

# 四邊形的邊角、對角線與面積的關係

## 高小組數學科第一名

高雄市鳳林國民小學

作者：龔文盟、李信蓉

指導教師：周清榮、郭敏郎



### 一、研究動機

- (一)數學課本第九章第八單元「四邊形」的內容說：「四邊形各邊長度固定，它的形狀和大小會改變。」於是心中產生一個疑問：「四邊形的形狀和大小的改變跟什麼有關係呢？」
- (二)再讀到第九單元「四邊形和三角形的面積」，知道四邊形面積等於分成兩個三角形面積的和，求得像正方形面積＝一邊×一邊，長方形面積＝長×寬，平行四邊形面積＝底×高，等腰梯形面積＝(上底＋下底)×高÷2，發現四邊形的面積似乎跟對角線沒有關係，於是心裏想：「四邊形的對角線與面積沒有關係嗎？」

## 二、研究目的

- (一) 找出四邊形的對角線與面積的關係。
- (二) 找出四邊形的內角與面積的關係。
- (三) 找出四邊形的邊長與面積的關係。

## 三、研究問題

- (一) 四邊形的對角線與面積有什麼關係？
- (二) 四邊形的內角與面積有什麼關係？
- (三) 四邊形的邊長與面積有什麼關係？
- (四) 圓內接四邊形的邊、角、對角線與面積有什麼關係？
- (五) 圓外切四邊形的邊、角、對角線與面積有什麼關係？

## 四、使用器材

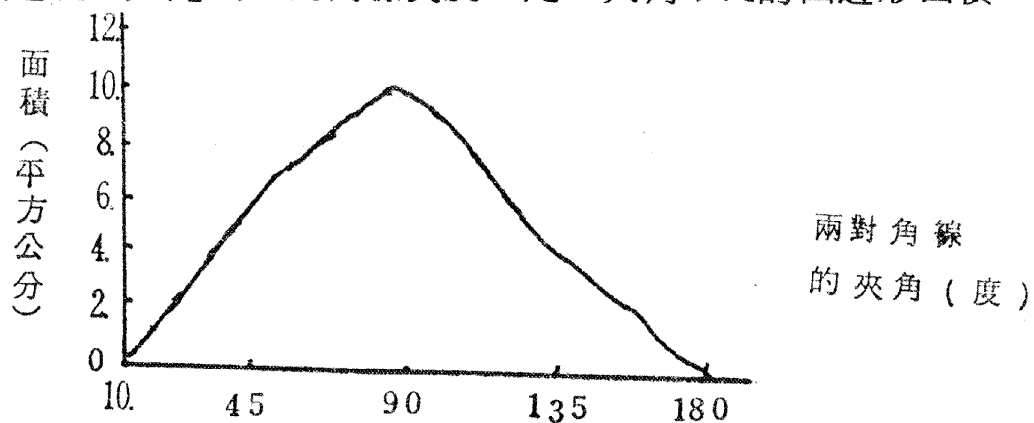
- (一) 直尺 (精度  $\frac{1}{2}$ )
- (二) 圓規
- (三) 量角器
- (四) 方眼紙
- (五) 四邊形教具

## 五、研究過程

[問題一] 四邊形的對角線與面積有什麼關係？

[過程一] 比較兩對角線的長度、夾角相同，相交處不同的四邊形面積。

[過程二] 比較兩對角線長度一定，夾角不同的四邊形面積。



[過程三] 比較兩對角線互相垂直的四邊形面積。

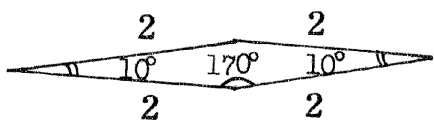
[過程四] 比較任一條對角線延長後，四邊形面積。

[過程五] 比較兩對角線同時延長後的四邊形面積。

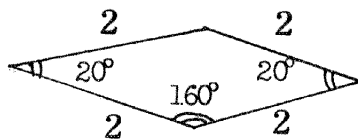
[問題二] 四邊形的內角與面積有什麼關係？

[過程一] 比較四邊一定，且等長，對角和（內角）不一樣的四邊形面積。

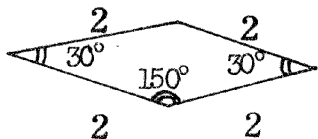
長度單位：公分



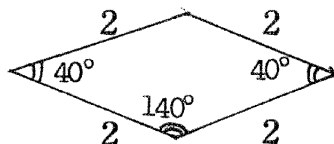
面積 = 0.69 平方公分



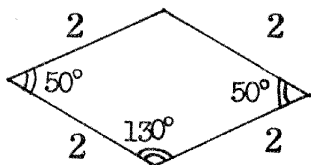
面積 = 1.37 平方公分



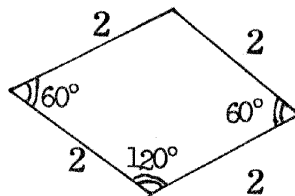
面積 = 2 平方公分



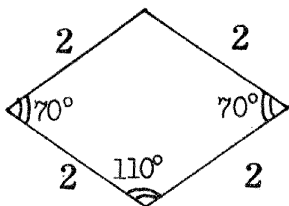
面積 = 2.57 平方公分



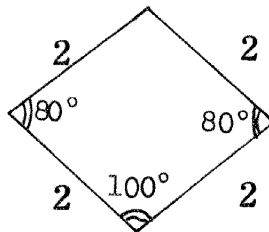
面積 = 3.06 平方公分



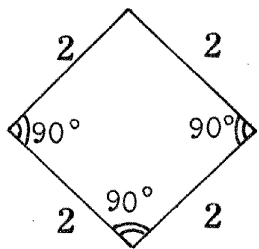
面積 = 3.46 平方公分



面積 = 3.76 平方公分



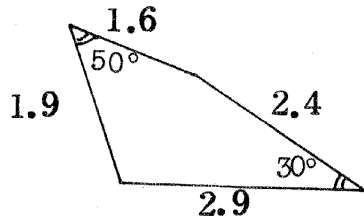
面積 = 3.94 平方公分



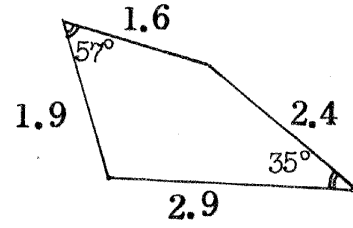
面積 = 4 平方公分

[過程二] 比較四邊一定，但不等長，對角和(內角)不一樣的四邊形面積：

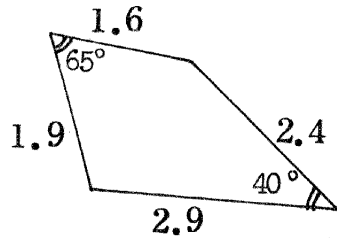
長度單位：公分



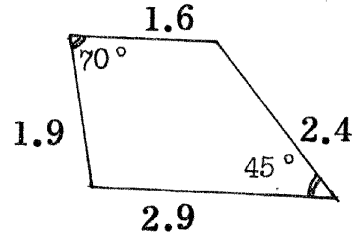
面積 = 2.9 平方公分



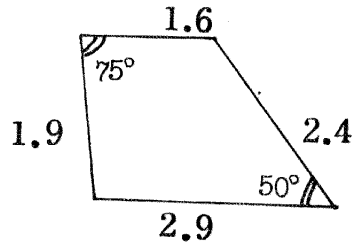
面積 = 3.24 平方公分



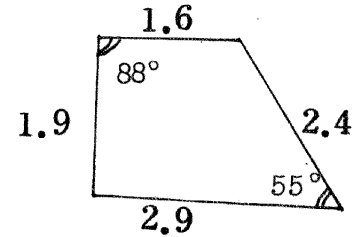
面積 = 3.32 平方公分



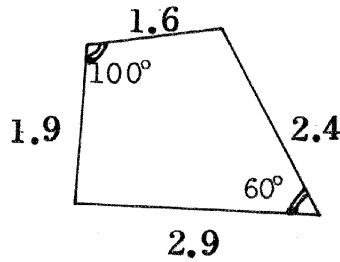
面積 = 3.89 平方公分



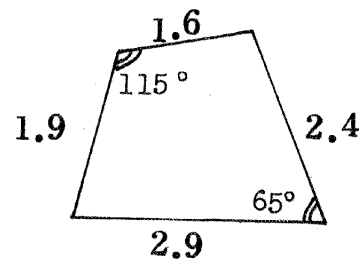
面積 = 4.13 平方公分



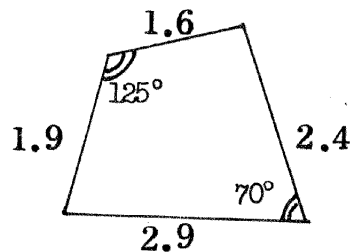
面積 = 4.37 平方公分



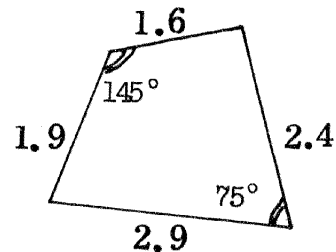
面積 = 4.51 平方公分



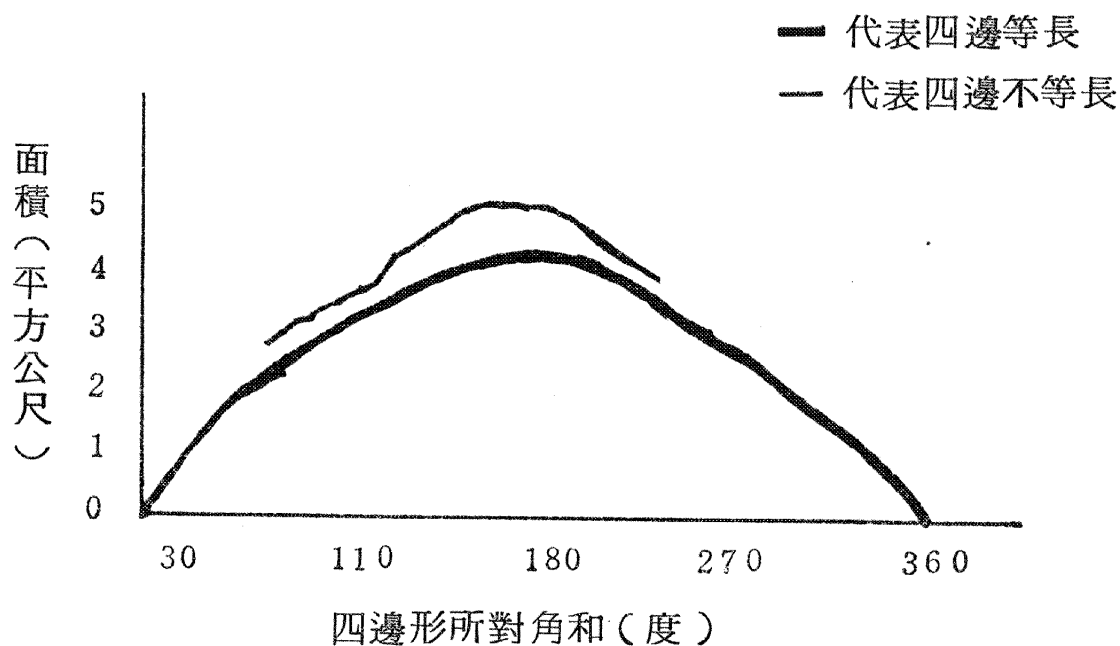
面積 = 4.58 平方公分



面積 = 4.52 平方公分



面積 = 4.23 平方公分



[問題三] 四邊形的邊長與面積有什麼關係？

[過程一] 比較對角和不為 180 度的四邊形面積。

[過程二] 比較對角和為 180 度的四邊形面積。

[問題四] 圓內接四邊形的邊、角、對角線與面積有什麼關係？

[過程一] 比較兩對角線夾角相等，而相交點處不一樣的等圓內接四邊形的面積：

[過程二] 比較兩對角線的相交點固定，夾角不一樣的等圓內接四邊形的面積：

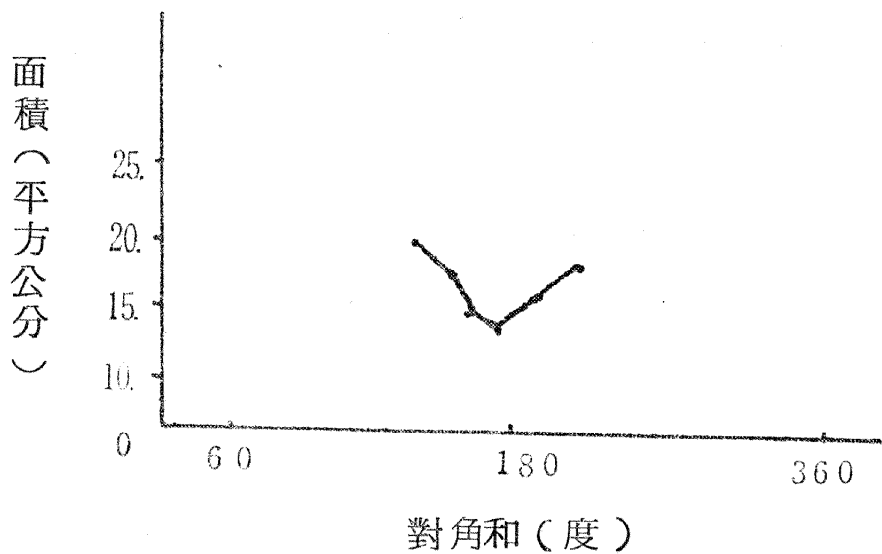
[過程三] 比較一內角固定，另一內角不同的等圓內接四邊形的面積：

[過程四] 比較邊長不同的等圓內接四邊形的面積：

[問題五] 圓外切四邊形的邊、角、對角線與面積有什麼關係？

[過程一] 比較兩對角線的夾角線的夾角一定，而相交點處不同的等圓外切四邊形的面積：

[過程二] 比較對角和 (內角) 不同的等圓外切四邊形的面積：



[過程三] 比較對角和為 180 度的等圓外切四邊形的面積：

## 六、結 論

- (一) 四邊形的面積與四邊形的邊、角、對角線有密切的關係。
- (二) 四邊形兩對角線的夾角一定，四邊形的面積與對角線的長度。
- (三) 四邊形只要對角線的夾角、長度一樣，面積一定會相等。
- (四) 四邊形的面積除了跟對角線長度有關外，還跟兩對角線的夾角有關。
- (五) 四邊形的兩對角線的長度一定，當兩對角線互相垂直時，所形成的四邊形面積最大。
- (六) 四邊形的兩對角線互相垂直時，面積就等於兩對角線長度乘積的二分之一。
- (七) 四邊形的兩對角線的長度延長倍數的乘積，就是延長後新四邊形面積為原四邊形面積的倍數。
- (八) 四邊形的四邊固定，當對角和為 180 度時的面積最大。
- (九) 四邊形的四邊固定，當對角和從 0 度到 180 度變化時，面積與對角和成正比，當對角和從 180 度到 360 度改變時，面積與對角和成反比。
- (十) 圓內接四邊形的一個內角固定，當另一個內角的頂點移到使得

兩邊等長時的四邊形面積最大。

(ㄅ)等圓外切四邊形的對角和為  $180^\circ$  時的面積最小。

(ㄆ)等圓外切四邊形的對角和從  $0^\circ$  到  $180^\circ$  改變時，面積與對角和成反比，當對角和對  $180^\circ$  到  $360^\circ$  時，面積與對角和成正比。

(ㄇ)四邊形的對角和為  $180^\circ$  時，面積的平方就等於以周長的一半減去各邊長後之差的乘積。

(ㄏ)周內接四邊形的邊長與面積的關係，跟對角和為  $180^\circ$  的四邊形邊長與面積的關係一樣，由此我們可以知道圓內接四邊形的對角和一定為  $180^\circ$ 。

(ㄏ)圓外切四邊形的對角和為  $180^\circ$  時，面積的平方就等於周邊長度的乘積。

(ㄏ)等圓內接、外切四邊形的周長越長，面積就越大。

## 七、參考資料

(一)數學課本第九冊第八、九單元。

(二)數學課本第十冊第十三單元。

(三)科學月刊第六卷第八期。

(四)中華兒童百科全書公部。

評語：所用觀察與歸納的方法研究四邊形的面積，發現四邊長都固定的四邊形中以圖內接四邊形的面積為最大，這個結論不但很精緻而且具有創新性。