平面與空間的轉變

國中組數學科第三名

台北市龍山國民中學　　作　者：王 佳 盈
指導教師：廖 銘 松

一、研究動機

平日我們研究幾何，大都限於平面上，而我們日常所接觸的，却與立體有密切關係，因此著手研究平面與空間之關係；比如一個三角形，在平面上存有多樣性質，而一個三角體，在空間上是否亦存有某些特性呢？又平面幾何上有許多的定理，在空間上，是否存有呢？

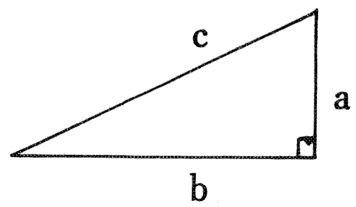
二、研究目的

在平面上，最基本，最有規則的形狀，要算是三角形了，因此將其推展到立體，最基本的形體應是三角體，因此本篇專研三角體，是否能存有某些性質，而在日常生活中或在空間幾何上加以應用。

三、研究過程及方法

㈠有關畢氏定理的推廣：

1. 在平面上，一直角三角形，存有一定理（畢氏定理）即兩股平方和等於斜邊平方。 $a^2+b^2=c^2$



2. 曾在書上看過如下之圖：
圖中平面 ABC 方程式為：

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Rightarrow bcx+acy+abz=abc$$

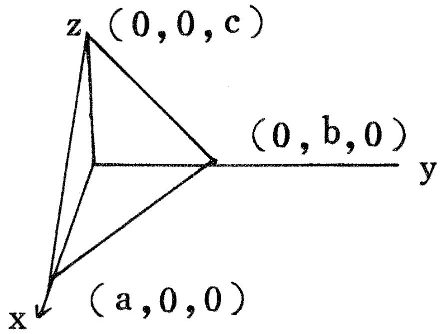
則O到平面ABC 之距離為：

$$\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$$

如此則得△ABC 面積為：

$$\frac{abc}{6}\div\left(\frac{1}{3}\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

又既然能導出斜面之面積，且近直角之面皆為可求，是否能導出一如畢氏定理之有力定理呢？



(圖一)

3. 由上圖可知：$\triangle AOC=\frac{1}{2}ac$，$\triangle AOB=\frac{1}{2}ab$

$\triangle BOC=\frac{1}{2}bc$ 而△ABC 三邊長為 $\sqrt{a^2+b^2}$，$\sqrt{b^2+c^2}$

$\sqrt{c^2+a^2}$，故其面積為 $D=\sqrt{S(s-a_1)(s-b_1)(s-c_1)}$

$S=(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2})/2$

$a_1=\sqrt{a^2+b^2}$，$b_1=\sqrt{b^2+c^2}$，$c_1=\sqrt{c^2+a^2}$

經化簡得：$D=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$ $\therefore$

$$D^2=\frac{1}{4}a^2b^2+\frac{1}{4}b^2c^2+\frac{1}{4}c^2a^2$$

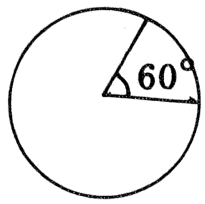
$$=(\triangle AOB)^2+(\triangle BOC)^2+(\triangle COA)^2$$

即：在直角三角體中，斜面平方等於，另外三面平方和

$\Rightarrow A^2+B^2+C^2=D^2$

㈡角的探討：

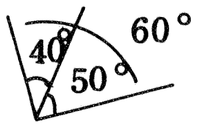
1. 平常，我們令一圓的度數爲 360°，則任一角均可由此圓圓弧大小表示：如60°可以⅙圓弧表示。



2. 假設在空間上，我們用同樣的方法，即用球的表面面積來決定角度大小，則因球面分割不一，無法使同一角度爲唯一形狀。

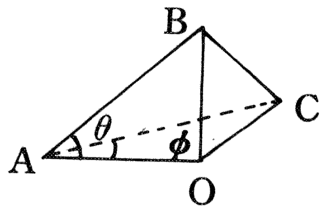
3. 故我們先暫以平面角度用三維方法表示空間角，則吾人可導出下列事實：

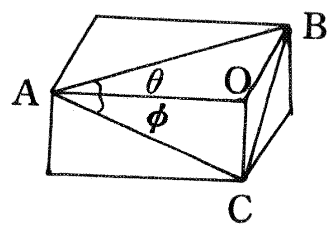
令



此角記爲（40°，50°，60°）

則在直角三角體中，若知一稜角二角度，可求第三角角度：如圖：





令一角爲 θ；一角爲 ϕ，設第三角爲 γ，夾邊爲 1 單位，則 $\overline{AB}=\sec\theta$，$\overline{AC}=\sec\phi$，$\overline{OB}=\tan\theta$，$\overline{OC}=\tan\phi$，則在△ABC 中：

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos\gamma=\overline{BC}^2$，即

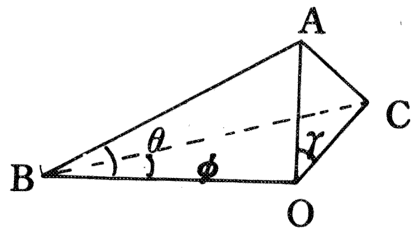
$\sec^2\theta+\sec^2\phi-2\sec\theta\sec\phi\cos\gamma=\overline{BC}^2=\overline{OB}^2+\overline{OC}^2$

$= \tan^2\theta + \tan^2\phi$ ， ∴

$\sec^2\theta - \tan^2\theta + \sec^2\phi - \tan^2\phi = 2\sec\theta\sec\phi\cos\gamma$

$2 = 2\sec\theta\sec\phi\cos\gamma$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sec\theta\sec\phi} = \cos\theta\cos\phi$$



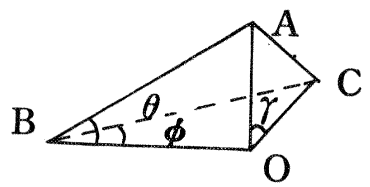
角的更進一步：

由(1)中可知：在直角三角體中，

若$\angle ABO = \theta$，$\angle CBO = \phi$，則$\angle ABC = \cos^{-1}(\cos\theta\cos\phi)$

此時$\angle AOC = 90°$，但假設我們將$\angle AOC$ 作改變時

$\angle ABC$ 又有何變化呢？



令$\overline{OB} = 1$，則$\overline{AB} = \sec\theta$，$\overline{BC} = \sec\phi$，$\overline{AO} = \tan\theta$，

$\overline{CO} = \tan\phi$ 令$\angle ABC = \angle B$

則 $\sec^2\theta + \sec^2\phi - 2\sec\theta\sec\phi\cos B = \overline{AC}^2$

$= \tan^2\theta + \tan^2\phi - 2\tan\theta\tan\phi\cos\gamma$ 移項得：

$2 - 2\sec\theta\sec\phi\cos B = -2\tan\theta\tan\phi\cos\gamma$ ∴

$\cos B = (1 + \tan\theta\tan\phi\cos\gamma) / (\sec\theta\sec\phi)$

$= (1 + \tan\theta\tan\phi\cos\gamma)(\cos\theta\cos\phi)$

$= \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi\cos\gamma \Rightarrow$

$\cos B = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi\cos\gamma$

當$\gamma = 90°$時 $\cos B = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi \cdot (0)$

$= \cos\theta\cos\phi$

當 $\gamma = 180°$ 時 $\cos B = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi(-1)$

$$= \cos(\theta+\phi)$$

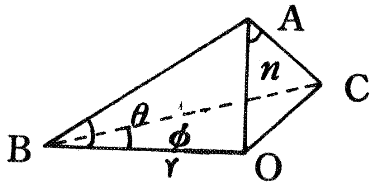
當 $\gamma = 0°$ 時 $\cos B = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi(1)$

$$= \cos(\theta-\phi)$$

由特別角度的驗算，則可知此公式之準確性。

㈢三角體的面積與體積：

假設有如圖所示一直角三角體



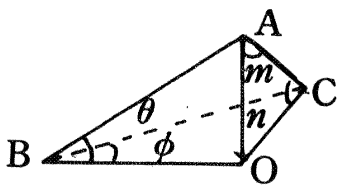
1. 面積比：則△ABO：△BCO：△CAO

$$= \frac{\gamma^2}{2}\tan\theta : \frac{\gamma^2}{2}\tan\phi : \frac{\gamma^2}{2}\tan\theta\tan\phi$$

$$= \tan\theta : \tan\phi : \tan\theta\tan\phi$$

也可變形爲 $1 : \dfrac{\tan\phi}{\tan\theta} : \tan\phi = 1 : \dfrac{\frac{\overline{CO}}{\overline{BO}}}{\frac{\overline{AO}}{\overline{BO}}} : \tan\phi$

$= 1 : \tan m : \tan\phi$ (或 $\tan m : 1 : \tan\theta$)



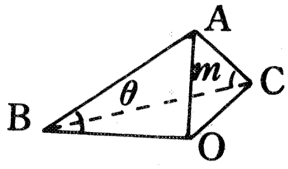
甚至可將其變形爲 $\dfrac{\overline{AO}}{\overline{BO}} : \dfrac{\overline{CO}}{\overline{BO}} : \dfrac{\overline{AO}\cdot\overline{CO}}{\overline{BO}^2} =$

$$\overline{AO}\cdot\overline{BO} : \overline{CO}\cdot\overline{BO} : \overline{AO}\cdot\overline{CO} = \frac{1}{\overline{CO}} : \frac{1}{\overline{AO}} : \frac{1}{\overline{BO}}$$

故知一直角三角體若知非斜面之另三面中，任二面之一角（非直角），即可求出此三面面積比

〔但若知道斜面一角及任另一面之一角（非直角），則亦

可求出三面比：



令$\angle ACO=\phi$ 則$\angle BCO=\cos^{-1}\left(\frac{\cos m}{\cos\phi}\right)$

令$\overline{CO}$爲1單位，則$\overline{AO}=\tan\phi$，$\overline{BO}=\tan\gamma$

〔$\gamma=\cos^{-1}\left(\frac{\cos m}{\cos\phi}\right)$〕 $\therefore \tan\theta=\frac{\overline{AO}}{\overline{BO}}=\frac{\tan\phi}{\tan\cos^{-1}\left(\frac{\cos m}{\cos\phi}\right)}$

必然可求ϕ〕

2. 體積及斜面面積：

由①$\triangle ABO:\triangle BCO:\triangle ACO=$

$\tan\theta:\tan\phi:\tan\theta\tan\phi$，若將

$\triangle ABC$ 及三角體體積加入，求度量比：則得

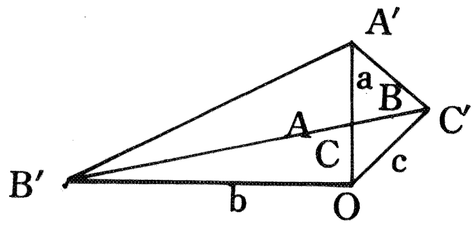
$\triangle ABO:\triangle BCO:\triangle CAO:\triangle ABC:$ 三角體ABC

$=\frac{\gamma^2}{2}\tan\theta:\frac{{}^2\gamma^2}{2}\tan\phi:\frac{\gamma^2}{2}\tan\theta\tan\phi:$

$\frac{\gamma^2}{2}\sqrt{\tan^2\theta+\tan^2\phi+\tan^2\theta\tan^2\phi}:\frac{1}{6}\gamma^3\tan\theta\tan\phi$

$=3\tan\theta:3\tan\phi:3\tan\theta:\tan\phi:3\sqrt{\tan^2\theta+\tan^2\phi+\tan^2\theta\tan^2\phi}$

3. 體積及面積：



由如圖三角體知：

三角體$=\frac{1}{6}abc=\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{abc}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{\sqrt{a^2b^2c^2}}{8}$

$=\frac{2}{3}\sqrt{ABC}$ ，又 $A^2+B^2+C^2=D^2$ 故任知三面可速求體積。

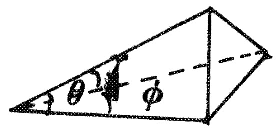
四、結　論

㈠一直角三角體必滿足：

（斜面）^{2} ＝近直角三面平方和　$D^2=A^2+B^2+C^2$

㈡若一直角三角體（如圖）已知一角

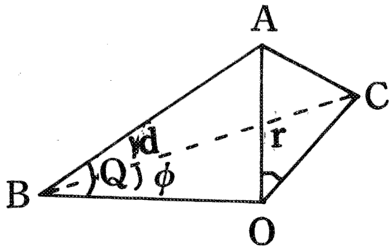
θ 及一角 ϕ，則可求出任一角度，其中 $\cos\gamma=\cos\theta\cos\phi$



㈢若一三角體（如圖）已知 $\angle AOC=\gamma$

$\angle AOB=\angle COB=90°$　且 θ，ϕ 爲已知，則

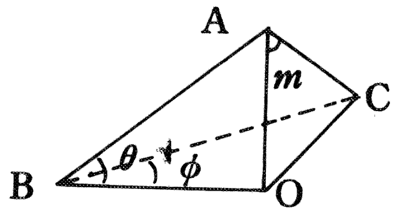
$\cos d=\cos\theta\cos\phi+\sin\theta\sin\phi\cos\gamma$　其中結論⑵爲一特例。



㈣如圖直角三角體：$\triangle ABO:\triangle BCO:\triangle ACO$

$=\tan\theta:\tan\phi:\tan\theta\tan\phi=1:\tan m:\tan\phi$

$=\cot m:1:\tan\theta=\frac{1}{\overline{OC}}:\frac{1}{\overline{OA}}:\frac{1}{\overline{OB}}$



若只求度量比：則 $\triangle ABO:\triangle BCO:\triangle ACO:\triangle ABC$

：三角體 $ABCO=3\tan\theta:3\tan\phi$

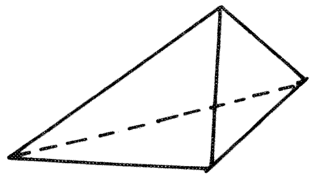
$:\ 3\tan\theta\tan\phi : 3\sqrt{\tan^2\theta+\tan^2\phi+\tan^2\theta\tan^2\phi}$

$:\ \gamma\tan\theta\tan\phi$

㈤如圖直角三角體中，若斜面D及另三面A，B，C 則體積

$=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{ABC}$ 配合結論(1)若知A，B，C，D 任三面，即可速

求體積。



五、應　用

㈠已知一直角三角體中有三面面積爲 $4\,cm^2$，$4\,cm^2$，$5\,cm^2$ 求第四面面積？

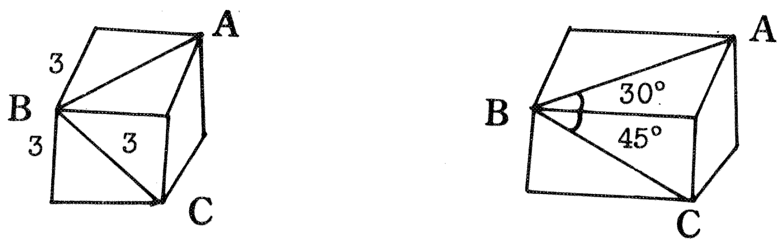
sol：令第四面爲斜面，則面積爲 $\sqrt{4^2+4^2+5^2}=\sqrt{57}\ cm^2$

令第四面非爲斜面，則 $5\,cm^2$ 之面爲斜面，故第四面爲

$\sqrt{5^2-4^2-4^2}=\sqrt{7}\,i$　（不合）

$\therefore$第四面爲斜面，面積爲 $\sqrt{57}\ cm^2$

㈡如下圖，求∠ABC



sol：①由公式 $\cos\gamma=\cos\theta\cos\phi$　$\therefore$

$\cos B=\cos45°\ \cos45°=\frac{1}{2}$ $\therefore\angle ABC=60°$

又本題爲特別題目，若連AC 則△ABC 爲正△$\therefore$

$\angle ABC=60°$　可知公式無誤。

②由 $\cos\gamma=\cos\theta\cos\phi$

$$\cos B=\cos 30^\circ \ \cos 45^\circ =\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\fallingdotseq \frac{2.44g}{4}= 0.61225$$

由查表知$\angle B\fallingdotseq 52^\circ$

$\therefore \angle ABC = 52^\circ$

評語：對於空間的幾何型體的面積鑒體積作了探討鑒推廣；關於畢氏定理的推廣雖然是已知的結果，但國中學生能作此觀察並作完整的證明實屬甚爲可貴。