揭開皮賽里爾聯節器之謎

國中組數學科第二名

台北市永春國民中學

作　　者：簡榮亮、楊希聰

指導教師：王文亮、郭錦江

一、研究動機

一年級時，在圖書館借閱了一本科學叢書，其中介紹了“皮賽里爾聯節器”。當時感到好奇詫異，不知所以然地感到萬分困惑。而且此書只介紹其現象及形狀，並沒有講解原理。現在已經學了些粗淺的幾何學及代數學，又在一次偶然機會中重新看到此書，因此激發了我們揭開它謎底的決心。

二、研究目的

以科學的方法去了解皮賽里爾聯節器的構造原理及其應用。並嘗試用數學的方法證明此聯節器現象的存在。

三、研究器材設備

(一)圓規、直尺、三角板、不同顏色的筆、計算用紙。⇒作圖及記錄研究時用。

(二)堅實且狹薄之材料⇒製作聯節器之原料。

(三)平滑且乾淨之地面（或黑板）⇒實驗之場地。

四、研究過程及方法

(一)發現問題。

(二)查閱參考書籍並自製初步的皮賽里爾聯節器之模型。

(三)初步討論其運作原理，並配合實際操作，思考及相互交換心得。

(四)利用操作、思考時所得假想結論及此聯節器之條件，用幾何作

圖法，作出其運作圖及所經路線軌跡。看是否眞的是直線。

㈤嘗試用數學證明方法，證明皮賽里爾聯節器眞能將圓周運動轉換爲直線運動。

㈥整理歸納。

㈦找尋此聯節器是否有其他有趣變化。

五、實驗部分

㈠按圖一規定之條件及方法來操作，觀察Q點是否描出一直線？

答：用肉眼觀察爲一直線，但不能確定之。

1. $\overline{CR}=\overline{PR}$ $\overline{CS}=\overline{OA}$
   $\overline{PA}=\overline{AQ}=\overline{QS}=\overline{SP}$
2. 固定O,R二點以R爲圓心。
   $\overline{PR}$ 爲半徑畫弧。
   則Q點描出一直線。

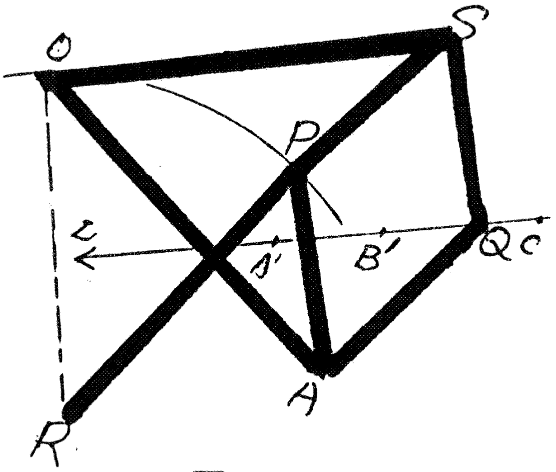
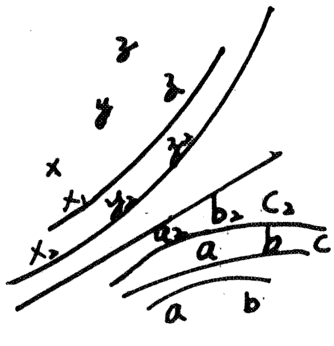


圖 一

㈡以下幾小項實驗，條件皆以圖一爲準（因$\overline{OR}$、$\overline{PR}$ 爲改變之變因，故不在此限）。

圖 二



1. 若$\overline{OR}=\overline{PR}$，則Q所描出之圖形爲何？

答：用肉眼觀察爲一直線，但不能確定之，如圖二之L。

2. 若$\overline{OR}<\overline{PR}$，則Q所描出之圖形爲何？

答：用肉眼觀察爲一弧線，如圖二之 $\widehat{xyz}$ 。

3. 若 $\overline{OR}>\overline{PR}$ ，則Q所描出之圖形爲何？

答：用肉眼觀察爲一弧線，如圖二之 $\widehat{abc}$ 。

4. 若改變 $\overline{PR}$ 或 $\overline{OS}$（$\overline{OA}$）或 $\overline{SQ}$（$\overline{AQ}$、$\overline{PA}$、$\overline{PS}$）之長度，但仍舊符合 $\overline{OR}=\overline{PR}$，$\overline{OS}=\overline{OA}$，$\overline{PA}=\overline{AQ}=\overline{QS}=\overline{SP}$ 之條件，則用肉眼觀之，Q還是描出一直線嗎？

答：還是一直線。

㈢ 1. 由實驗㈠、㈡，並配合圖二，可知 $\overline{OR}$，$\overline{PR}$ 之長短關係與所繪圖形的彎曲方向有某種關係，即若 $\overline{OR}<\overline{PR}$ 之圖形在L之一側，則 $\overline{OR}>\overline{PR}$ 之圖在L之另一側。

2. 觀察圖二知道愈靠近L之曲線，愈近似於直線，而L恰位於中間，因此推論L是一直線。

六、作圖部分

㈠作圖目的：

1. 用圓規及直尺，依照皮賽里爾聯節器運作原理來作圖，觀察圖一中的Q點，是否能描出一直線？

2. 熟悉其原理，以作爲將來證明時的重要依據。

1. $\overline{CR}=\overline{PR}$　$\overline{OS}=\overline{OA}$

$\overline{PA}=\overline{AQ}=\overline{CQ}=\overline{SP}$

2. 固定Q,R二點以R爲圓心，$\overline{PR}$ 爲半徑畫弧，Q點描出一直線。

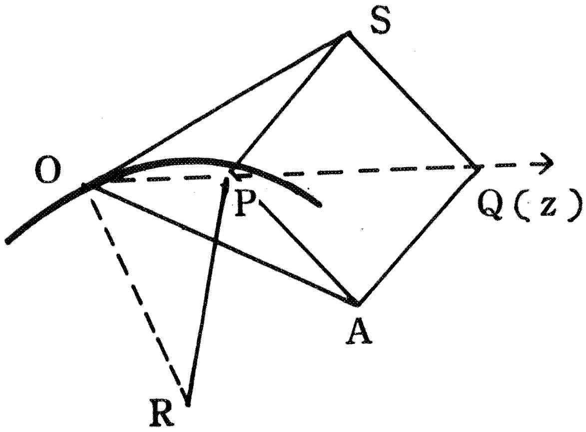


圖　三

㈡作圖的原理：

1. 如圖三與圖一同。粗線部分是一個聯節器。因爲已知 $\overline{OR}=\overline{PR}$ ，且P點是以R爲圓心作運動，所以我們想到，能過P、O二點以R爲圓心，$\overline{PR}$（$\overline{OR}$）爲半徑，作一個圓R。

2. 因為$\overline{SO}=\overline{OA}$（已知），所以想到，能以O為圓心，$\overline{OS}$（$\overline{OA}$）為半徑，作一圓O，以代表S,A二點的所經路線。

3. 因為S,A二點永遠在圓O上，又P點永遠在圓R上，但P點不管位置如何，P,S或（P,A）二點的距離永遠不會改變，因此，不管P點位置如何（在圓R上的位置）註1只要知道其所在位置，我們就能以P為圓心，$\overline{PS}$（$\overline{PA}$）為半徑，畫弧，設交圓O於x,y二點，x,y二點的所在位置，就是S,A二點的位置。

4. 另外，我們又發現Q點（即畫線的點）永遠在$\overrightarrow{OP}$上，但又因為皮賽里爾聯節器中，必須$\overline{PA}=\overline{AQ}=\overline{SQ}=\overline{SP}$，因此，我們又可以以A（或S）為圓心，$\overline{AQ}$或（$\overline{SQ}$）為半徑，畫弧，設交$\overrightarrow{OP}$於z點上（但z,P不重合）則z點即為Q點。

5. 由以上方法，就能找出Q點的所在位置了。

㈢作圖方法：

1. 以R為圓心，$\overline{PR}$為半徑畫一圓R。
2. 在圓R上取一點O，以O為圓心，$\overline{OA}$為半徑畫一圓O。
3. 在圓R上取一點P_1，連接P_1R，再以P_1為圓心，以$\overline{PA}$（$\overline{PS}$）為半徑，交圓O於S_1，A_1二點。連接$\overline{OS_1}$，$\overline{OA_1}$，$\overline{P_1S_1}$，$\overline{P_1A_1}$。
4. 以A_1（S_1）為圓心，$\overline{AQ}$（$\overline{SQ}$）為半徑畫弧交$\overrightarrow{OP_1}$於Q_1，連接$\overline{S_1Q_1}$，$\overline{A_1Q_1}$。
5. 依前述之作法，重覆作兩次，與前圖相仿之圖形，即得圖四。

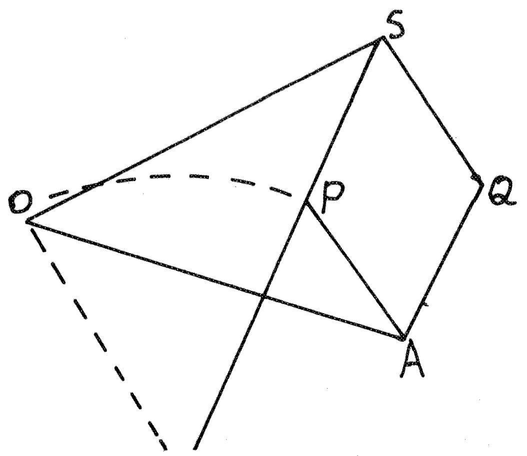


圖　四

(四)作$\overleftrightarrow{Q_1Q_3}$，發現$\overleftrightarrow{Q_1Q_3}$ 通過Q_2，故Q_1，Q_2，Q_3 共線。若聯節器動路線爲弧線，必不會Q_1 ，Q_2 ，Q_3 共線，只有其運動軌跡爲直線時，任取其軌跡上的三點才會共線。故推論其軌跡爲直線。

七、證明部分

（已知）如圖五設① $\overline{RA}=\overline{RS}$

② $\overline{PS}=\overline{SQ}=\overline{QA}=\overline{AP}$

③ $\overline{RO}=\overline{PO}$

④這是皮賽里爾聯節器。

⑤ $\overline{RA}>\overline{PS}$

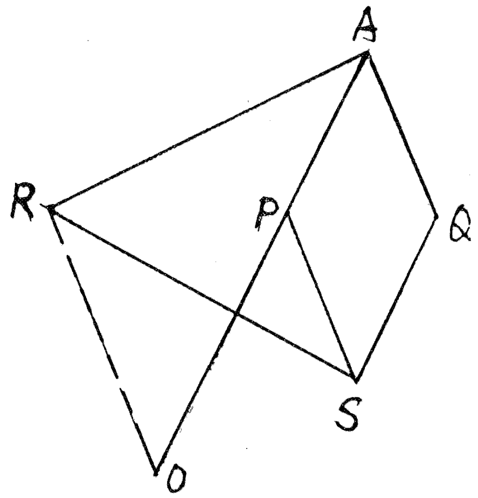
（求證）當P點以R爲圓心，作圓周運動時，Q點運動之軌跡爲一直線。

（證明）1. 設皮賽里爾聯節器中

(1) $\overline{RA}=\overline{RS}=6$

(2) $\overline{PS}=\overline{SQ}=\overline{QA}=\overline{AP}=3$

(3) $\overline{RO}=\overline{OP}=5$



2. 作一直角坐標系統，將此皮賽里爾聯節器畫於此坐標系統上。〔將聯節器之O點定於坐標系之O點（原點）上，R點定於（O ，5 ）之點上（∵ $\overline{RO}=5$），再用前述作圖部分之作圖法，畫同一聯節器之四種狀態

（即在圓O之圓周上，取相異四點因而同一皮賽里爾聯節器有四種不同形態，即Q點所在位置會有所不同）於此坐標系統上〕。所得之圖形如圖六。

3. 將圖六之圖形分解成圖七、圖八、圖九、圖十（爲求清楚起見）。

4. 在圖七中，∵ P，Q二點重合。∴ S_1，P_1，A_1（或S_1，Q_1，A_1）成一直線，又已知$\overline{R_1S_1}=\overline{RA_1}$，故$S_1R_1A_1$ 爲等腰△。

∴ $\overline{R_1P_1}$（$\overline{RQ_1}$）$\perp S_1A_1$，$\angle RP_1A_1=90°$。

5. ∵ $\angle R_1P_1A_1=90°$（已證）

∴ $\overline{R_1P_1}^2=\overline{R_1A_1}^2-\overline{P_1A_1}^2$（畢氏定理）

又已設$\overline{P_1A_1}=3$，$\overline{R_1A_1}=6$

故$\overline{R_1P_1}^2=36-9=27$

$\overline{R_1P_1}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

6. ∵ P點之坐標爲圓O之方程式及以R爲圓心，$\overline{R_1P_1}$爲圓半徑之圓R_1 方程式的聯立解

又圓O之方程式爲$x^2+y^2=r^2$ 〔∵O（0，0）〕

（x，y表圓O上點的坐標）

又圓R_1之方程式爲$x^2+(y-5)^2=\overline{R_1P_1}^2$

〔∵R（0，5）〕

（x，y表圓R_1 上，點的坐標）

∴ $\begin{cases} x^2+y^2=(5)^2 & 〔∵已設\ r=5〕 \\ x^2+(y-5)^2=(\sqrt{27})^2 & 〔∵已證\overline{R_1P_1}=\sqrt{27}〕 \end{cases}$

故 $x=\dfrac{3\sqrt{2|9}}{10}$，$y=\dfrac{23}{10}$

即P_1（$\dfrac{3\sqrt{2|9}}{10}$，$\dfrac{23}{10}$），即Q_1（$\dfrac{3\sqrt{2|9}}{10}$，$\dfrac{23}{10}$）

〔∵ P，Q 重 合〕①

7. 在圖八中

$\because S_2$ ，A_2 之坐標為圖 R_2 的方程式與以 P_2 為圓心，$\overline{P_2S_2}$ 為半徑之圓 P_2 的方程式的聯立解。

又圓 R_2 的方程式為 $x^2+(y-5)^2=36$

〔$\because R(0,5)$，圓 R_2 半徑為 6〕

又圓 P_2 的方程式為 $(x-4)^2+(y-3)^2=9$

〔$\because P_2(4,3)$，圓 P_2 半徑 $=\overline{S_2P_2}=3$（已知）〕

$$\therefore \begin{cases} x^2+(y-5)^2=36 \\ (x-4)^2+(y-3)^2=9 \end{cases}$$

故 $\begin{cases} x=\dfrac{94+\sqrt{67}}{20} \\ y=\dfrac{53+2\sqrt{67}}{20} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{94-\sqrt{67}}{20} \\ y=\dfrac{53-2\sqrt{67}}{20} \end{cases}$

但 S_2 點在 A_2 點上方

故 $S_2\left(\dfrac{94+\sqrt{67}}{20}, \dfrac{53+2\sqrt{67}}{20}\right)$

$A_2\left(\dfrac{94-\sqrt{67}}{20}, \dfrac{53-2\sqrt{67}}{20}\right)$

8. $\because \overline{P_2S_2}=\overline{S_2Q_2}=\overline{Q_2A_2}=\overline{P_2A_2}$（已知）

$\therefore S_2$ ，Q_2 ，A_2 ，P_2 為菱形

9. 連接 $\overline{S_2A_2}$ ，$\overline{P_2Q_2}$ 設相交於 T_2 ，則 $\overline{P_2T_2}=\overline{T_2Q_2}$ ，$\overline{S_2T_2}=\overline{T_2A_2}$（菱形對角線互相平分），故 T_2 為 $\overline{S_2A_2}$ 之中點，且 T_2 為 $\overline{P_2Q_2}$ 之中點。

10. T_2 為 S_2A_2 之中點（已證）

又已求得 $S_2\left(\dfrac{94+\sqrt{67}}{20}, \dfrac{53+2\sqrt{67}}{20}\right)$

$A_2\left(\dfrac{94-\sqrt{67}}{20}, \dfrac{53-2\sqrt{67}}{20}\right)$

$\therefore \begin{cases} T_2 \text{ 坐標爲}(x, y) \\ x = \dfrac{\dfrac{94+\sqrt{67}}{20} + \dfrac{94-\sqrt{67}}{20}}{2} = \dfrac{47}{10} \\ y = \dfrac{\dfrac{53+2\sqrt{67}}{20} + \dfrac{53-2\sqrt{67}}{20}}{2} = \dfrac{53}{20} \end{cases}$

即 $T_2\left(\dfrac{47}{10}, \dfrac{53}{20}\right)$

11. ∵ T_2 爲 P_2Q_2 之中點（已證）

又已知 P_2 $(4, 3)$

又 $T_2\left(\dfrac{47}{10}, \dfrac{53}{20}\right)$〔已證〕

∴ Q_2 坐標爲 $\left(\dfrac{27}{5}, \dfrac{23}{10}\right)$ ②

12. 同理，在圖九中，得

$S_3\left(\dfrac{111+\sqrt{71}}{20}, \dfrac{63+3\sqrt{71}}{20}\right)$

$A_3\left(\dfrac{111-\sqrt{71}}{20}, \dfrac{63-3\sqrt{71}}{20}\right)$

故 S_3A_3 之中點 T_3 坐標爲 $\left(\dfrac{111}{20}, \dfrac{63}{20}\right)$

又 $P_3(3, 4)$

故 Q_3 坐標爲 $\left(\dfrac{81}{10}, \dfrac{23}{10}\right)$ ③

13. 在圖十中，∵ P_4 點的坐標，是圓O方程式與以 R_3 爲圓心，$(\overline{R_3A_4} - \overline{P_4A_4})$ 爲半徑之圓 R_3 方程式的聯立解

又圓O方程式爲 $x^2+y^2=r^2$ 〔∵ $O(0, 0)$〕

又圓 R_3 方程式爲 $x^2+(y-5)^2=\overline{R_3P_4}^2$

〔∵ R_3 $(0, 5)$〕

$\therefore \begin{cases} x^2+y^2=25 & 〔∵ r=5 \text{（已知）}〕 \\ x^2+(y-5)^2=9 & 〔∵ \overline{R_3P_4}=\overline{R_3A_4}-\overline{P_4A_4}〕 \end{cases}$

$$=6-3=3$$

故 $x=\dfrac{3\sqrt{91}}{10}$ ， $y=\dfrac{41}{10}$

即 $P_4\left(\dfrac{3\sqrt{91}}{10}, y=\dfrac{41}{10}\right)$

14. 又在圖十中，設 $S_4(A_4)$ 坐標爲 (x, y)

又 $\begin{cases}\overline{R_3P_4}=\overline{R_3S_4}-\overline{P_4S_4}=6-3\text{（由已知）}=3\\ \overline{P_4S_4}=3\text{（已知）}\end{cases}$

且已知 $R_3(0, 5)$，已證 $P_4\left(\dfrac{3\sqrt{91}}{10}, \dfrac{41}{10}\right)$

則 $\overline{R_3P_4}:\overline{P_4S_4}=\left(\dfrac{3\sqrt{91}}{10}-0\right):\left(x-\dfrac{3\sqrt{91}}{10}\right)$

$=\left(5-\dfrac{41}{10}\right):\left(\dfrac{41}{10}-y\right)=3:3$

故 $x=\dfrac{3\sqrt{91}}{5}$ ， $y=\dfrac{16}{5}$

則 $S_4\left(\dfrac{3\sqrt{91}}{5}, \dfrac{16}{5}\right)$

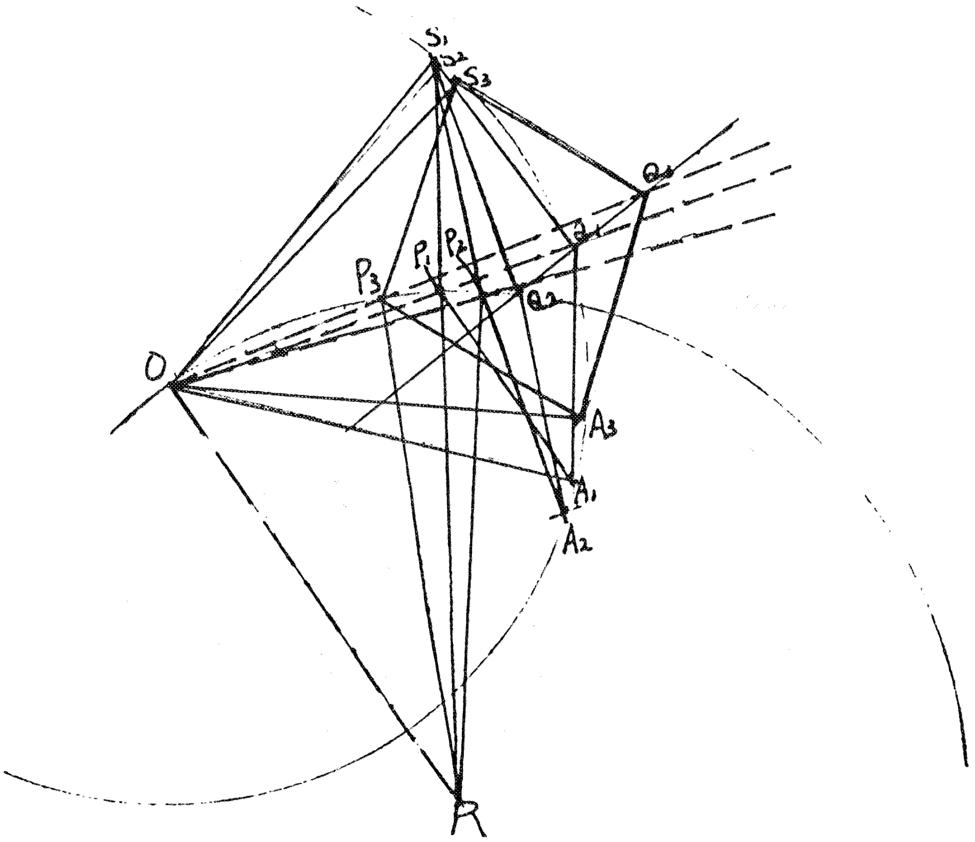


圖 五

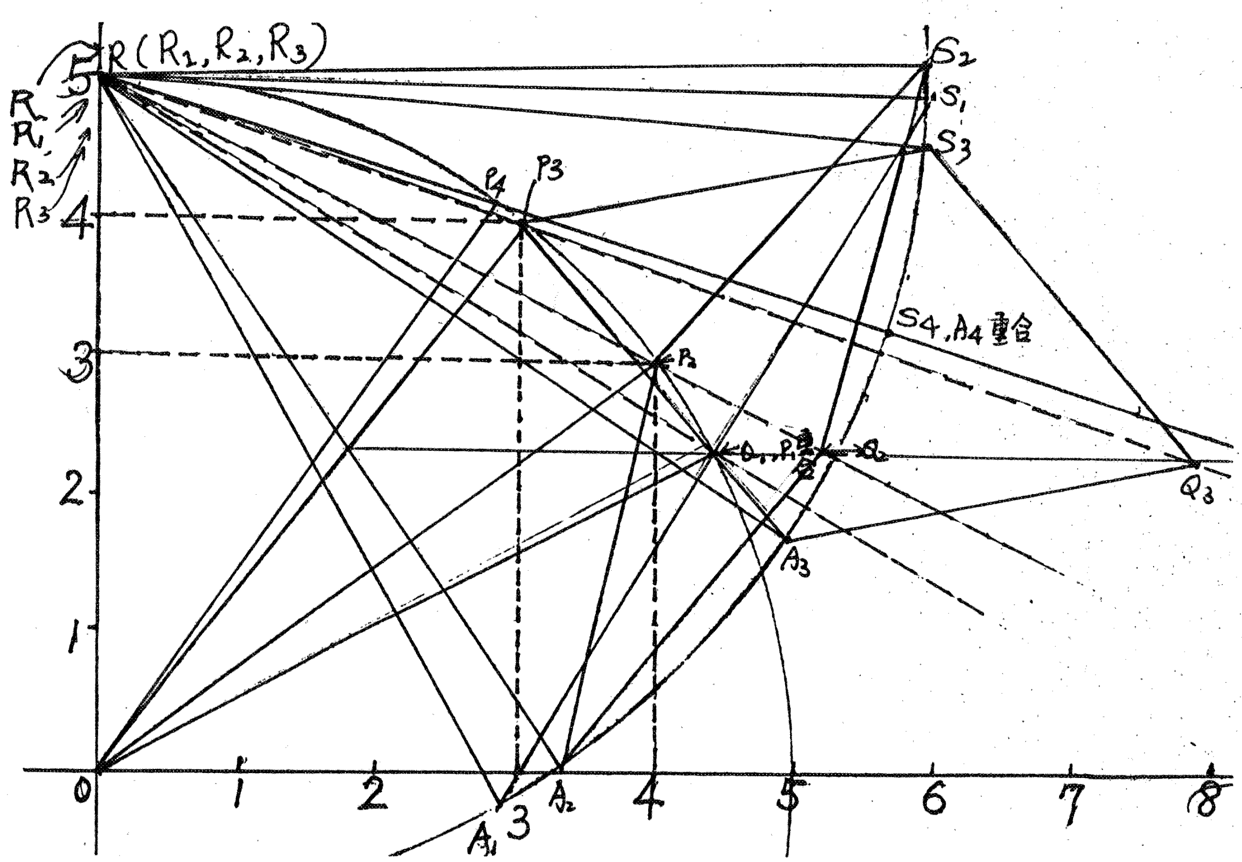

R(R1,R2,R3)
S2
S1
S3
P4
P3
S4,A4重合
P2
Q1,P1
Q2
Q3
A3
A1
A2
0
1
2
3
4
5
6
7
8

圖 六

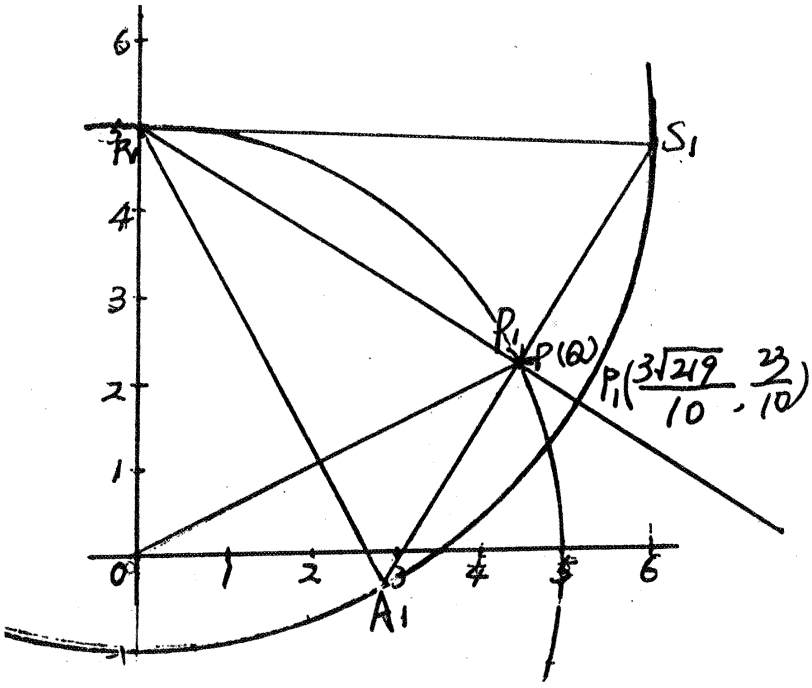
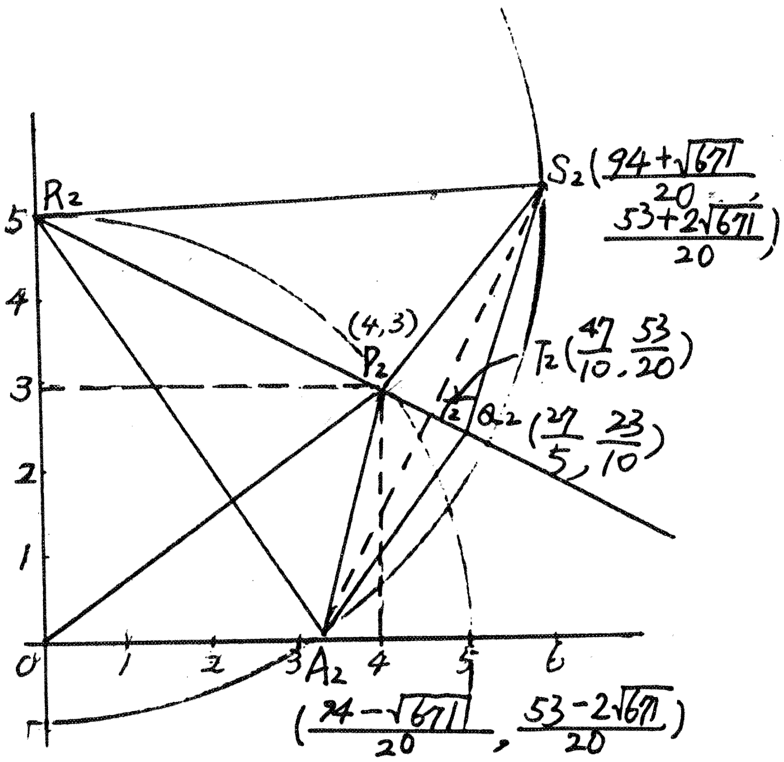
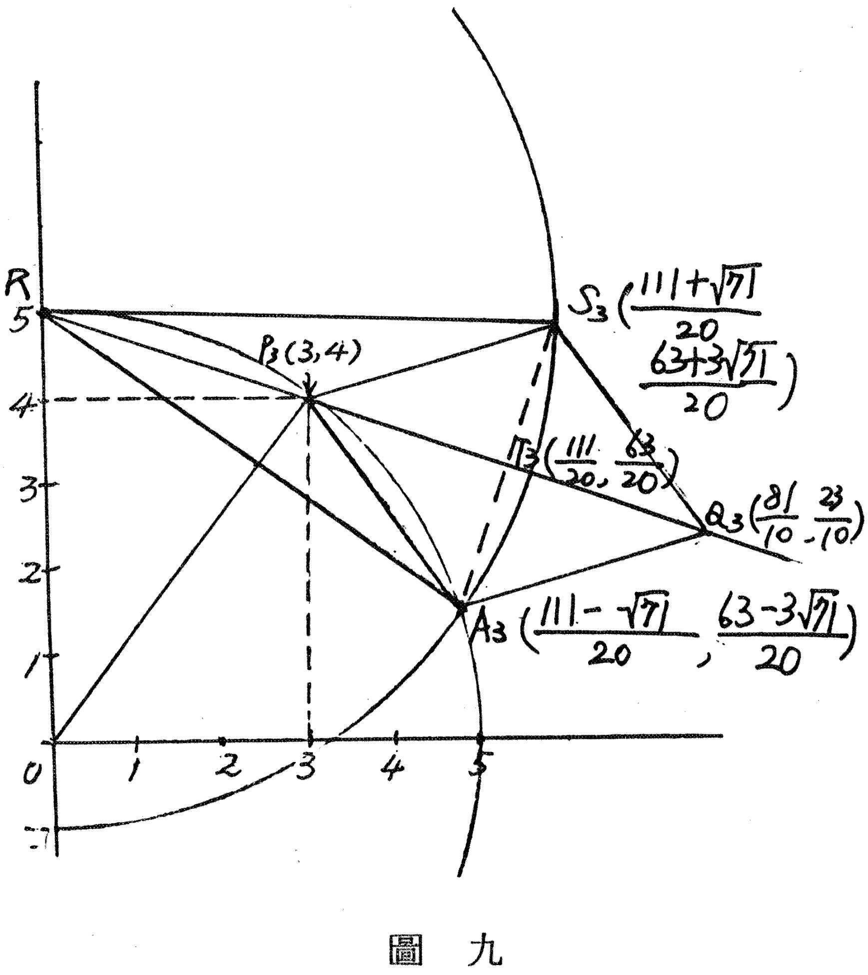

S1
R1
P1
P(Q)
A1
6
5
4
3
2
1
0

圖 七



R_2
$S_2\left(\frac{94+\sqrt{671}}{20}, \frac{53+2\sqrt{671}}{20}\right)$
(4,3)
P_2
$T_2\left(\frac{47}{10}, \frac{53}{20}\right)$
$\frac{1}{2}$
$Q_2\left(\frac{27}{5}, \frac{23}{10}\right)$
A_2
$\left(\frac{94-\sqrt{671}}{20}, \frac{53-2\sqrt{671}}{20}\right)$
0 1 2 3 4 5 6
1 2 3 4 5

圖　八



R
$S_3\left(\frac{111+\sqrt{71}}{20}, \frac{63+3\sqrt{71}}{20}\right)$
$P_3(3,4)$
$T_3\left(\frac{111}{20}, \frac{63}{20}\right)$
$Q_3\left(\frac{81}{10}, \frac{23}{10}\right)$
$A_3\left(\frac{111-\sqrt{71}}{20}, \frac{63-3\sqrt{71}}{20}\right)$
0 1 2 3 4 5
1 2 3 4 5

圖　九

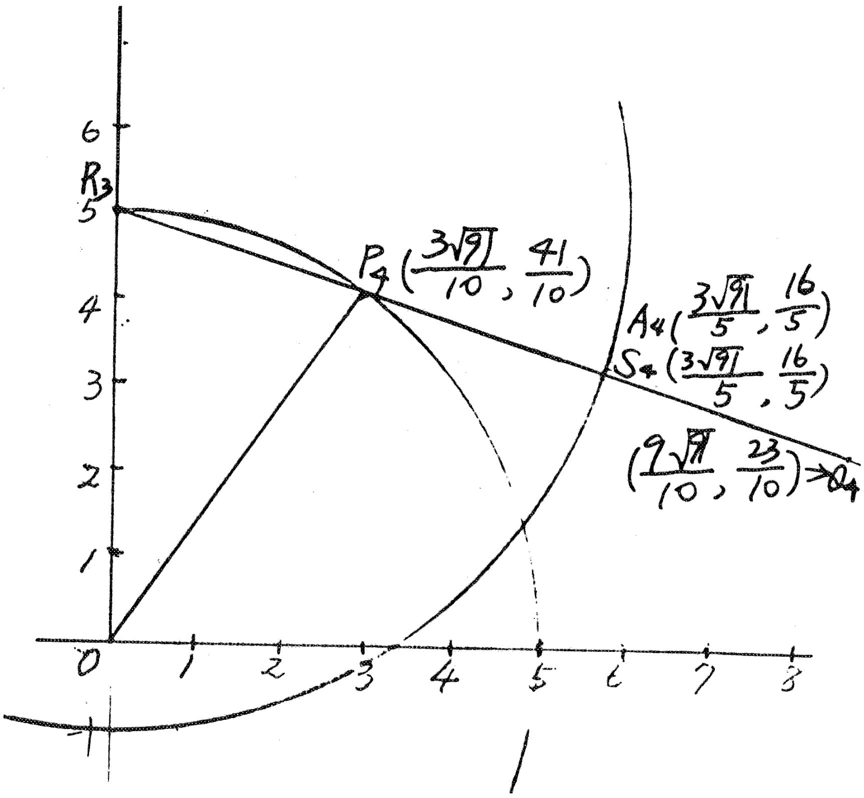


圖　十

15.∵ S_4 爲 $\overline{P_4Q_4}$ 之中點

（∵已知 $\overline{P_4S_4}=\overline{S_4Q_4}$，又此聯節器 S_4 與 A_4 重合，∵ $P_4-S_4(A_4)-Q_4$，故 S_4 爲 $\overline{P_4Q_4}$ 之中點）

又 $P_4\left(\frac{3\sqrt{91}}{10},\frac{41}{10}\right)$〔已證〕，

$S_4\left(\frac{3\sqrt{91}}{5},\frac{16}{5}\right)$〔已證〕

∴ Q_4 坐標爲 $\left(\frac{9\sqrt{91}}{10},\frac{23}{10}\right)$④

16.由①，②，③，④知 Q_1 坐標 $\left(\frac{3\sqrt{219}}{10},\frac{23}{10}\right)$

Q_2 坐標 $\left(\frac{27}{5},\frac{23}{10}\right)$

Q_3 坐標 $\left(\frac{81}{10},\frac{23}{10}\right)$

Q_4 坐標（ $\dfrac{9\sqrt{91}}{10}$ ，$\dfrac{23}{10}$ ）

故 Q_1，Q_2，Q_3，Q_4 四點皆在同一直線 $y=\dfrac{23}{10}$ 上。（∵四點的 y 坐標皆爲 $\dfrac{23}{10}$ ）但 Q_1，Q_2，Q_3，Q_4 爲皮賽里爾聯節器運動軌跡上相異回點，故知皮賽里爾聯節器Q點所繪之圖形確實爲一直線。

17.若將 1. 中的(1)(2)(3)項改成：

(1) $\overline{RA}=\overline{RS}=8$

(2) $\overline{RS}=\overline{SQ}=\overline{QA}=\overline{AP}=4$

(3) $\overline{RO}=\overline{OP}=5$

則再以前述方法（但數據不一定要一樣）

又求得 Q_5，Q_6，Q_7 三點（如圖十一）

坐標分別爲 Q_5 （ $\dfrac{4\sqrt{39}}{5}$ ，$\dfrac{1}{5}$ ）

Q_6 （ $\dfrac{48}{5}$ ，$\dfrac{1}{5}$ ）

Q_7 （ $\dfrac{12\sqrt{21}}{5}$ ，$\dfrac{1}{5}$ ）

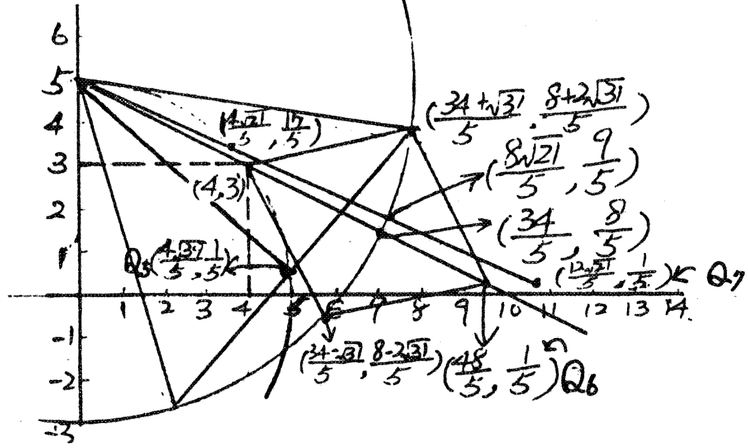
∴ Q_5，Q_6，Q_7 同在一直線 $y=\dfrac{1}{5}$ 上

故此規格長度改變了的聯節器（但條件仍舊符合已知）之Q點所繪的圖形還是一直線（如圖十一）

18.由 1 ～17 之證明，得知：

皮賽里爾聯節器的P點，以R爲圓心，作圓周運動時，Q點的描線爲一直線。

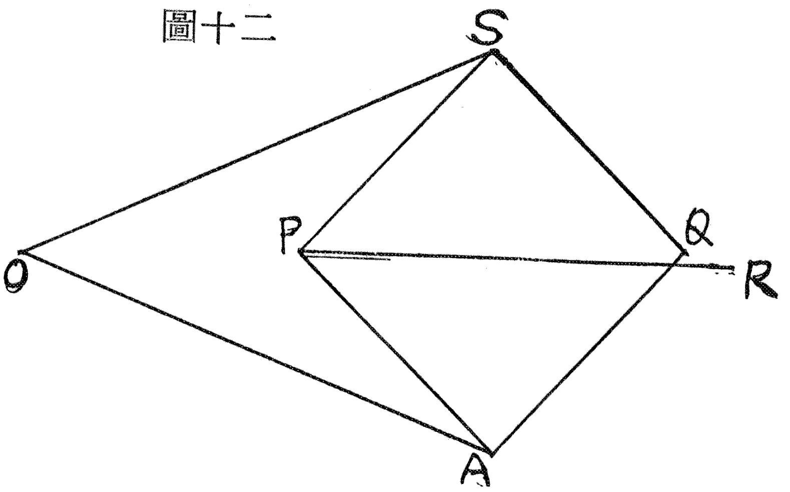
圖十一



八、其他及結論部份

㈠以下幾小項實驗，條件皆以圖十二爲準

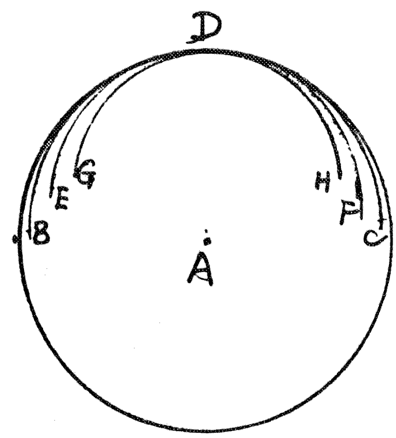
圖十二



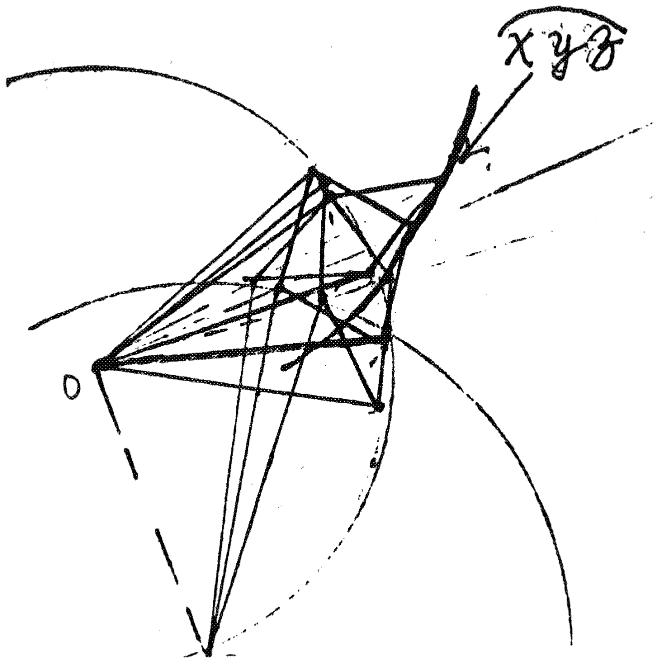
1. $\overline{OS}=\overline{OA}$
$\overline{SP}=\overline{PA}=\overline{AQ}$
$=\overline{QS}$
2. Q，R爲定點
$\overline{SQ}$($\overline{QA}$)與$\overline{PR}$
不相連以R爲圓
心$\overline{PR}$爲半徑畫弧
則O點所描出的
圖形如圖十二。

1. 若$\overline{QR}=0$，則O點可描出何種圖形？
答：則可畫出一圓，如圖十三之圓A。
2. 若$\overline{QR}=5\ cm$，則O點可描出何種圖形？
答：則可畫出一弧，如圖十三之$\overset{\frown}{BDC}$。
3. 若$\overline{QR}=10\ cm$，則O點可描出何種圖形？
答：也可畫出一弧，如圖十三之$\overset{\frown}{EDF}$。
4. 若$\overline{QR}=15\ cm$，則O點可描出何種圖形？
答：畫出一弧，如圖十三之GDH。

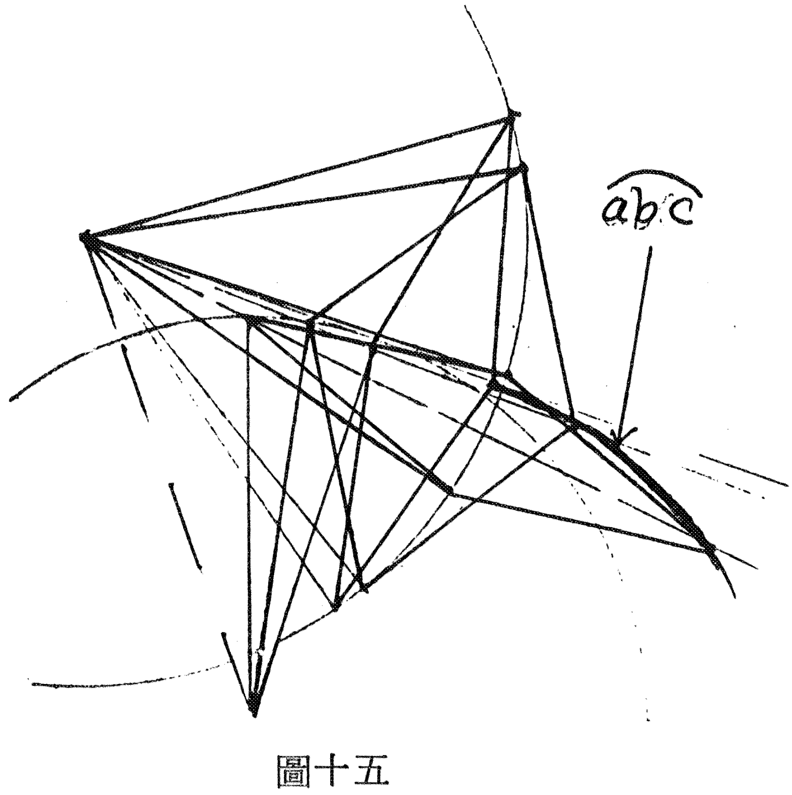
圖十三



㈡用圖四之作圖法，看是否能作出，如圖三之$\overset{\frown}{xyz}$與$\overset{\frown}{abc}$？
1. 若$\overline{OR}<\overline{PR}$，則繪出如圖十四之圖形。
2. 若$\overline{OR}>\overline{PR}$，則繪出如圖十五之圖形。



圖十四



圖十五

㈢如何求出皮賽里爾聯節器中Q點的坐標。（公式）（方法）

1. 令 $\overline{RS}=\overline{RA}=b$

$\overline{SP}=\overline{PA}=\overline{AQ}=\overline{SQ}=a$

$\overline{RO}=\overline{OP}=r$

2. 在P點坐標範圍內，定出P點坐標，設其爲P（m，n）。但 $r^2 = m^2 + n^2$（在此坐標系統中，已將皮賽里爾聯節器的O點，定爲原點，聯節器的R點，定在坐標爲（O，r）的點上。

3. 解聯立方程組

$$\begin{cases}(X-m)^2+(y-n)^2=a^2\\X^2+(y-r)^2=b^2\end{cases}$$

設其解爲 $\begin{cases}X=\alpha_1\\y=\beta_1\end{cases}$，$\begin{cases}X=\alpha_2\\y=\beta_2\end{cases}$

4. 則Q點坐標爲

$(\alpha_1+\alpha_2-m,\ \beta_1+\beta_2-n)$

(四)到底P點運動範圍爲何？

在前面好幾處地方，我們都將這問題大略提過，但不清楚。現在若問我們坐標範圍在那裏，那麼我們能肯定的說是：

一點爲 $\left(\dfrac{\pm(b-a)\sqrt{4r^2-(b-a)^2}}{2r},\right.$

$\left.\dfrac{-(b-a)^2+2r^2}{2r}\right)$ ①

〔這點一定有〕（見圖十七、十八、十九、二十）

另一點爲 $\left(\dfrac{\pm\sqrt{-(a^2-b^2)(a^2-b^2+4r^2)}}{2r},\right.$

$\left.\dfrac{2r^2+a^2-b^2}{2r}\right)$

〔這點不一定有〕（見圖十七、十八、二十）

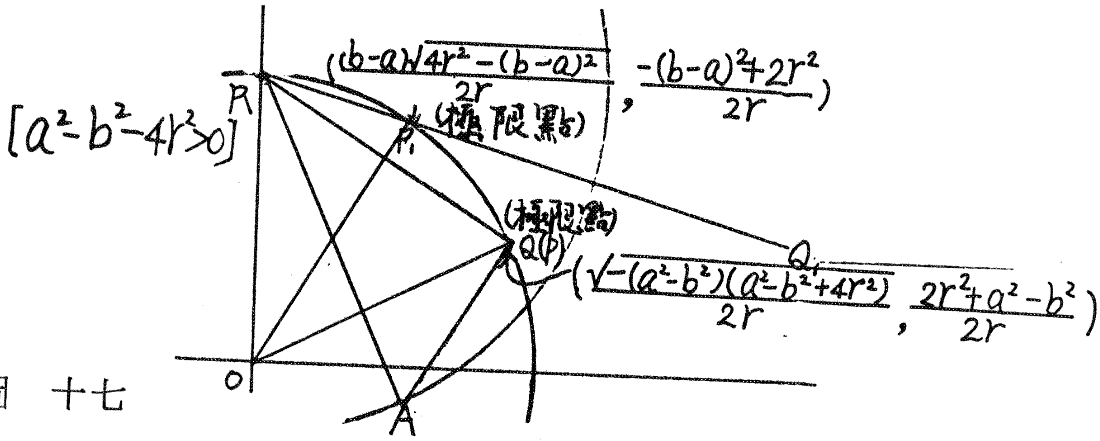
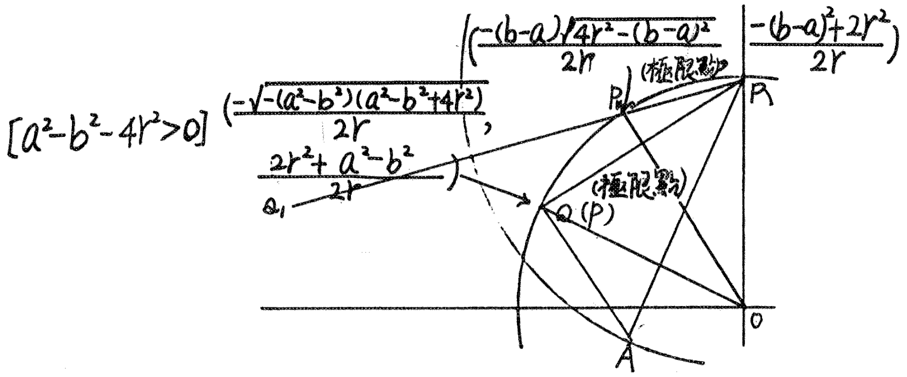
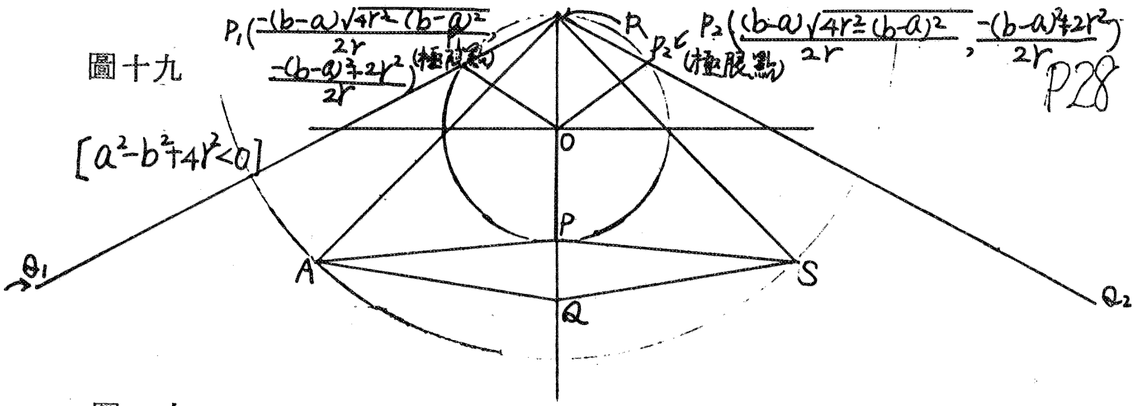


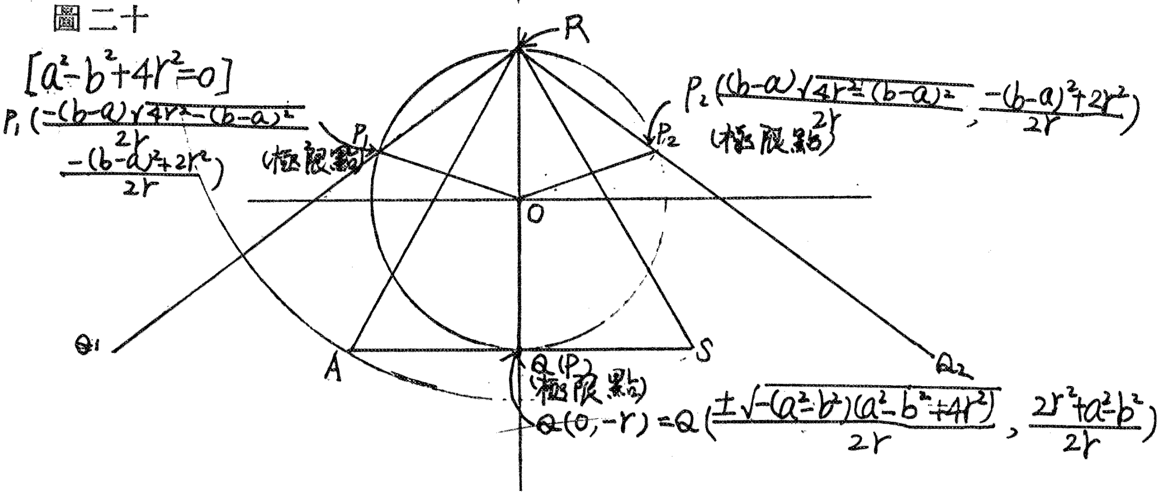
圖 十七



圖十九



圖二十



$$1\left(\overset{(X)}{\frac{\pm(b-a)\sqrt{4r^2-(b-a)^2}}{2r}},\ \overset{(y)}{\frac{-(b-a)^2+2r^2}{2r}}\right) \text{①}$$

$$\left(\frac{\overset{(X)}{\pm\sqrt{-(a^2-b^2)(a^2-b^2+4r^2)}}}{2r},\ \frac{\overset{(y)}{2r^2+a^2-b^2}}{2r}\right) \quad ②$$

是P點極限坐標（我們將P點運動範圍的二端點的坐標，暫且說是極限坐標）。

其中 a，b，r 所代表意義分別如圖二十所示，只要將 a，b，r 所代表的數值代入，即可求得P點運動的極限坐標。（但X坐標須要注意取捨）

2. 我們由前面的說明，可知P點的極限坐標應只有二點，那麼何以在極限坐標公式中，有±符號呢？那樣不是有四點了嗎？後來我們發現，X坐標求出後，必須判別一下是否合乎圖形。例如①②公式並配合圖十七，就知道若X坐標求得負值就應捨去；如①②公式配合圖十八，就知道應捨去X的正值。又其中①公式，永遠能用此種法則判斷，來取捨X值，因此①公式所代表的極限坐標點永遠存在，這也就是爲什麼我在㈣那裏說「這點一定有」的原因了，且①公式中的X坐標

$$\frac{\pm(b-a)\sqrt{4r^2-(b-a)^2}}{2r}$$ 永遠不可能產生虛數，

（ ∵ a，b，c ∈ R，a，b，c > 0，b > a （聯節器中，必定 b > a），又 r 的最小值不會等於 $\frac{(b-a)}{2}$ 『若 r <（b − a），則聯節器根本動不了』∴ $4r^2-(b-a)^2>0$ ）

所以①公式所代表的點一定存在。但其中的②公式，y雖一定是實數，但X却不一定是實數。爲何？我們說明如下：

$$\frac{\pm\sqrt{-(a^2-b^2)(a^2-b^2+4r^2)}}{2r}$$ 中，因爲 2r 是正數，故不討論，只討論分子根號內之

正負。

$-(a^2-b^2)(a^2-b^2+4r^2)$

中，

∵已知聯節器中 $b>a$

∴$-(a^2-b^2)$大於0，故現在只要討論 $a^2-b^2+4r^2$

的正負了。我們討論至此時，原先以爲 $a^2-b^2+4r^2$ 必定會大於0，因爲我們原先以爲皮賽里爾聯節器必定有四個極限點，然後兩兩一組，按照前面說法，必定有一組成立，有一組不成立。但事實並非如此。$a^2-b^2+4r^2$會有可能大於0、小於0、或等於0，且都能組成一個聯節器。後來不斷用數字假設，再用作圖法，赫然發現有如下三種情形：

(1)若 $a^2-b^2+4r^2>0$，其就會有四個極限點，且如前所說，當圖二十一成立時，圖二十二就不成立，反之亦然。

(2)若 $a^2-b^2+4r^2=0$，其就會有三個極限點。如圖二十四所示。

(3)若 $a^2-b^2+4r^2<0$，其只有二個極限點，如圖二十三所示。但若小於0，那麼②公式的X坐標，不是有虛數產生嗎？是的，此時有虛數產生，亦表示無這個極限點的存在（坐標平面上，無虛數點），這時其極限點，就是①公式所求得的二個坐標所代表的點。

3. ①，②公式如何求得？

我們假設皮賽里爾聯節器已運動至如圖五的樣子。（圖二十、十七、十八便是根據圖五的樣子而簡化畫成的）。此時$\angle RQA=90°$，（見圖十七、十八）因此，$\overline{RQ}^2=\overline{RA}^2-\overline{AQ}^2$，即 $\overline{RQ}(\overline{RP})=\sqrt{b^2-a^2}$ 。而P點（Q點），事實上就是以R爲圓心，$\overline{RQ}$ 爲半徑的圓R與圓O的方程式聯立解。

故 $\begin{cases} X^2+y^2=r^2 \\ X^2+(y-r)^2=(\sqrt{b^2-a^2})^2 \end{cases}$

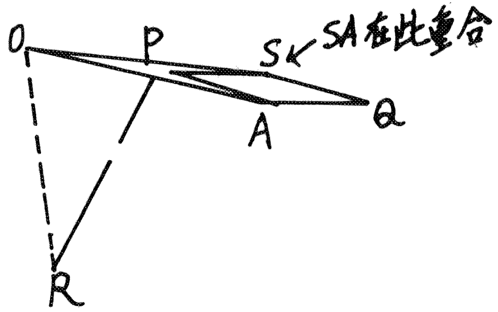
$$故X=\frac{\pm\sqrt{-(a^2-b^2)(a^2-b^2+4r^2)}}{2r}$$

$$y=\frac{2r^2+a^2-b^2}{2r}$$ ，如此便已求得一點 P（極限點）

我們再假設皮賽里爾聯節器已運動至如圖(二)的樣子

則 $\overline{RP_1}=b-a$

又 P_1 坐標事實上就是圓 0 方程式與以 R 爲圓心，$\overline{RP_1}$ 爲半徑之圓 R 方程式的聯立解



故 $\begin{cases} X^2+y^2=r^2 \\ X^2+(y-r)^2=(b-a)^2 \end{cases}$

$$故X=\frac{\pm(b-a)\sqrt{4r^2-(b-a)^2}}{2r}$$

$$y=\frac{-(b-a)^2+2r^2}{2r}$$

如此又求得一點 P_1（極限點）

4. 在②公式（ $\dfrac{\pm\sqrt{-(a^2-b^2)(a^2-b^2+4r^2)}}{2r}$ ，

$\dfrac{2r^2+a^2-b^2}{2r}$ ） 中的 $a^2-b^2+4r^2$

可作爲判別聯節器運作時，P，Q二點是否會重合的判別式。

5. 不管 $a^2-b^2+4r^2>0$ 或 $a^2-b^2+4r^2=0$ 或 $a^2-b^2+4r^2<0$ 我們都發現皮賽里爾聯節器所繪的直線，皆垂直於 y 軸。且公式②所代表的點雖不一定存在，但那只是代表P，Q二點不重合，而Q點還是能繼續畫線，且我們發現，此直線，正是②公式中

$$y=\frac{2r^2+a^2-b^2}{2r}$$ 所代表的直線。

因此皮賽里爾聯節器所繪直線的方程式爲

$$y=\frac{2r^2+a^2-b^2}{2r}$$

評語：自製模型探討動態移動的軌跡，並以坐標幾何的方法求證軌跡的方程式；研究結論完整。