# 幾何作圖探討

## 國中組數學科第一名

新竹市成德國中　　作　者：沈東興、方蘇立
指導教師：林　祁　强

## 一、研究動機

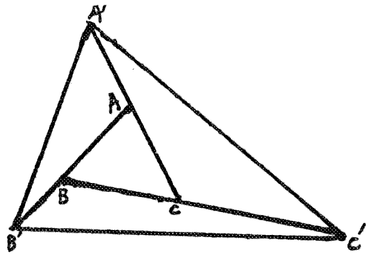
在國中數學第五册中，提到了一些平面幾何作圖，並證明。我們不知道這些作圖法是如何經過一些思維推理的程序而得到的。今欲就此方面作一番探討。

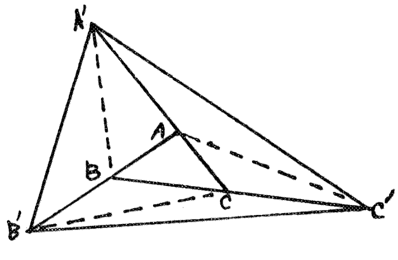
## 二、主　旨

本文係根據三角形的等積原理，三角形面積比及平行四邊形性質，平行線原理，對問題作分析，找出相關性質，而探討圖形之作法。

## 三、研究內容

右圖中，將△ABC的三邊$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 各延長一倍得B′, C′, A′三點，並連成△A′B′C′。假若，我們將$\overline{AB'}$, $\overline{BC'}$, $\overline{CA'}$ 三線段抹去。有何方法可找回△ABC 。

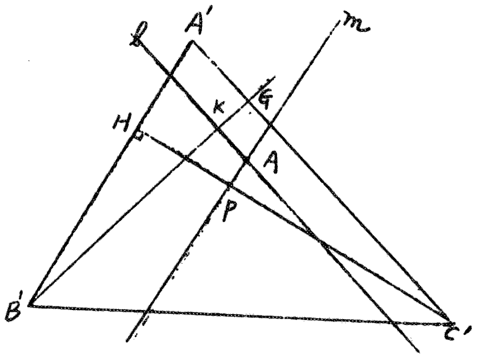



〔分析一〕

此問題無疑是要從A′, B′, C′ 三點出發來找出原來的A, B, C。若先將上圖之$\overline{A'B}$, $\overline{B'C}$, $\overline{C'A}$，連接起來（如上圖）則$\overline{A'B}$, $\overline{B'C}$, $\overline{C'A}$，分別是△A′B′A，△B′C′B，△C′A′C的中線。根據"三角形的中線可等分三角形面積"之性質，圖中有7個等面

積之三角形，即$\triangle ABC=\triangle AA'B=\triangle BB'A'=\triangle BB'C$ $=\triangle CC'B'=\triangle ACC'=\triangle AA'C'$。因此$\triangle AA'C'=\frac{1}{7}$ $\triangle A'B'C'$，$\triangle AB'B'=\frac{2}{7}$ $\triangle A'B'C'$。$\triangle A'B'C'$ 與$\triangle AA'C'$ 同以$\overline{A'C'}$爲底邊，A點到$\overline{A'C'}$ 的距離$=\frac{1}{7}$ B′ 點到$\overline{A'C'}$ 距離。同理，A點到$\overline{A'B'}$ 的距離＝- C′點到$\overline{A'B'}$的距離




（作法一）

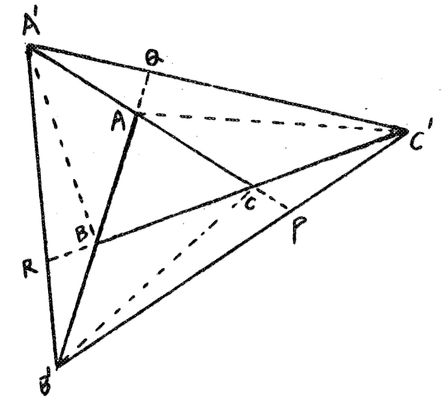
1. 過B′點作$\overline{A'C'}$的垂線，設垂足爲G。
2. 在$\overline{B'G}$上取K點，使$\overline{GK}=\frac{1}{7}\overline{BG}$。
3. 過K點，作一直線L使L平行於$\overline{A'C'}$。
4. 過C′點作$\overline{A'B'}$的垂線，設垂足爲H。
5. 在$\overline{C'H}$上取P點，使$\overline{HP}=\frac{2}{7}\overline{GH}$。
6. 過P點，作一直線m，使m平行於$\overline{A'B'}$。
7. 直線L與直線m交於A點，即爲原三角形之一頂點。
8. 同上作法可找出B點及C點。

〔分析二〕

延長$\overline{AC}$,$\overline{BA}$,$\overline{CB}$，分別與$\overline{B'C'}$,$\overline{A'C'}$,$\overline{A'B'}$ 交於P,Q,R 三點並連接$\overline{A'B}$,$\overline{B'C}$,$\overline{C'A}$,如分析一；$\triangle ABC=\triangle A'AB=\triangle A'B'B$ $=\triangle B'BC=\triangle B'C'C=\triangle C'CA=\triangle C'A'A$ 。

$$\frac{\overline{B'P}}{\overline{C'P}}=\frac{\triangle B'A'P}{\triangle C'A'P}=\frac{\triangle B'AP}{\triangle C'AP}=\frac{\triangle A'B'A}{\triangle A'C'A}=\frac{\frac{2}{7}\triangle A'B'C'}{\frac{1}{7}\triangle A'B'C'}=\frac{2}{1}$$

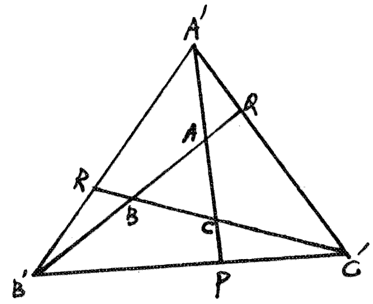
因此$\overline{B'P}=\frac{2}{3}\ \overline{B'C'}$，$\overline{C'P}=\frac{1}{3}\ \overline{CP}$。




同理$\overline{C'Q}=\frac{2}{3}\overline{C'A'}$，$\overline{A'Q}=\frac{1}{3}\overline{C'A'}$，$\overline{A'R}=\frac{2}{3}\overline{A'B'}$，$\overline{B'R}=\frac{1}{3}$ A′B′

（作法二）

1. 在$\overline{B'C'}$，$\overline{C'A'}$，$\overline{A'B'}$上分別取P，Q，R三點，使得$\overline{B'P}=\frac{2}{3}\overline{B'C'}$，$\overline{C'Q}=\frac{2}{3}\overline{C'A'}$，$\overline{A'R}=\frac{2}{3}\overline{A'B'}$
2. 作$\overline{A'P}$，$\overline{B'Q}$，$\overline{C'R}$，交於A，B，C三點即得：

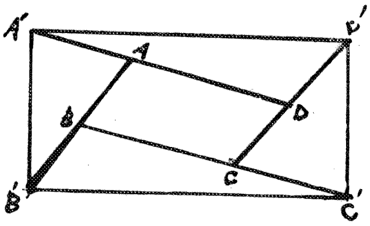



## 四、推　廣

若將上述之分析、作法推廣到四邊形中，可發現並非任意四邊形皆如此。而平行四邊形則具備了充要條件。

下圖中，ABCD是平行四邊形，將$\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CD}$，$\overline{DA}$ 各延長一倍，得B′, C′, D′, A′四點，並連成四邊形A′, B′, C′, D′，則A′B′C′D′亦為平行四邊形，將$\overline{AB'}$, $\overline{BC'}$, $\overline{CD'}$, $\overline{DA'}$ 四線段抹去，仍能找回原平行四邊形。

※以下分析作法係利用三角形加以推廣，故僅作要點提示



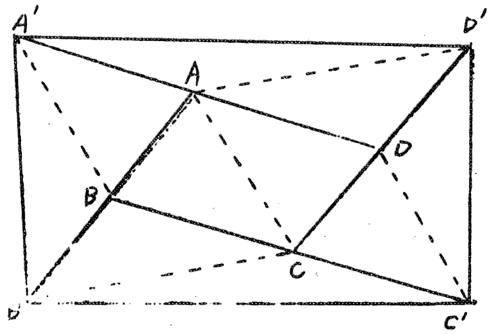

〔分析三〕

提示：1.下圖中△AA'B，△A'B'B△BB'C，△B'C'C，△CC'D
△C'D'D，△DD'A，△D'A'A，△ABC及△ACD 十
個三角形面積相等。

2. $\triangle AA'B'=\frac{2}{10}\square A'B'C'D'$

3. $\triangle AA'B'=$

4. $\triangle AAB=\frac{1}{10}\square A'B'C'D'$




（作法三）

提示：1.下圖中，$\overline{EF}\perp\overline{A'B'}$，$\overline{EK}=\frac{4}{10}\ \overline{EF}$ 。

2. L直線過K點，且平行於$\overline{A'B'}$ 。

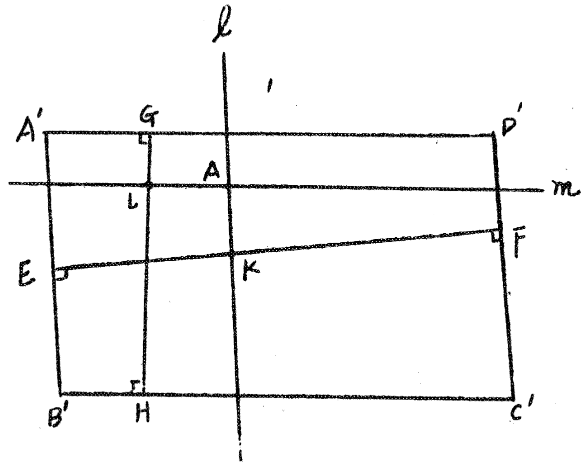
3. $\overline{GH}$ $\overline{A'D'}$，$\overline{GL}=\frac{2}{10}\ \overline{GH}$ 。

4. m直線過L點，且平行於$\overline{A'D'}$ 。

5. L，m兩直線相交於A點。

6. 同上步驟可找出B，C，D各點。

※注意：下圖中，$\overline{GH}$，$\overline{EF}$的位置選取位置，並不影響到A點的位置。




〔分析四〕

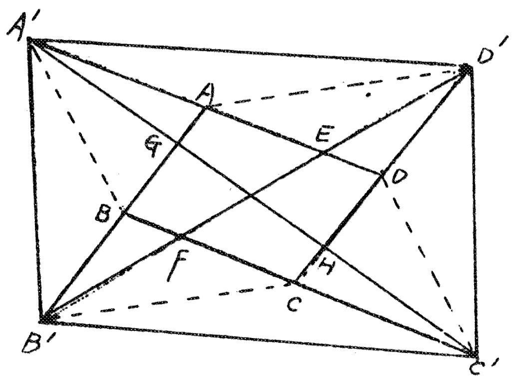
提示：下圖中$\frac{\overline{B'E}}{\overline{D'E}} = \frac{\triangle A'B'E}{\triangle A'D'E} = \frac{\triangle AB'E}{\triangle AD'E} = \frac{\triangle A'B'A}{\triangle A'D'A} = \frac{2}{1}$

$\therefore \overline{B'E} = \overline{2D'E}$

同理：$\overline{D'F} = \overline{2B'F}$　　$\overline{C'G} = \overline{2A'G}$　　$\overline{A'H} = \overline{2C'H}$

因此：E,F兩點是$\overline{B'D'}$的三等分點。

G,H兩點是$\overline{A'C'}$的三等分點。



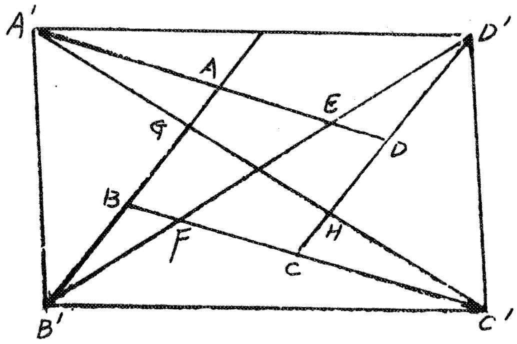

（作法四）

提示：下圖中：1. 作▱A′, B′, C′, D′ 的對角線$\overline{A'C'}$, $\overline{B'D'}$。

2. 取$\overline{B'D'}$之三等分點，EF 。

取$\overline{A'C'}$之三等分點G , H 。

3. 作$\overrightarrow{A'E}$，$\overrightarrow{B'G}$ , $\overrightarrow{C'F}$ , $\overrightarrow{D'H}$兩個相交於A, B, C, D四點。




## 五、結　　論

幾何作圖可因分析問題之角度不同，而得到不同之作法。因此，上述問題可能尚有其他作法。若對一幾何圖形之性質分析、理解更多，更透徹，則可找出更多的作法來解決它，甚或加以應用。

評語：本研究頗有創意，思考過程細密；表達方式清晰、生動；結論精緻完整。