

電腦擬智化的實例探討及其數學分析

高中組數學科第一名

台北市立中正高級中學

作 者：謝文欽

指導教師：李政貴、林聰勤

一、研究動機

在所有的益智遊戲裡，有許多都隱含著一些數學上的關係，只要加以推導，便可找到一套必勝的方法，使我們在每次遊戲中，都能百戰百勝，我們也想以一種「拈」遊戲，作為探討的對象。

二、研究目的

研究此種「拈」遊戲之必勝方法，並設計成程式，利用電腦快速而準確的判斷能力，使它成為這類益智棋的絕頂高手。

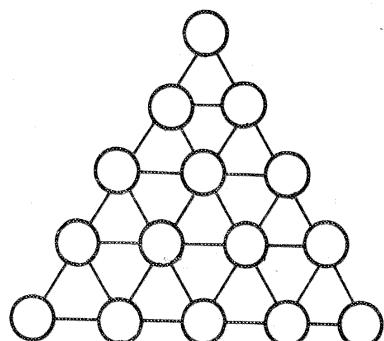
三、研究設備器材

- (一)APPLE II 64K電腦主機
- (二)Monitor
- (三)Printer
- (四)Disk-driver

四、研究內容及過程

(一)「拈」遊戲介紹：

在此先說明本文中所討論「拈」遊戲的玩法：如（圖一），有若干個棋子排在一個類似跳棋的棋盤上，兩人輪流，每次取一粒或一直線中連續的幾粒，但不可超過三粒，直到誰拿

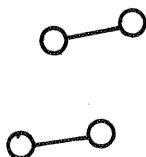


（圖一）

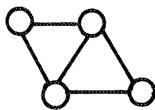
到最後一粒就算是輸。

(二) 原始構想：

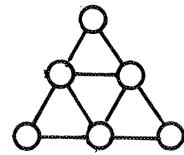
雖然在一開始，我們不知從何處著手，但一般熟悉此遊戲的人，都有一些必勝公式，亦即只要輪到自己下時，儘量造成某種特定的棋局，如（圖二～一）、（圖二～二）、（圖二～三）…等等，那麼對方就必敗無疑了，我們暫時把這種該誰下誰便輸的棋局稱之為「必勝棋局」。



（圖二～一）



（圖二～二）



（圖二～三）

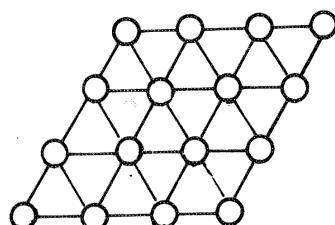
我們的初步構想，是將自己玩這種益智棋的所有經驗，完全的輸入電腦，亦即事先討論過所有可能發生的狀況，並將所得到的「必勝棋局」建立 Data Base，以便做為電腦與使用者對下的依據。

(三) 問題產生：

我們的推導過程，是先找出基本的「必勝棋局」（此指剩下一粒的情況），再根據已有的資料，進而找出 3 粒、5 粒、……，一直推導到較多粒子的「必勝棋局」。如此進行下去，或許可以將一般情況討論完。

但是進行這項工作十分的困難，而且沒有一個機械性的規則可依循，因而想到了幾個問題：

1. 進行如此費力的工作，也只能完成（圖一）的情況，如果任意換個棋盤，如（圖三～一）、（圖三～二），或者把規則改為“每次最多取五粒”後，原來的討論便不敷使用。



（圖三～一）

2. 無法保證所有的情況皆已討論完成。

(四)新的發現：

循著這個方法進行了一段時期，我們忽然得到一個新的構想：任一棋局 f ，下過一次後，所有可能造成的剩餘情況的棋局 f' ，均不存在以往所導出之「必勝棋局」當中，那麼這個棋局 f 可能就是所謂的「必勝棋局」。

(五)符號設定：

爲了肯定我們的想法是否正確，我們引用了下列符號以便證明：

F_k ：爲使用者所設定的棋盤原始模式（此指（圖一）或（圖三～一），（圖三～二）尚未下之前的情況，以下稱爲“原始棋局”）中，所有剩下 k 粒棋子的棋局，所成的集合。

A_k ：表所有剩下 k 粒棋子的「必勝棋局」所成的集合。

f ：常表示任一棋局。

$|f|$ ：表棋局 f 中所留下棋子的個數。

S_f ：表示 f 下過一次後，所有可能造成的棋局 f' 所成的集合。

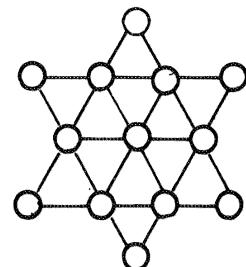
例 若 $f = \text{○---○---○}$ 為遊戲進行中的某一棋局。

$$\text{則 } S_f = \left\{ \begin{array}{c} \text{○---○---○}, \text{○---○---○}, \text{○---○---○}, \text{○---○---○}, \\ \text{○---○---○}, \text{○---○---○}, \text{○---○---○}, \text{○---○---○} \end{array} \right\}$$

再根據我們所發現的新的構想，定義了一集合：

設 $D_1 = F_1$

當 $k \geq 2$ ， $D_k = \{ f \mid (f \in F_k) \wedge (\forall f' \in S_f)(f' \notin \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i) \}$



(圖三～二)

△證明及推導過程如下：

1. 定理(\rightarrow)：[$\forall k \geq 1, A_k = D_k$]

pf : (1) $A_1 = F_1 = D_1$

(2) $A_2 = D_2 = \emptyset$ (F_2 只有 (圖四~一) , (圖四~二) 兩種，均非必勝棋局)

(3) $k \geq 3, (A_2 = D_2), (A_3 = D_3) \dots \dots \dots$
 $(A_{k-1} = D_{k-1})$ 成立

① $f \in A_k$

$$\Rightarrow (f \in F_k) \wedge \sim (\exists f' \in S_f \exists f' \in \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i)$$

$$\Leftrightarrow (f \in F_k) \wedge (\forall f' \in S_f) (f' \notin \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i)$$

$\Leftrightarrow f \in D_k$



$\therefore A_k \subset D_k$



② $f \in D_k$ (圖四~一) (圖四~二)

$$\Leftrightarrow (f \in F_k) \wedge (\forall f' \in S_f) (f' \notin \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i)$$

$$\Rightarrow (f \in F_k) \wedge (\forall f' \in S_f) [(f' \notin A_{|f'|}) \vee (|f'| = 0)]$$

$$\because 0 \leq |f'| \leq k-1$$

$$\Leftrightarrow (f \in F_k) \wedge (\forall f' \in S_f) [(f' \notin D_{|f'|}) \vee (|f'| = 0)]$$

$$\Leftrightarrow (f \in F_k) \wedge (\forall f' \in S_f) [\sim (f' \in D_{|f'|}) \vee (|f'| = 0)]$$

$$\Leftrightarrow (f \in F_k) \wedge (\forall f' \in S_f) [\sim [(|f'| = |f'|) \rightarrow$$

$$V(Vf'' \in S_{f'}) (f'' \notin \bigcup_{i=1}^{|f'|-1} A_i)] V(|f'| = 0)]$$

$$\Leftrightarrow (f \in F_k) \wedge (\forall f' \in S_f) [\sim (Vf'' \in S_{f'}) \rightarrow$$

$$(f'' \notin \bigcup_{i=1}^{|f'|-1} A_i) V(|f'| = 0)]$$

$$\Leftrightarrow (f \in F_k) \wedge (\forall f' \in S_f) [(\exists f'' \in S_{f'}) \exists f'' \in$$

$$\bigcup_{i=1}^{|f'|-1} A_i) V(|f'| = 0)]$$

$$\Rightarrow f \in A_k$$

$$\therefore D_k \subset A_k$$

由①, ②知 $A_k = D_k$

2. 定理(二)：[$f \notin A_k \Leftrightarrow \exists f' \in S_f \ni f' \in \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$]

$$P_f : f \notin A_k$$

$$\Leftrightarrow f \notin D_k$$

$$\Leftrightarrow f \in F_k - D_k$$

$$\Leftrightarrow (f \in F_k) \wedge \sim [(f \in F_k) \wedge (\forall f' \in S_f) (f' \notin \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i)]$$

$$\Leftrightarrow (f \in F_k) \wedge [(f \notin F_k) \vee \sim (\forall f' \in S_f) (f' \notin \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i)]$$

$$\Leftrightarrow (f \in F_k) \wedge [(f \notin F_k) \vee (\exists f' \in S_f \ni f' \in \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i)]$$

$$\Leftrightarrow [(f \in F_k) \wedge (f \notin F_k)] \vee [(f \in F_k) \wedge (\exists f' \in S_f \ni f' \in \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i)]$$

$$\Leftrightarrow (f \in F_k) \wedge (\exists f' \in S_f \ni f' \in \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i)$$

(七) 定理說明：

1. 定理(一)以歸納的方式，給了 A 集合一個明確的推導方法，也就是說： A_1, A_2, \dots, A_k 已導出，若要導出 A_{k+1} ，則只要從 D_{k+1} 的定義來推導即可——以尋找不重覆組合的方法，找出 F_{k+1} ，再將每個 $f \in F_{k+1}$ 代入下式之中，我們可得：

$$\forall f' \in S_f, f \notin \bigcup_{i=1}^k A_i \Leftrightarrow f \in A_{k+1}$$

最後存在於 A_{k+1} 中的元素，就是所有剩下 $k + 1$ 粒棋子的「必勝棋局」了。

2. 在定理(二)中，也證明了一種棋局 f ，若不存在於 $A_{\{f\}}$ 中，則至少有一種下法，使得下一步後所造成的棋局 f' 存在於 $A_{\{f'\}}$ 中。

五、討 論

(一)綜合定理(一)、(二)，我們可得知，所謂的必勝的競局(必勝公式)，就是由一連串的「必勝棋局」所組成的下法。而「必勝棋局」當然也不只是發生在如(圖二~一)，(圖二~二)，(圖二~三)的殘餘幾個粒子當中，而更可能出現在更多粒子的情況，或者一開始的原始棋局。

(二)經由上述定理的證明，同時也明白的指出一項推論，即任一原始棋局 f ，於未下之前便已決定了勝負。如(圖一)最通俗的原始棋局及最多取三粒的規則下，經電腦程式執行的結果，便是先下者贏，如此說來，這個益智遊戲似乎早已失去它存在的價值了。

(三)最後，根據證明推廣的結果，我們也發現：原始棋局並不只局限在同一平面上，甚至在空間中，任意的排列方式及規則，都符合上述的證明及推論，以下便以程式的設計來達成我們的目的。

六、程式設計及執行結果

(一)程式本文：

1. 程式(一)：PICK-A-LINE CHESS (略)

爲一功能程式，可用來檢查及複制棋盤的所有資料。

2. 程式(二)：MAKE A CHESSBOARD

尋找所有「必勝棋局」，爲本實驗中，最主要的一個程式。

3. 程式(三)：PLAY A GAME (略)

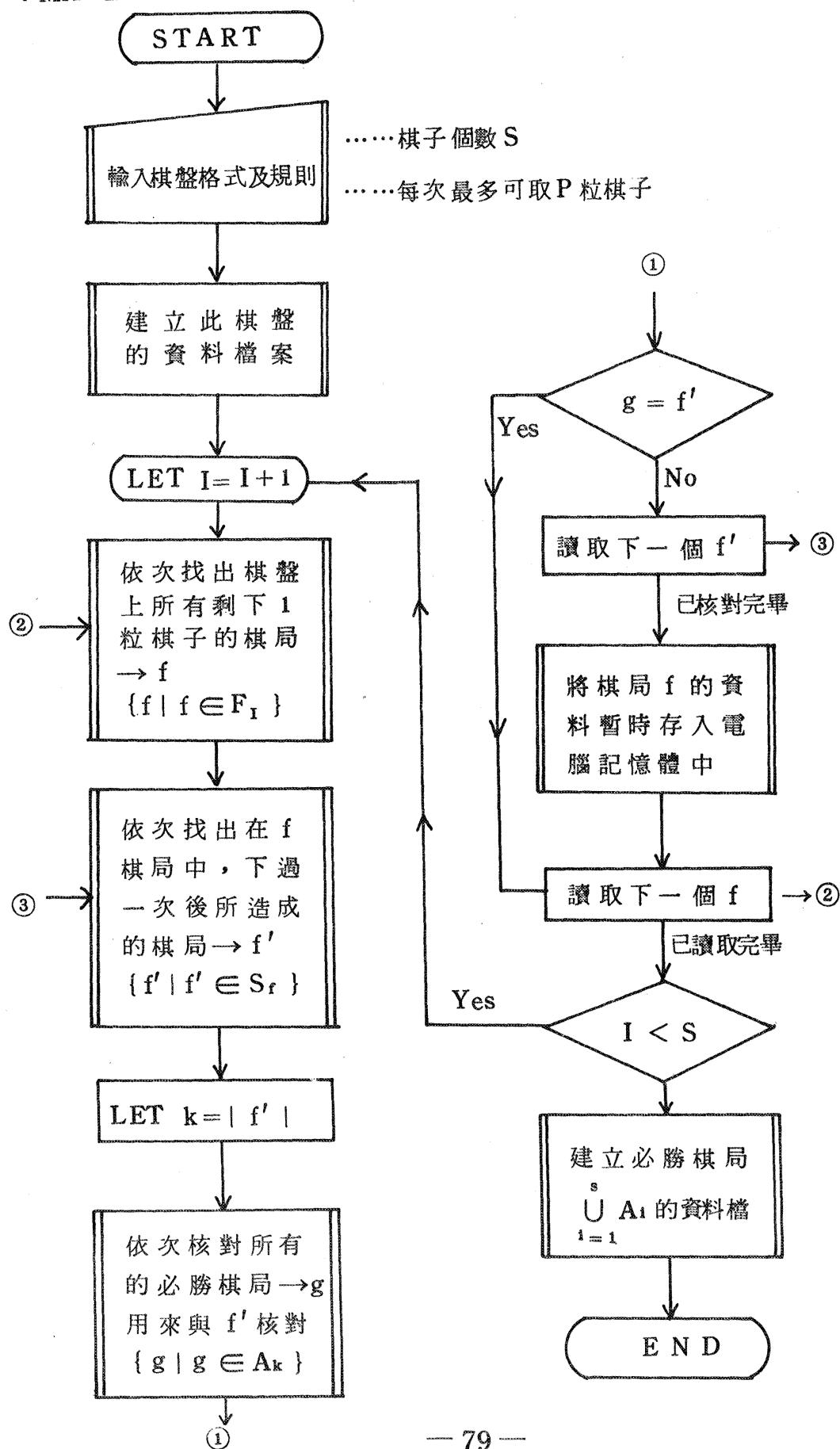
於遊戲中實際驗證上述的數學推論。

(二)程式解說：

由於程式十分複雜，不易解說，僅列出程式(二)的流程圖作爲說明，並與上述的數學推論配合解說。

程式(一)

*MAKE A CHESSBOARD * 程式流程圖



(三)本程式使用APPLE SOFT 及DOS 3.3 設計。

(四)執行結果：限於篇幅，無法列出。

七、結論

(一)由電腦執行結果我們發現：原始棋盤之棋子數，稍加一、二個，執
執行時便要花數倍的時間，所以我們所得到的，只是「方法存在」，而却没有得到「方法經濟」，加上APPLE II 功能的先天
限制，所以速度十分緩慢，若能換上大電腦執行，必可改善速度
。

(二)證明了定理(一)、(二)之後，使我們有了另一種想法，或許所有的益
智遊戲，諸如象棋、西洋棋、跳棋或○×棋……等。亦是在未下
之前，便已決定了勝負，或者是平手，只是象棋這類遊戲，具有
歷史文化，能夠久傳於世的益智棋，並非像上述證明那樣單純容
易就導出定則。如果有可能證出，電腦也得“RUN”個它幾百
天、幾十年，甚至……。

(三)若此種益智棋規則不是“PICK-A-LINE” 則不見得可行，
因為它不同一般分堆方式的「拈」遊戲，而本身卻已「次序化」
必須考慮彼此的相關位置，使整個過程變得十分複雜。不知可否
找出另一種推算方法，使電腦不須先討論過所有的情況，便可直
接對變，這是我們所展望的目標。

八、參考資料

(一)APPLE DOS 使用手册 百慶書局

(二)大家都來學電腦 施純協著

評語 1.本作品對於「拈棋子」的競局有深入的研究，其中證明兩個
數學定理以確定必勝競局存在，並以電腦程式找尋必勝競局
以選擇必勝策略。

2.本研究中所證得的必勝競局存在定理頗有創意。

3.電腦程式相當複雜，對於高中生而言，能有如此深厚的程式

造詣，誠屬難能可貴。

4 「拈棋子」的競局在電腦遊戲中出現很多，但未見有與本作品相似的程式，相信本作品是獨立研究，並有創意。

程式(2)

JLIST

```
1000 REM ===== MAKE A CHESSBOARD =====
1010 HIMEM: 19999
1020 D$ = CHR$(4):C$ = CHR$(7)
1030 TEXT : HOME
1040 PRINT "*****"
1050 PRINT "*"
1060 PRINT "*      PICK-A-LINE CHESS      *"
1070 PRINT "*-----"
1080 PRINT "*"
1090 PRINT "*      MAKE A CHESSBOARD      *"
1100 PRINT "*"
1110 PRINT "*      LOOK FOR CHAMPION      *"
1120 PRINT "*"
1130 PRINT "*****"
1140 PRINT
1150 PRINT "-----": PRINT : PRINT
1160 PRINT "NOW ! YOU SHOULD MAKE A CHESSBOARD .": PRINT
1170 INPUT "THIS CHESSBOARD IS CALLED - ";NAME$
1180 H = PEEK (- 16336): PRINT : PRINT
1190 PRINT "THE LENGTH OF THE CHESSBOARD IS - ";
1200 GET X$:H = PEEK (- 16336):X = VAL(X$): IF X < 2 OR X > 6 THEN 1200
1210 PRINT X: PRINT
1220 PRINT "THE WIDTH OF THE CHESSBOARD IS - ";
1230 GET Y$:H = PEEK (- 16336):Y = VAL(Y$): IF Y < 1 OR Y > 6 THEN 1230
1240 PRINT Y: PRINT
1250 IF X > = Y THEN PRINT : GOTO 1270
1260 PRINT C$;"THE LENGTH IS BIGGER THAN THE WIDTH !?": PRINT : GOTO 1190
1270 DIM C(6,6):S = 0
1280 FOR E = 1 TO X
1290 FOR F = 1 TO Y
1300 PRINT "THE ";E;"-";F;" CHESSMEN IS PRESENT . (Y/N) ";
1310 GET GC$:H = PEEK (- 16336)
1320 IF GC$ = "Y" THEN S = S + 1:C(E,F) = S: GOTO 1350
1330 IF GC$ = "N" THEN C(E,F) = 0: GOTO 1350
1340 GOTO 1310
1350 PRINT GC$: PRINT
1360 NEXT F,E
1370 PRINT
1380 FOR F = Y TO 1 STEP - 1
1390 PRINT TAB(F + 10);
1400 FOR E = 1 TO X
1410 IF C(E,F) THEN PRINT "O ";: GOTO 1430
1420 PRINT ". ";
1430 NEXT E: PRINT
1440 NEXT F
1450 PRINT : PRINT : H = PEEK (- 16336)
1460 PRINT : PRINT "DO YOU LIKE THIS CHESSBOARD ? (Y/N) ";
1470 GET GC$:H = PEEK (- 16336): IF GC$ = "Y" THEN PRINT : PRINT : GOTO 150
0
1480 IF GC$ < > "N" THEN PRINT C$: GOTO 1470
1490 RUN
1500 H = PEEK (- 16336)
1510 PRINT "THE RULE OF THIS GAME IS -----"
1520 PRINT "PICKING (1-N) CHESSMEN EVERY TIME !"
1530 PRINT "NOW ! INPUT THE NUMBER (N) IS - ";
1540 GET P$:P = VAL(P$): IF P < 1 OR P > X THEN 1540
1550 PRINT P: PRINT : PRINT : PRINT
1560 DIM X(21),Y(21),H(21),Z(21),V$(120)
1570 FOR E = 1 TO X: FOR F = 1 TO Y
```

```

1530 Q = C(E,F): IF Q = 0 THEN 1600
1590 X(Q) = E:Y(Q) = F
1600 NEXT F,E
1610 REM **** MAKE THE FILE OF THIS CHESSBOARD ****
1620 PRINT D$;"OPEN THE NAMES DATA OF GAME"
1630 PRINT D$;"READ THE NAMES DATA OF GAME"
1640 INPUT Q
1650 IF Q = 0 THEN 1710
1660 DIM N$(30)
1670 FOR I = 1 TO Q
1680 INPUT N$(I)
1690 IF N$(I) = NAME$ THEN 1790
1700 NEXT I
1710 PRINT D$;"DELETE THE NAMES DATA OF GAME"
1720 PRINT D$;"OPEN THE NAMES DATA OF GAME"
1730 PRINT D$;"WRITE THE NAMES DATA OF GAME"
1740 PRINT Q + 1
1750 FOR I = 1 TO Q
1760 PRINT N$(I)
1770 NEXT I
1780 PRINT NAME$
1790 PRINT D$;"CLOSE THE NAMES DATA OF GAME"
1800 REM **** SEARCH FOR THE CHESSMEN IN A ROW ****
1810 V = S + 1
1820 FOR I = 1 TO S:V$(I) = CHR$(I): NEXT I
1830 FOR D = 1 TO P - 1
1840 FOR I = 1 TO X
1850 FOR J = 1 TO Y
1860 FOR G = 1 TO 3
1870 V$(V) = ""
1880 FOR L = 0 TO D
1890 ON G GOTO 1900,1910,1920
1900 M = I + L:N = J: GOTO 1930
1910 M = I + L:N = J + D - L: GOTO 1930
1920 M = I:N = J + L
1930 IF M > X OR N > Y THEN 1980
1940 MN = C(M,N): IF MN = 0 THEN 1980
1950 V$(V) = V$(V) * CHR$(MN)
1960 NEXT L
1970 V = V + 1
1980 NEXT G
1990 NEXT J
2000 NEXT I
2010 NEXT D
2020 V = V - 1
2030 G = 2 ^ (S - 3) + 20000: FOR I = 20000 TO G: POKE I,0: NEXT I
3000 REM **** SEARCH FOR THE CHAMPIONS OF THIS CHESSBOARD ****
3010 FOR I = 1 TO S
3020 T = 0:N = 1:H(1) = 0: IF I = 2 THEN 3550
3030 FOR M = N TO I
3040 IF M = N THEN H(M) = H(M) + 1: GOTO 3060
3050 H(M) = H(M - 1) + 1
3060 NEXT M
3070 N = I:A$ = "":G = 1
3080 FOR F = 1 TO S
3090 IF G > I THEN 3110
3100 IF H(G) = F THEN A$ = A$ + "1":G = G + 1: GOTO 3120
3110 A$ = A$ + "0"
3120 NEXT F
3130 REM **** TRY TO PICK THE CHESSMEN AWAY & CHECK THE LEFT ONE ****
3140 FOR J = 1 TO V
3150 B$ = V$(J):L = LEN(B$): IF L = I THEN 3290

```

```

3160 G = 1:B = ASC ( MID$ (B$,1,1)):W = 0
3170 FOR F = 1 TO S
3180 A = VAL ( MID$ (A$,F,1))
3190 IF G > L OR F < B THEN 3230
3200 IF A = 0 THEN 3270
3210 G = G + 1: IF G > L THEN 3240
3220 B = ASC ( MID$ (B$,G,1)): GOTO 3240
3230 IF A THEN W = W + 2 ^ (S - F)
3240 NEXT F
3250 G = INT (W / 8):Q = W - 8 * G:H = PEEK (20000 + G)
3260 G = INT (H / 2 ^ Q): IF (G / 2) > INT (G / 2) THEN 3530
3270 NEXT J
3280 REM **** SAVE THE CHAMPIONS OF THE COUNTED CHESS ON MEMORY ****
3290 PRINT :T = T + 1:W = 0
3300 FOR E = 1 TO S
3310 IF VAL ( MID$ (A$,E,1)) THEN W = W + 2 ^ (S - E)
3320 NEXT E
3330 PRINT "(";T;")";
3340 H = PEEK (- 16384): IF H < 128 THEN 3500
3350 FOR F = Y TO 1 STEP - 1
3360 PRINT TAB (F + 10);
3370 FOR E = 1 TO X
3380 Q = C(E,F): IF Q = 0 THEN 3400
3390 IF VAL ( MID$ (A$,Q,1)) THEN PRINT "O ";: GOTO 3410
3400 PRINT ". ";
3410 NEXT E: PRINT
3420 NEXT F
3430 IF H < > 155 THEN 3460
3440 GOSUB 5000: PRINT : PRINT : PRINT "DO YOU WANT TO CONTINUE ? ";
3450 GET G$: IF G$ = "N" THEN PRINT : END
3460 IF G$ < > "Y" THEN 3450
3470 PRINT
3480 H = PEEK (- 16336): PRINT
3490 POKE - 16368,0
3500 PRINT
3510 G = INT (W / 8):Q = W - 8 * G:H = G + 20000: POKE H, PEEK (H) + 2 ^ Q
3520 REM **** NEXT CONSTITUTION ****
3530 IF H(N) < (S + N - I) THEN 3030
3540 N = N - 1: IF N > 0 THEN 3530
3550 H = PEEK (- 16336): PRINT : PRINT
3560 PRINT "THERE ARE ";T;" CHAMPIONS WITH ";I;" CHESSMEN"
3570 PRINT "-----": PRINT : PRINT
3580 NEXT I
4000 REM **** MAKE THE FILE OF THIS CHESSBOARD ****
4010 PRINT D$;"BSAVE ";NAME$;" CHAMPIONS DATA , A20000, L";2 ^ (S - 3)
4020 PRINT D$;"OPEN ";NAME$;" FILE"
4030 PRINT D$;"DELETE ";NAME$;" FILE"
4040 PRINT D$;"OPEN ";NAME$;" FILE"
4050 PRINT D$;"WRITE ";NAME$;" FILE"
4060 PRINT X: PRINT Y: PRINT S: PRINT P
4070 FOR I = 1 TO S: PRINT X(I): PRINT Y(I): NEXT I
4080 PRINT D$;"CLOSE ";NAME$;" FILE"
4090 PRINT : PRINT "PRESS THE SPACE BAR TO PLAY GAMES ! ";
4100 GET A$: IF A$ < > " " THEN 4100
4110 PRINT : PRINT D$;"RUN PICK-A-LINE CHESS"
5000 REM ***** PRESERVE THE NOTE *****
5010 PRINT D$;"BSAVE ";NAME$;" CHAMPIONS DATA , A20000, L";2 ^ (S - 3)
5020 PRINT D$;"OPEN ";NAME$;" NOTE"
5030 PRINT D$;"WRITE ";NAME$;" NOTE"
5040 PRINT I
5050 FOR Z = 1 TO I: PRINT H(Z): NEXT Z
5060 PRINT D$;"CLOSE ";NAME$;" NOTE"
5070 RETURN

```