

偏光彈性力學的實驗

國中教師組物理科第二名

台北市立金華國中

作者：楊莉莉、楊五嶽

一、研究動機

國中物理課本中論及彈性物體在彈性限度內受外力作用發生形變，當外力除去後，由於彈力（即應力）之作用，會恢復原狀，但一般教師及學生皆無法充分了解應力及其作用情況。暑假師大進修，理學院恰有一塵封多年，世銀貸款所採購之反射式偏光彈儀，自己對攝影本有興趣，也有多年的拍攝經驗，請得教授同意，以參與此項實驗，期能經由偏光拍攝、分析、了解物體所受應力的大小及方向。且光測彈性力學目前已是航空工程、機械及土木工程上的一項重要的研究領域，可藉助光的特性來觀看結構物體機械產品的強度、瑕疵、變形、外形及表面的磨損，且經由偏光攝得相片之彩色條紋，十分迷人，更吸引我作此實驗之樂趣。

二、研究目的

採用反射偏光的裝置，使偏極光進入待測物之暫態雙折射材料，再經由波板、分析板反射而回所攝得一組彩色相片中看出等俯角及等應力差條紋，期能判斷物體上各點所受應力的大小及方向。

三、實驗儀器裝置

(一)線性偏極板 (Linear Polarizer)

具有將光限定在單一方向振動的特性。偏光彈儀上共有兩片，近光源的是偏極板 (Polarizer)，近觀測者的是分析板 (Analyzer)。

(二)波板 (Wave Plate) ($\frac{1}{4}$ 波板)

具雙折射性，能將通過之線性偏極光，分為兩個相互垂直且行

進速度不同之分量，其傳播速度也不同，造成射出波板後具有相對之相位差。（如圖 2）所示。

$$\Delta = \Delta_1 - \Delta_2 = \frac{2\pi h}{\lambda} (n_1 - n_2)$$

$$h = \frac{1}{4} \lambda \quad \Delta = \frac{\pi}{2}$$

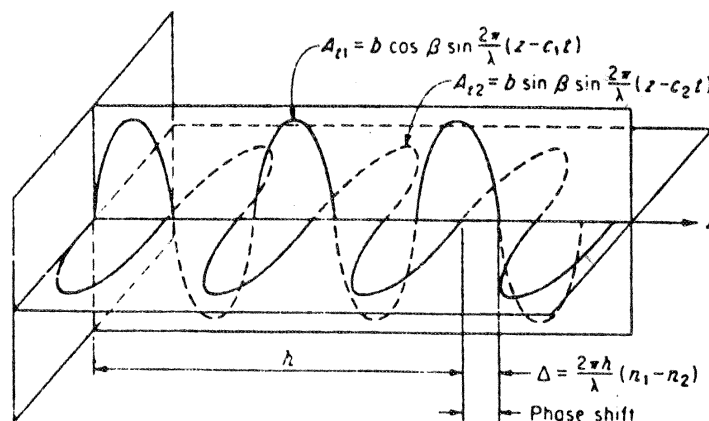


Figure 2 Retardation Produced by a wave plate.

(三)單色光片 (monochromator)

計算應力條紋數目時，避免白光內各種波長的光彼此重疊干擾，故在光源或分析板後加一單色光片，則可得清晰條紋，以利觀測或攝影記錄。

攝影機 Nikon (標準鏡頭 NIKKOR 35 mm 1 : 1.4)

採用伸縮鏡頭多 $\frac{1}{60}$ sec. 5.6，距 0.6 m 可拍得顏色鮮明的相片。

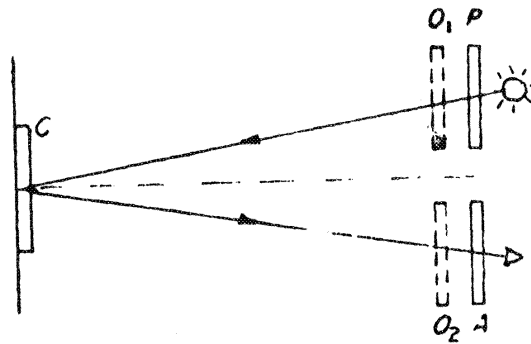
本組實驗借用 Olympus 相機及 SONY CLOSE UP (二套加倍鏡組合) 以拍攝近距相片。

因相機附自動感光指針，故可隨著被測樣品之明暗程度不同而調整光圈及快門。

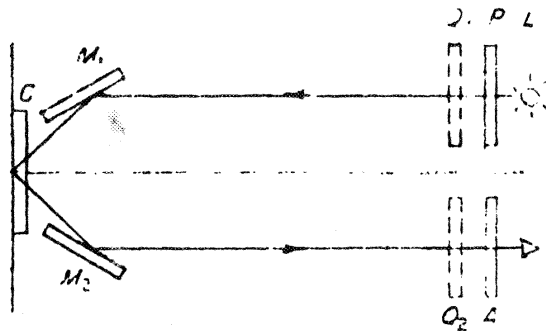
望遠鏡頭 希望能拍攝下比較密的彩色條紋，但因光線太暗無法拍攝。

三腳架 固定住偏光彈儀及相機。

四、反射式偏光彈儀光學系統之圖解說明



F3 反射式偏光彈儀之光學系統



F4 欲攝得平衡反射回來之光波所附之鏡片反射

本實驗採用 Fig 3，以二台偏光彈儀同時使用，一台產生光源用它的偏極板，另台架高（或手擡）使用其分析板，避免拍照時反光或光源不均勻。拍照所獲得之 ISOCINICS 及 ISOCROMATICS 均良好，彩色鮮明而不影響成果。

Fig 4 裝置所示，光線多了兩次反射，顯得較暗，受力樣本不好放置，且控制反射鏡之支架又缺了一支往下偏，難以拍攝。如果實驗室僅有一台偏光彈儀，若拍攝遠，可採此法試試。唯光圖須再放大，速度須放慢。

五、數學分析及文獻參考

(一)通過偏極板的垂直偏極光，可以以數學式 $A = A \sin \omega t$ 表示，當它要進入具有雙折射性受力物體時，應沿力主軸 σ_1, σ_2 方向，分解為兩分量 $A_1 = A \sin \omega t \cos \alpha$

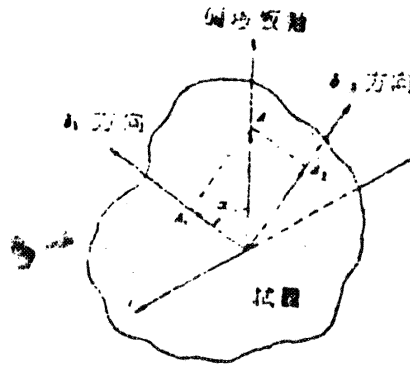
$$A_2 = A \sin \omega t \sin \alpha$$

由於 A_1, A_2 在受力體中傳速度不同（一快、一慢），以致在穿透後，造成兩分量成相對相位差（ Δ ）

$$\Delta = 2 \pi N = \frac{h}{f \sigma} (\sigma_1 - \sigma_2)$$

$$N = \frac{\Delta}{2 \pi} \text{ 相對遲滯}$$

$f \sigma =$ 對材料應力條紋常數



F 5 平面偏極光進入受力試體時之光波向量分解圖

穿透受力體後 A'_1, A'_2 可表示為

$$A'_1 = A \cos \alpha \cdot \sin (\omega t + \Delta / 2) \Rightarrow \text{橢圓振動}$$

$$A'_2 = A \sin \alpha \cdot \sin (\omega t + \Delta / 2) \text{ 可參看 Fig}$$

最後 A'_1, A'_2 分量進入分析板時，根據向量疊加原理得一合成光波 A 為

$$A = A'_2 - A'_1$$

$$= A'_2 \cos \alpha - A'_1 \sin \alpha$$

$$= a \sin \alpha \cos \alpha [\sin (\omega t - \Delta / 2) - \sin (\omega t + \Delta / 2)]$$

$$= -a \sin 2 \alpha \cdot \cos \omega t \cdot \sin \Delta / 2$$

由上式可知，若人立於分析板後，所觀看光的亮度

$$I = K \sin^2 2\alpha \cdot \cos^2 \omega t \cdot \sin^2 \frac{\Delta}{2}$$

式中影響亮度的因子有

$$\sin^2 2\alpha, \cos^2 \omega t \text{ 及 } \sin^2 \frac{\Delta}{2} \text{ 三項}$$

(二) 頻率對亮度的影響 ($\cos^2 \omega t$)

當 $\omega t = [(2n + 1) \cdot \pi] / 2, n = 0, 1, 2, \dots$ 時，

$\cos^2 \omega t = 0, I = 0$ ，應呈黑暗，然而因為 ω 之值非常的大 (約 $10^{15} \text{ rad} / \text{sec}$) 以致肉眼及任何高速快門相機，無法記錄下這種週期性的瞬時黑暗，因而觀察過程中，總覺得很明亮。所以在靜態光彈應用中，此頻率項 $\cos \omega t$ ，對亮度沒有影響。

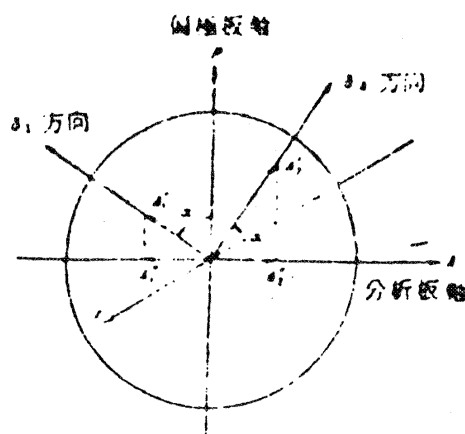


圖 6：平面偏極光穿越分析板時之光波向量圖

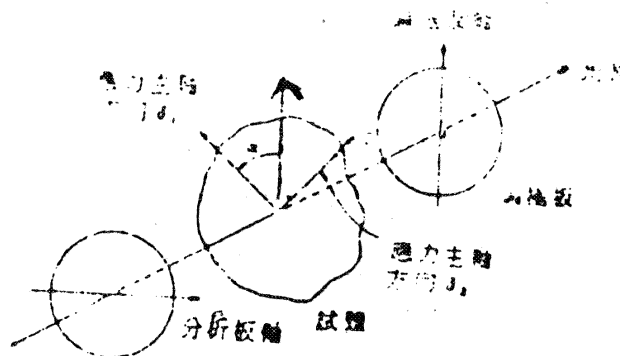
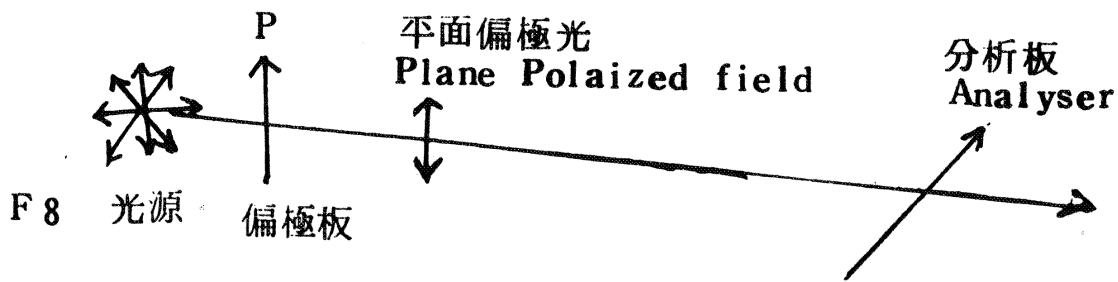


圖 7：平面偏極光中之受力光彈試體

平面偏極光

1 $P \perp A$ (偏極板垂直於分析板)

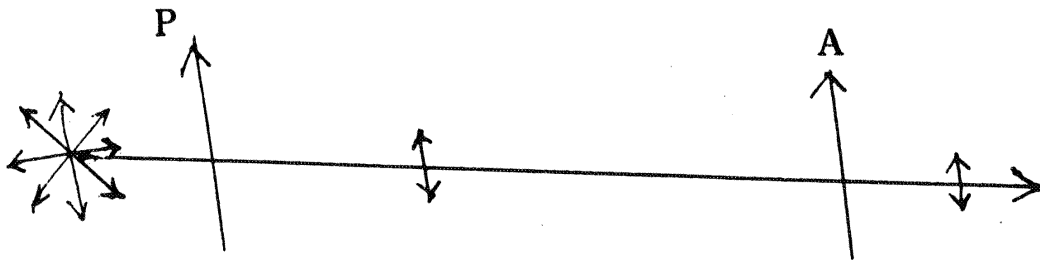


此時光線最暗，觀察 ISOCLINICS 較清楚

2 $P // A$

F 9

Light transmitted
(Bright)



F 9

光完全通過，故此時最亮。

以 Bright 找 ISCONLINICS 也可以，祇是白紋不如暗紋清楚。

(三) 應力主軸方向亮度的影響 ($\sin^2 2$)

當 $2\alpha = n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots, n$, 即 $\alpha = 0$ 或 $\alpha = n$ ($\pi/2$) 時亮度等於零，呈現黑暗。即受力體上的某一點，若其應力主軸方向與偏極板的軸的方向一致時，在平面偏極光照射下，該點所在的位置為暗點，也就是一雙折射材料在受力後，以白色平面偏極光照射，所呈現之暗紋圖形，即代表在該條紋位置上，其應力主軸方向與偏極板軸方向一致。

是以我組實驗以同步旋轉偏極板與分析板，使偏極板軸與垂直軸夾角由 $\theta = 0^\circ \sim 90^\circ$ ，如圖 25 所示，及如我組所攝相

片第(2)捲 30~36張，或第3捲，已將相片排好置於透明相袋中，可看出等俯角變化條紋，每隔 90 度又回復同一張， \therefore
 $\sin 2(\alpha + 90) = \sin(180^\circ + 2\alpha) = \sin 2\alpha$ ，故以後在繪製 ISOCLINICS 時，不必超過 90 度。此為光彈應力中一項重要技巧。

(四) 受應力之彈性雙折射物體在圓形偏極光照射下由前

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\begin{cases} A_1' = a \cos 45^\circ \cos wt \\ A_2' = a \sin 45^\circ \sin wt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos(wt + \alpha) \\ y = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin wt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = X \cos \beta + Y \sin \beta \\ y' = Y \cos \beta + X \sin \beta \end{cases}$$

$$x' = \frac{a}{\sqrt{2}} [\cos \beta \cos(wt + \alpha) + \sin \beta \sin wt]$$

$$y' = \frac{a}{\sqrt{2}} [\cos \beta \sin(wt + \frac{1}{2}\pi) - \sin \beta \cos$$

$$(wt + \frac{1}{2}\pi + \alpha)]$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}} [\cos \beta \cos wt + \sin \beta \sin(wt + \alpha)]$$

分析板對 OX' 放置 45°

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2} [(\cos \alpha - 1) \cos \beta' - \sin \alpha \sin \beta']$$

$\beta' = \beta + wt$ 因波之振幅

$$\frac{a}{\sqrt{2}} [(\cos \alpha - 1)^2 + \sin^2 \alpha]^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} [2(1 - \cos \alpha)]$$

$$I = \frac{ka^2}{2} (1 - \cos \alpha) = ka^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$I = I_0 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (\text{順 } 45^\circ)$$

$$Y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}} \quad (\text{逆 } 45^\circ)$$

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$I_\theta = Ka^2 (1 + \cos 2\theta \cos 2\theta' + \sin 2\theta \sin 2\theta' \cos \alpha)$$

$$= \text{constant}$$

$$\theta' \pm 90^\circ = \theta''$$

$$I_{\theta'} = Ka^2 (1 - \cos 2\theta \cos 2\theta' - \sin 2\theta \sin 2\theta' \cos \alpha)$$

$$I_\theta + I_{\theta''} = 2Ka^2 = I_0$$

分析板相差 90° ，透過之光強度 = 定值 I 。

= 穿透分析板前所有同向振動之光強。

六、實驗步驟

(一) 應力主軸方向測定

平面偏光 (Plane polariscope)

1. 開電源，以白光做光源。
2. 上被測物體上，選一固定方向（本組採用垂直軸），做為應力主軸方向標示參考軸。
3. 分析板與偏極板互相垂直為（ 0° ）（Crossed polaroids）。
4. 順時針旋轉 $\frac{1}{4}$ 波片至盡頭，使 $\frac{1}{4}$ 波片不發生作用。
5. 此時產生平面偏極光，即看到光最暗的位置。

6. 同步旋轉分析板和偏極板由 0° 到最大角度，每 10° 照一張相，找出每一點的 ISOCLINICS 等俯角，呈現之彩色條紋為 ISOCHROMATIC Fringe Pattern 等應力差條紋圖形。
7. Parallel Polaroids (分析板與偏極板互相平行) 偏極板置於 0° ，而分析板置於 90° (刻度 5 處)。
8. 除去 $\frac{1}{4}$ 波片。
9. 步驟如 6。

(二) 圓偏光 Circular Polariscope

1. 旋轉而波板上之標示鈕至 M 處 (逆時針旋轉至盡頭)。
 2. 此時波板快、慢軸與偏極板、分析板軸方向夾角為 45° 通過 $\frac{1}{4}$ 波板之偏極光 \Rightarrow 圓偏極光。
 3. 波板與波板 $\left\{ \begin{array}{l} \text{垂直、分析板與偏極板垂直} \\ \text{平行、分析板與偏極板平行} \end{array} \right. \Rightarrow$ 暗紋 (DARK)
 - 波板與波板 $\left\{ \begin{array}{l} \text{垂直、分析板與偏極板平行} \\ \text{平行、分析板與偏極板垂直} \end{array} \right. \Rightarrow$ 亮紋 (Bright)
- 可得無等俯角角條紋之等應力差條紋。圖形如 P1、P2 所示。

(三) 決定 N 值的方法：

1. 白色圓形偏極光找出 $N = 0$ 的位置，由邊界條件或觀察受力大小變化過程中，位置均不改變的亮點 ($\sigma_1 = \sigma_2$)。
2. 條紋顏色變化為黃 \rightarrow 紅 \rightarrow 綠 \rightarrow 黃 \rightarrow 紅 \rightarrow 綠，則 N 值遞增。
3. 應力集中地區加上單色光片，才能看清條紋並賦 N 值。

(四) 決定 0.1 N 值的方法：

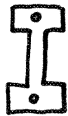
1. 如步驟 (二) 使產生圓偏極光。
2. 加濾光片。
3. 每隔 18° 旋轉分析板一次 (刻度盤上之 1 2 3 20.)，並拍照一張。

(五) 0.5 N 差值之方法：

圓偏光 $A \perp P$ 與圓偏光 $A // P$ 比較其 N 值差 $0.5 N$ 。

(六)、(七)採用穿透式偏光彈儀

(六)材料應力條紋常數 $f\sigma$ 之求法：

必在取得之雙折射物質中同時切取一塊  形，經由消取殘餘應力之處理。（在烤爐中慢慢加溫烘烤再逐漸退火……）後，從固定之上下兩孔中，給予負載 P ，記錄中央部分明亮之變化即 N 值。作 $P - N$ 圖。

(七)作圓型及馬蹄型透明暫態雙折射片的偏光拍攝試驗。

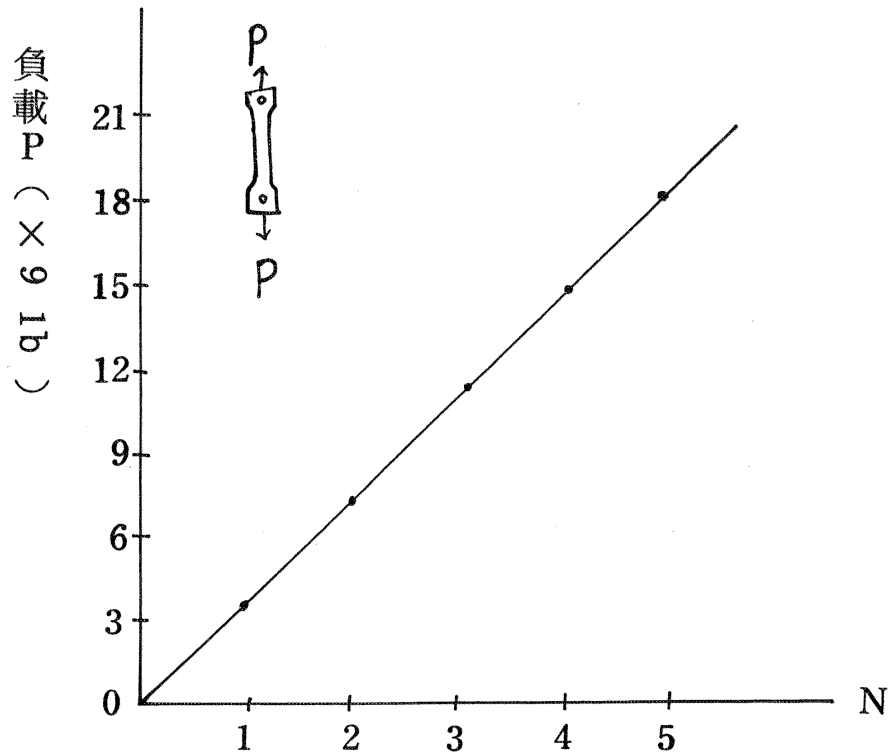
七、實驗記錄：(略)

八、數據整理

由 P/N 求出 $f\sigma$ ，再由 $f\sigma$ 求出 σ_1 、 σ_2 及 T_{max} 。

N	P (lb)	P / N
1	4 × 9	36.0
1.5	5 × 9	30.0
2.0	7 × 9	31.5
2.5	9 × 9	32.4
3.0	11 × 9	33.0
3.5	13 × 9	33.4
4.0	15 × 9	33.7
4.5	17 × 9	34.0
5.0	19 × 9	34.2

P/N 平均值 = 33.1 lb



結論： $P \propto N$ 上下兩端受力愈大，見其條紋數增加， N 值恰與所受外力成正比。

厚度 $h = 0.60 \text{ cm}$ 寬度 $w = 1.30$ 截面積 $A = 0.78 \text{ cm}^2$

$$\sigma_1 = \frac{P}{wh} = \frac{P}{A} \quad \sigma_2 = 0$$

$$\frac{P}{wh} = \frac{N \cdot f\sigma}{h} \quad f\sigma = \frac{P}{w \cdot N} = \frac{33.1}{1.30} = 25.46 \text{ lb/cm}$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = N \times \frac{f\sigma}{h} = N \times \frac{25.46}{0.60} = N \times 42.43 \left(\frac{\text{lb}}{\text{cm}^2} \right)$$

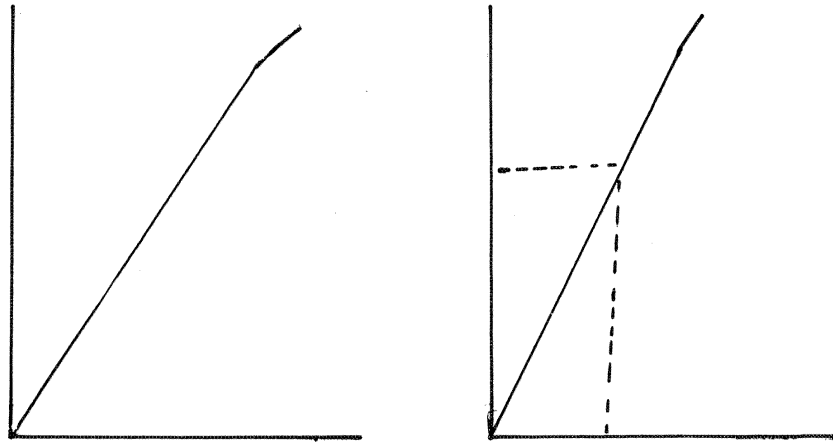
N	$\sigma_1 - \sigma_2$ (lb / cm ²)	$T_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$
1	42.43	21.21
2	84.86	42.43
3	127.29	63.65
4	169.72	84.86
5	212.15	106.08
6	254.58	127.29
7	297.01	148.51
8	339.44	169.72
9	381.87	190.935
10	424.30	212.15
11	466.73	233.37
12	509.16	254.58
13	551.59	275.80
14	594.02	297.01

代入

$$T_{xy} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\theta_1$$

可求得最大剪力破壞 (shear stress)

θ_1 是 x 軸與應力 σ_1 間的夾角



- 在彈性限度內
- 1 應力差與 N 值成正比
 - 2 應變與應力成正比
- 即 3. 伸長量與外力成正比

九、分析與結論

(一) 立於分析板後，所觀看或攝得之光波發之強度

$$I = K \sin^2 2\alpha \cos^2 \omega t \cdot \sin^2 \frac{\Delta}{2}, \text{ 影響亮度之因子有三:}$$

$$1. \cos^2 \omega t \quad 2. \sin^2 2\alpha \quad 3. \sin^2 \frac{\Delta}{2}$$

1. 中 ω 值過大，故無法觀測出對亮度之影響。
2. 則從分析板穿透過之光強度，若其角度相差 90° ，可從所附相片對照看出相片完全一樣，因

$$\sin^2 2\alpha = \sin^2 2(\alpha + 90^\circ),$$
 其發光強度和 = 定值 = I_0 。如此將得之相片 $A \perp P$ 上面有暗線條紋，若 $A \parallel P$ 上面有亮線條紋得為等俯角條紋，若旋轉分析板，條紋會改變上面的彩色條紋為等應力差條紋。

(二) 加波板產生圓形偏極光可使等俯角條紋消失。

(三) 等俯角條紋 (ISOCLINIC PATTERN) 與 1. 波長 (任何單色光或白光)。2. 相差 Δ (後面以 α 表示) 有關。3. $\sigma_1 - \sigma_2$ (應力差)。4. $c = a - b$ 光壓係數。

當分析板垂直偏極板 (crossed polaroids) 同步旋轉分析板及偏極板改變等俯角條紋進而可繪出等應力線條紋。

4. 等應力差條紋 (Isochromatics) 與波長有關，合成波

$$A = -a \sin 2\alpha \cdot \cos \omega t \cdot \sin \frac{\Delta}{2}$$

即 $\sin^2 \frac{\Delta}{2} = 0$ (相當差隔整數波長 → DARK)

$$\Delta = 2n\pi = N \cdot 2\pi = \frac{h}{f\sigma} (\sigma_1 - \sigma_2)$$

$$n = 0, 1, 2, 3 \dots \dots \text{any integer}$$

$$N = \frac{\Delta}{2\pi} \text{ 相對遲滯}$$

$f\sigma$ = 材料應力條紋常數

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N \cdot f\sigma}{h}$$

$$n = 1 \quad \text{the first order fringe}$$

當白光 $\xrightarrow{\text{偏光}}$ 雙折射物體 $\xrightarrow{\text{拍照}}$ DARK (所有波長的相差 $\Delta = n$ 整數倍)
 → Colour (大部分波長被吸收，少部分波長由於遲滯產生相差 → 某一彩色。

不同相差產生不同 colour

較大的相差，會使兩波以致於更多的光波同時消失。由彩色條紋可找出等應力差之大小次序來。

BLACK $\Delta = 0$ all wavelengths are extinguished

(四) 使用白色之光彈效果來探討彩色條紋之顏色

使用單色光源之光強 $I = I_1 \sin^2 \frac{\Delta}{2}$

Δ 是暫態雙折射物質所產生之相差，而由於波抵消以致相差遲

滯 $\Delta = N 2\pi \text{ radians}$

$R_t = N \lambda \quad (m = \text{integer})$

$R_t = C t (\sigma_1 - \sigma_2)$

c 與 λ 有關

$N \lambda = (\sigma_1 - \sigma_2) c t$

$\frac{c t}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) = N = 1, 2, 3, \text{ etc. any integer.}$

($\sigma_1 - \sigma_2$) 可由 0 → 大值，C 為波長入之函數不會同時將光抵消掉，但會依次抵消某些入之光波。有時發現幾個波長同時抵消（因一顏色之波長為他顏色波長的整數倍時）。

由於白光中，顏色互補關係，所以當 ($\sigma_1 - \sigma_2$) 應力差一樣

時顏色就一樣 $\frac{C t}{N} (\sigma_1 - \sigma_2) = \lambda$

一定

	抵消掉		某一波長之光
$\sigma_1 - \sigma_2$ N = 1	藍	→	黃
	青	→	紅 (deep red)
	黃	→	藍 (deep blue)
$2 (\sigma_1 - \sigma_2)$ N = 2	洋紅	→	綠 1st
	藍	→	黃
		→	紅
		→	藍
$3 (\sigma_1 - \sigma_2)$ N = 3		→	綠 2st
		→	黃

$$\lambda \text{ of violet} \cong \frac{\lambda}{2} \text{ of deep red}$$

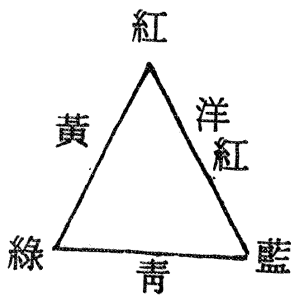
2 紫 = 1 深紅 \Rightarrow 深粉紅色

2 紅 = 3 靛 \Rightarrow 綠

較高 n 值顏色越來越淡由於互補顏色之重疊

$n = 5、6$ 黃 washout (冲淡 \rightarrow 無了)

$n \rightarrow$ 越高 (顏色合併 \rightarrow 白光)



紅—綠—藍光的三原色

青—鮮紅—黃光的三補色

紅與青相對地增減

藍與黃相對地增減

綠與洋紅相對地增減

紅由黃、洋紅組成

(五)以上本組所作皆為二度空間之光測彈性實驗，須將暫態雙折射物質黏附待測未受力之物體（金屬）表面上，三度空間之應用，用於航空工程最多，因物體受力可直接由顏色變化看出。

但在實際應用上，誤差仍很大，原因包括：

1. 雙折射物質並非物質本身。
2. 雙折射物質是否與待測物體緊密附合。
3. 由 ISOCLINICS \Rightarrow ISOSTATIC 較麻煩。
4. 雙折射物質材料由外國進口很貴。
5. 測應力大小有三：
 - ① BRITTL — COATING Method (圖)
 - ② STRAIN — GAGE (圖) 所示。
 - ③ PHOTOELASTIC
 - ④ Computer
6. 測應力可由 Computer 先測量，再黏貼 Strain — Gage 於各受力點（欲測點）由電阻改變導致電壓來測出。較便宜且

方便(小的 Stain - gage 電阻式 50 元一個)。

7. 薄膜裂紋(Brittle Coating)，光彈測力皆可補充應變計(Strain - Gage) 測量方法可看到物體整個表面受力情況。

評語：對偏光問題能深入了解，且在利用偏光技術上有相當的心得。