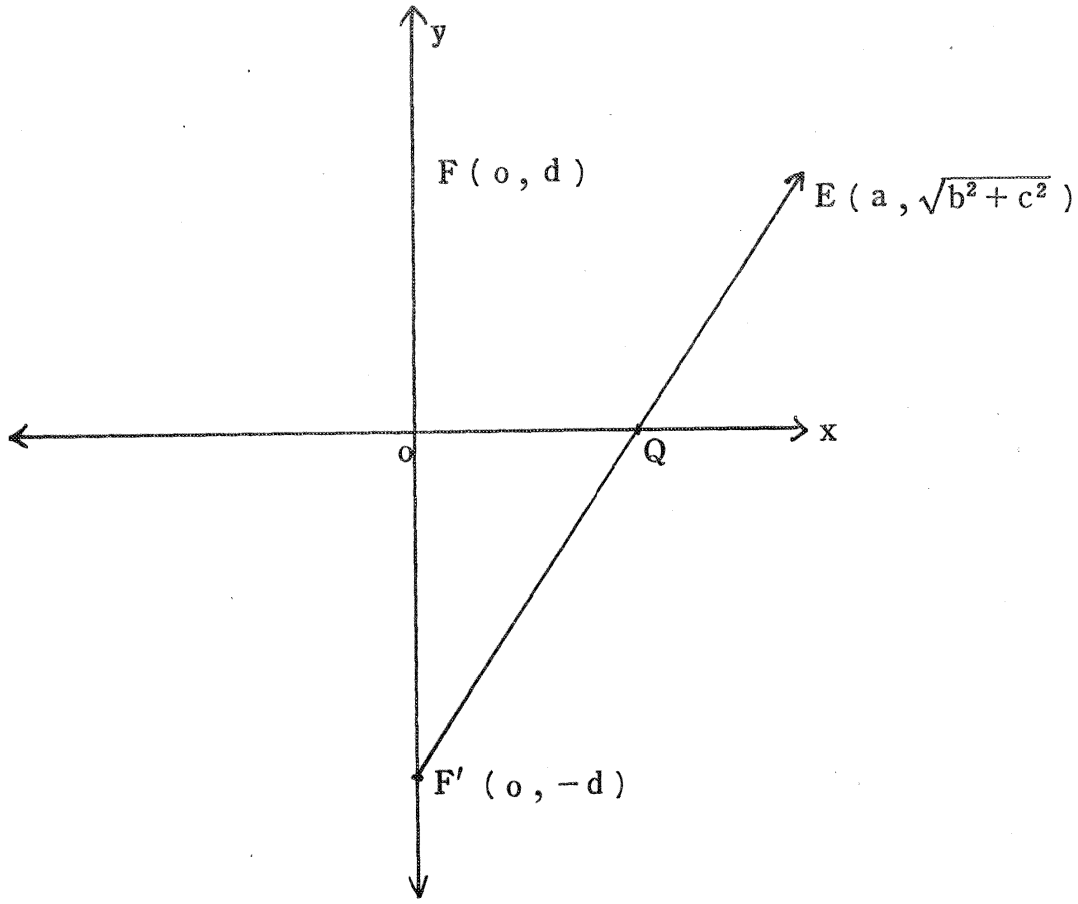
方法 2

令 $Q(t,o)$、$E(a,\sqrt{b^2+c^2})$、$F(o,d)$

則 $f(t)=QE+QF$

$F(o,d)$ 關於 X 軸的對稱點爲 $F'(o,-d)$

$\overline{EF'}$ 與 X 軸交點爲 $Q(t,o)$。 如圖一



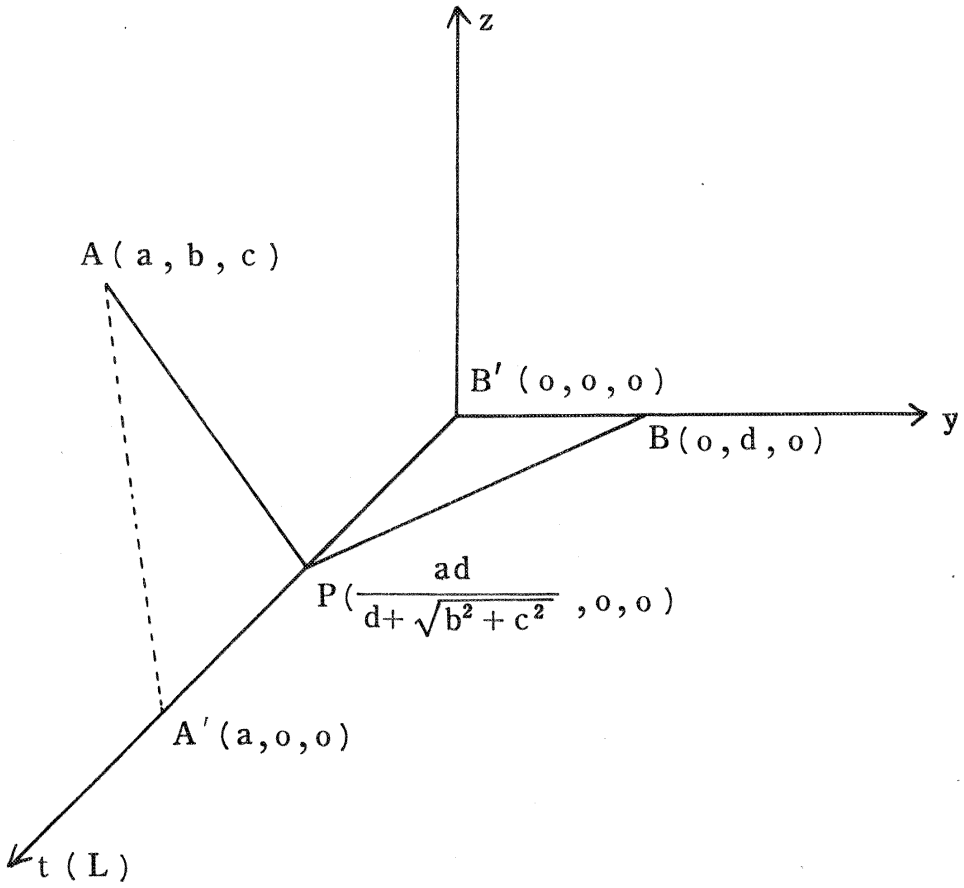
圖一

$$\begin{vmatrix} a & \sqrt{b^2+c^2} & 1 \\ t & 0 & 1 \\ 0 & -d & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow t = \frac{ad}{d+\sqrt{b^2+c^2}}$$

$$f\left(\frac{ad}{d+\sqrt{b^2+c^2}}\right) = \overline{EF'} = \sqrt{a^2+(d+\sqrt{b^2+c^2})^2}$$

㈡幾何意義的探討：

1. $t = \dfrac{ad}{d+\sqrt{b^2+c^2}}$ $\therefore P\left(\dfrac{ad}{d+\sqrt{b^2+c^2}}, 0, 0\right)$，A(a，b，c)在X軸L的投影爲A′(a，0，0)，B(0，d，0)在X軸L的投影爲B′(0，0，0)，由坐標觀之，P恰爲$\overline{A'B'}$之內分點且內分點比$\overline{PA'}$：$\overline{PB'}$ $= \sqrt{b^2+c^2}$：$d = AA'$：BB'。



圖二

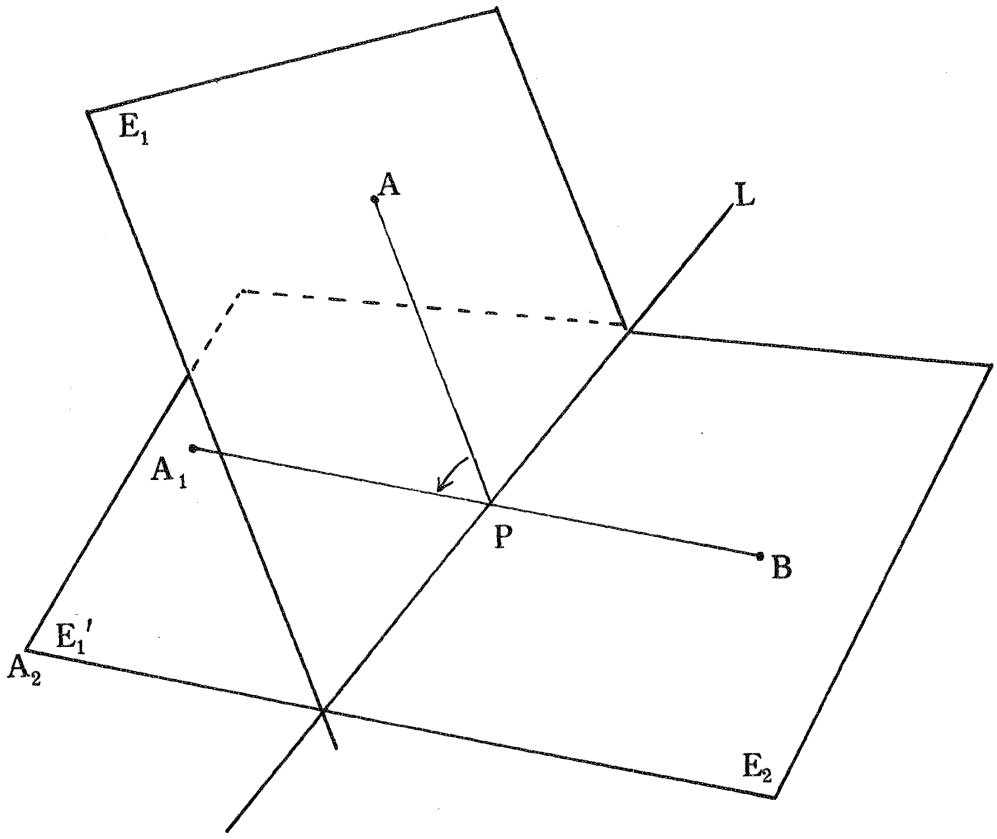
2. $f\left(\dfrac{ad}{d+\sqrt{b^2+c^2}}\right)=\sqrt{a^2+(d+\sqrt{b^2+c^2})^2}$

$$=\sqrt{\overline{A'B'}^2+(\overline{AA'}+\overline{BB'})^2}$$

即 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 之最小值爲 $\sqrt{A'B'^2+(AA'+BB')^2}$，其中 A'，B' 分別表 A，B 在直綫 L 上的投影。如圖二。

㈣利用旋轉平面解：

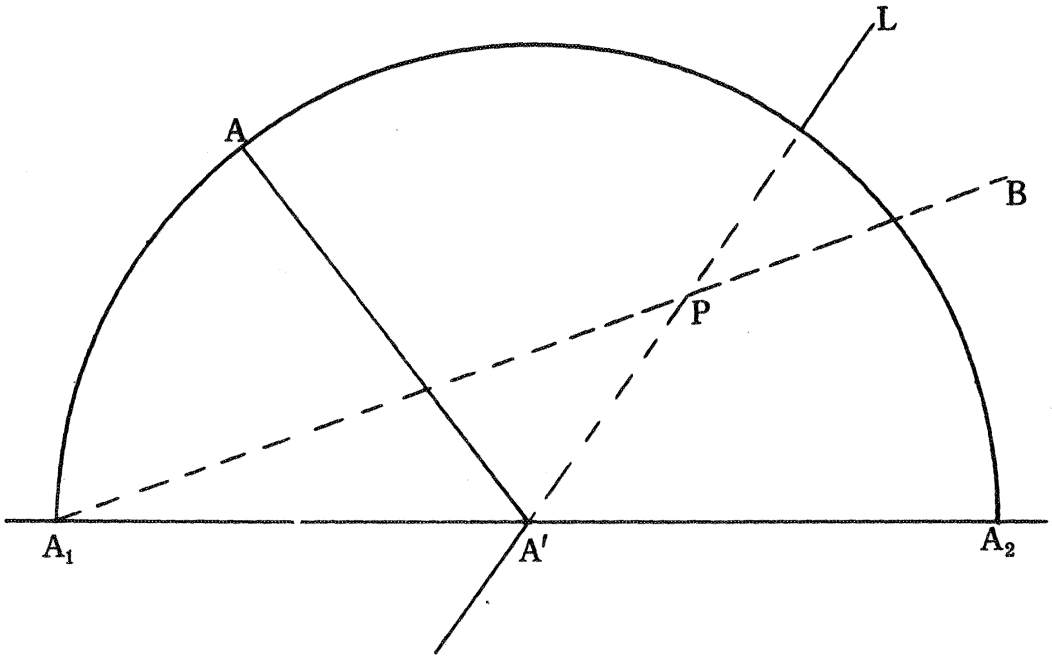
1. 令 A 與 L 決定的平面爲 E_1，B 與 L 決定的平面爲 E_2，將 E_1 繞 L 旋轉，使 E_1 與 E_2 重合，且使 A，B 在 L 的異側，此時平面 E_1 成爲 E_1' 點 A 成爲 A_1，連接 $\overline{A_1B}$ 與 L 的交點 P，即爲所求之點。如圖三。



圖三

2. 這個觀念利用作圖法可以這樣做：

先求 A 對 L 的投影點 A'，以 A' 爲圓心，$\overline{A'A}$ 爲半徑，在過 A' 垂直於 L 的平面上畫一圓交 L 與 B 所在的平面 E_2 於 A_1，A_2 其中 A_1 與 B 在 L 的異側，則連接 A_1B 與 L 的交點 P 即爲所求。



圖四

四、對偶問題

㈠設有二定平面 E_1 及 E_2，和一定直綫L，試在L上找出一點P，使到二平面距離和 $d(P_1E_1)+d(P_1E_2)$ 爲最小。

1. 當L與 E_1，E_2 皆平行時，因爲L的點到 E_1，E_2 的距離皆爲一定，故P卽爲L上的任意一點，最小值卽是L上任意點到 E_1 和 E_2 的距離和。
2. 當L與 E_1，E_2 兩平面中的一平面平行，與另一平面交於一點時，則此時P爲此交點，最小值卽是P到與L平行之平面的距離。
3. 當L與 E_1，E_2 均相交於一點，卽P爲二交點之一。

㈡設有二定點A、B及一定平面E，試在平面E上找出一點P，使到二定點距離 $PA+PB$ 爲最小。

1. 當A、B兩點皆在E上時，最小值爲 $\overline{AB}$，而 $P\in\overline{AB}$。
2. 當A、B兩點有一點在E上時，最小值爲 $\overline{AB}$，而P爲此點（在平面的點）。
3. 當A、B皆不在E上時

(1)若A、B在E之異側，則最小值爲 $\overline{AB}$，P爲 $\overline{AB}$ 與平面的

交點。

(2)若A、B同側時，則求A（或B）關於E的對稱點A′（或B′），則最小值爲A′B（或AB′） 此時P即爲A′B（或AB′）與E的交點。

㈢設有二定直綫L_1，L_2及一定平面E，試在平面E上找出一點P，使到二直綫距離之和$d(P_1L_1)+d(P_1L_2)$爲最小。

1. 當L_1，L_2不共平面時，考慮L_1，L_2的公垂綫段AB，$A\in L_1$，$B\in L_2$，$\overline{AB}\perp L$，$\overline{AB}\perp L_2$，若$\overline{AB}$與E相交於一點P，則：

(1) $d(P_1L_1)+d(P_1L_2)$最小值爲$\overline{AB}$，此時P爲$\overline{AB}$與平面E的交點，設Q爲E上任一點，Q在L_1，L_2投影分別爲A′，B′，則$d(Q_1L_1)+d(Q_1L_2)=QA'+QB'\geq A'B'\geq AB$。

(2)若$\overline{AB}$與E不相交，則取L_1（或L_2）關於E的對稱直線L_1'（或L_2'），此時L_1'與L_2（或L_2'與L_1）的公垂綫段$\overline{A'B}$必與E相交，$d(P_1L_1)+d(P_1L_2)=d(P_1L_1')+d(P_1L_2)$最小值爲A′B，此時P即$\overline{A'B}$與E的交點。

2. 當L_1，L_2共平面時

(1)若$L_1\parallel L_2$而L_1，L_2分別交於E於A，B則$d(P_1L_1)+d(P_1L_2)$之最小值即$d(L_1, L_2)$，此時$P\in\overline{AB}$。

(2)若$L_1\parallel L_2$且L_1與L_2和E不相交，L_1，L_2在平面E的異側時，L_1，L_2所在平面與E交於一綫L，此時$P\in L$。L_1，L_2在平面E同側時，取L_1（或L_2）關於E的對稱直綫L_1'（或L_2'），L_1'與L_2所在的平面與E交於一綫L，$d(P_1L_1)+d(P_1L_2)$之最小值即$d(L_1', L_2)$，此時$P\in L$。

(3)若L_1與L_2交於一點K時，若K在E上時，$d(P_1L_1)+d(P_1L_2)$最小值0，此時P即K。若K不在E上時，取L_1關於E的對稱直綫L_1'，L_1'與L_2的公垂綫段$\overline{AB}$與E交於一點P，$d(P_1L_1)+d(P_1L_2)=d(P_1L_1')+$

$d(P_1L_2)$最小值爲$\overline{A'B}$，此時P即爲$\overline{A'B}$與E的交點。

五、結　論

㈠設A、B爲空間中的二定點，L爲一已知直綫，要在L上找一點P，使$\overline{PA}+\overline{PB}$爲最小，我們利用解析的方法建立坐標系將$\overline{PA}+\overline{PB}$數量化，我們發現可以轉成平面上的極小問題求解。

㈡就幾何意義去推敲，設A，B在直綫L的投影點分別爲A'，B'則$\overline{PA}+\overline{PB}$爲最小值時之P點，即爲綫段$\overline{A'B'}$的一個內分點，其內分比$\overline{PA'}:\overline{PB'}=\overline{AA'}:\overline{AB'}$，而$\overline{PA}+\overline{PB}$之最小值爲$\sqrt{\overline{A'B'}^2+(\overline{AA'}+\overline{BB'})^2}$。

㈢將點與直綫、平面互換，我們將原題轉成對偶問題也討論了其極小問題得到了結論，使我們的研究產生了推演的效果。

評語 1. 具系統性研究能力。

2. 轉化問題的能力强。

3. 能用對偶觀念看待問題。

4. 頭腦清晰，表達簡潔達意。