非負整數解

高中組數學科特別獎第三名

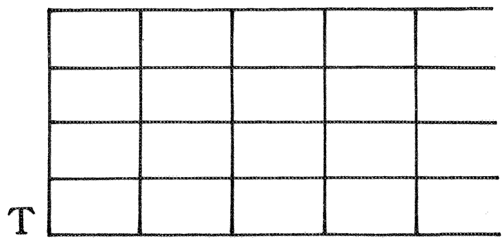
宜蘭中學

作　　者：李世昌等五

指導教師：陳　朝　鏘

一、研究動機

是因在課堂上某位同學向數學老師請教有關這類題目之求法，老師是以一般分析方法解題。於是我們就互相研究出以統一化之整數圖解法。



原題：棋盤形之街道（如下圖）今由 S 走到 **T** 之捷徑中所走路綫恰平分這區域之走法共有幾種？

解法：等於求滿足 $x_1+x_2+x_3+x_4=10$ 且 $0\leq x_1\leq x_2\leq x_3\leq x_4\leq 5$ 之整數解，今列老師課堂上之分析如下圖，故得12種：

x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	5	5
0	1	4	5
0	2	3	5
0	2	4	4
0	3	3	4
1	1	3	5
1	2	2	5
1	1	4	4
1	2	3	4
1	3	3	3
2	2	2	4
2	2	3	3

二、主　題

$K \in N$ ， $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots\cdots + x_n = K$

$\wedge\ x_1 \leq x_2 \leq \cdots\cdots \leq x_n$ 之非負整數解

三、研究步驟

(一)設 $x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n = K$，且 $P \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots\cdots \leq x_n \leq q$ 其中 k，p，q，$\in N \cup \{0\}$ 之定值，試求 x_1，$x_2 \cdots\cdots x_n$ 之非負整數解之最小範圍。

解： 1. $nx_1 \leqq x_1 + Tx_2 + x_3 + \cdots + x_n \leqq nx_n \quad nx_1 \leqq k \leqq nx_n$

$$\therefore \boxed{p \leqq x_1 \leqq [\frac{k}{n}] \leqq q} \quad \boxed{p \leqq \langle\frac{k}{n}\rangle \leqq x_n \leqq q}$$

2. $x_1 + (n-1)x_2 \leqq x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqq (n-1)x_{n-1} + x_n$

$p + (n-1)x_2 \leqq x_1 + (n-1)x_2 \leqq k \leqq (n-1)x_{n-1} + x_n \leqq (n-1)x_{n-1} + q$

$$\therefore \boxed{p \leqq x_2 \leqq [\frac{k-p}{n-1}] \leqq q} \quad \boxed{p \leqq \frac{k-q}{n-1} \leqq x_{n-1} \leqq q}$$

3. $x_1 + x_2 + (n-2)x_3 \leqq x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqq (n-2)x_{n-2} + x_{n-1} + x_n$

$2p + (n-2)x_3 \leqq k \leqq (n-2)x_{n-2} + 2q$

$$\therefore \boxed{p \leqq x_3 \leqq \left[\frac{k-2p}{n-2}\right] \leqq q} \boxed{p \leqq \left\langle\frac{k-2q}{n-2}\right\rangle \leqq x_{n-2} \leqq q}$$

4. 依次類推…………知

$$\boxed{p \leqq \left(\frac{k-(n-\ell)q}{\ell}\right) \leqq x_\ell \leqq \left\{\frac{k-(\ell-1)p}{n-(\ell-1)}\right\} \leqq q}$$

㈡求 $x_1+x_2+x_3+x_4=k \quad 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ 之非負整數解。

解：首先以 x_4，x_3 表已知值之變數，則可產生兩種情形：

1. $k-x_4-2x_3>0$ 時：得下表

步驟 \ 元素值	x_4	x_3	x_2	x_1
1	x_4	x_3	x_3	$k-x_4-2x_3$
2	x_4	x_3	逐漸減 1	逐漸加一
3	x_4	x_3	$\left\langle \frac{k-x_3-x_4}{2} \right\rangle$	$k-x_3-x_4-\left\langle \frac{k-x_3-x_4}{2} \right\rangle$

$2x_3+x_4<k$，$x_4 \geq x_3$，又 $x_2 \geq x_1 \rightarrow x_3 \geq k-x_4-2x_3$

$\therefore 3x_3+x_4 \geq k$

由㈠之作法：$x_1+x_2+x_3+x_4 \leqq 2x_2+x_3+x_4$

$$k \leqq 2x_2+x_3+x_4 \quad \therefore \frac{k-x_3-x_4}{2} \leq x_2$$

得：$\dfrac{k-x_3-x_4}{2} \leqq x_2 \leqq x_3$

在此情形下解答個數有 $x_3-\left\langle \frac{k-x_3-x_4}{2} \right\rangle+1$ 個 $=x_3$

$$+\left[\frac{x_3+x_4-k}{2}\right]+1=\left[x_3+\frac{x_3+x_4-k}{2}\right]+1=\left[\frac{3x_3+x_4-k}{2}\right]$$

$+1$ 個（以上乃利用公式：$-\langle x \rangle=[-x]$）

2. $k-x_4-2x_3 \leq 0$ 時：得下表：

步驟 \ 元素值	x_4	x_3	x_2	x_1
1	x_4	x_3	$k-x_4-x_3$	0
2	x_4	x_3	逐漸減 1	逐漸加 1
3	x_4	x_3	$\langle\frac{k-x_3-x_4}{2}\rangle$	$k-x_3-x_4-\langle\frac{k-x_3-x_4}{2}\rangle$

同理：$2x_3+x_4\geqq k$，$x_4\geqq x_3$，$x_2\geq x_1\to x_4+x_3\leq k$

在此情形下解答個數有 $k-x_3-x_4-[\frac{k-x_3-x_4}{2}]+1$ 個

$$=k-x_3-x_4+[\frac{x_3+x_4-k}{2}]+1$$

$$=[k-x_3-x_4-\frac{k-x_3-x_4}{2}]+1$$

$$=[\frac{k-x_3-x_4}{2}]+1 \text{ 個}$$

（以上乃利用公式：$-\langle x\rangle=[-x]$）

故其總個數爲(A)(B)兩種情形個數之和，吾人將以上兩種情形以圖解法表示以求其解。

將A、B二區域之圖解法說明如下：

(1)在A區域內 $x_4+2x_3<k$，$x_4-x_3\geq 0$，$x_4+3x_3\geq k$

，其解答個數有 $t=[\frac{3x_3+x_4-k}{2}]+1$ 個

說明：當 $3x_3+x_4-k=0<1$ 時，$[\frac{-k+3x_3+x_4}{2}]+1$

$=1$、t 之個數與區域內格子點個數相同。

當 $3x_3+x_4-k=2\vee 3$ 時，$\left[\dfrac{-k+3x_3+x_4}{2}\right]+1=2$

t 之個數為區域內格子點個數之 2 倍。

當 $3x_3+x_4-k=4\vee 5$ 時，$\left[\dfrac{-k+3x_3+x_4}{2}\right]+1=3$

t 之個數為區域內格子點個數之 3 倍。

………（以此類推）。

⇒即表示作平行於 $3x_3+x_4=k$ 之直線，再把 $3x_3+x_4=0\vee 1$ 為第一組 $3x_3+x_4=2\vee 3$ 為第二組，$3x_3+x_4=4\vee 5$ 為第三組……求其格子點個數，再分別乘以 1，2，3……。

(2)同理B區域內 $x_4+2x_3\geq k$，$x_4-x_3\geq 0$ $x_3+x_4\leq k$，

其解答個數有 $T=\left[\dfrac{k-x_3-x_4}{2}\right]+1$ 個

說明：當 $k-x_3-x_4=0\vee 1$ 時，$\left[\dfrac{k-x_3-x_4}{2}\right]+1=1$

，T之個數與區域內格子點個數相同。

當 $k-x_3-x_4=2\vee 3$ 時，$\left[\dfrac{k-x_3-x_4}{2}\right]+1=2$，

T之個數為區域內格子點個數之 2 倍。

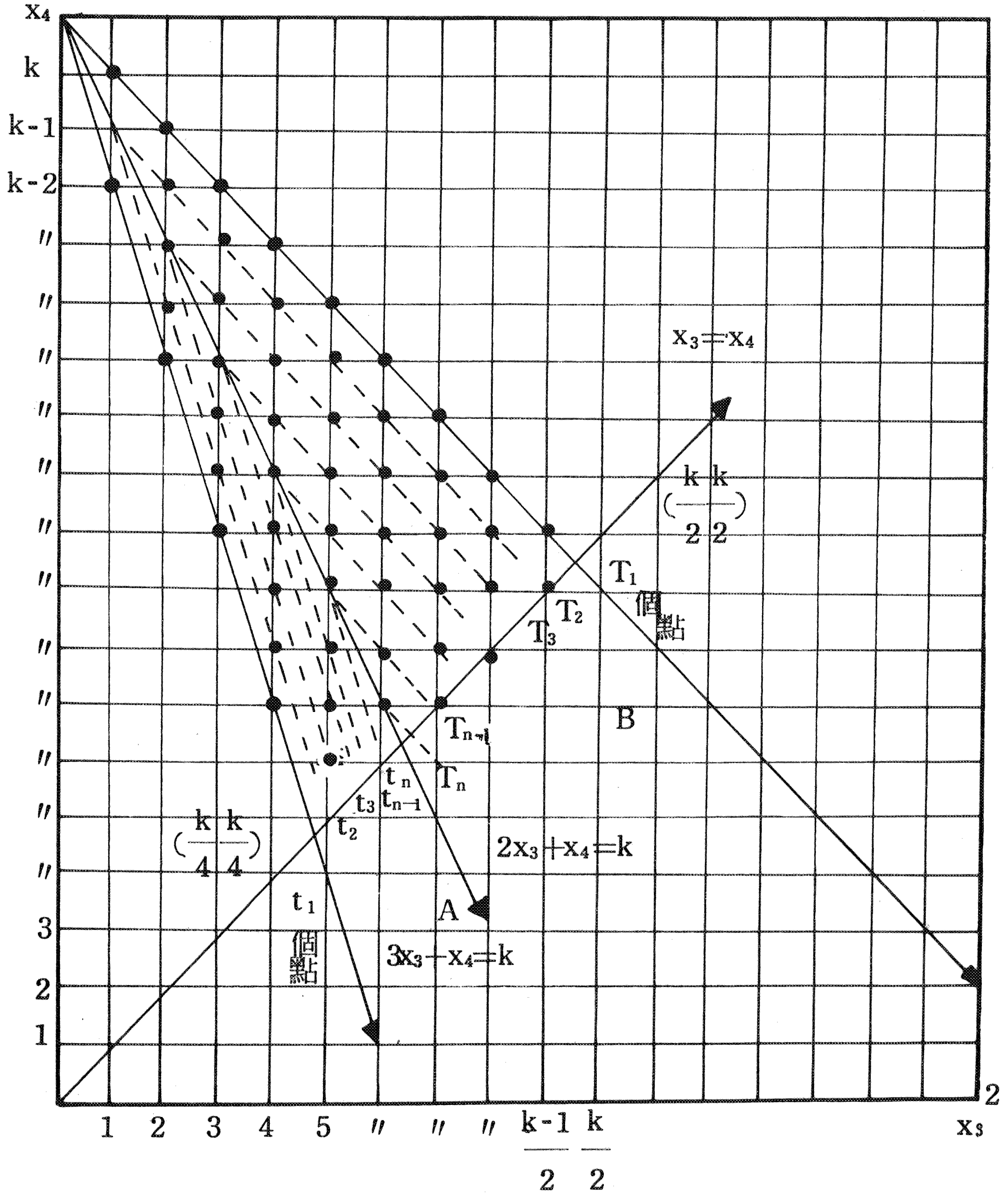
當 $k-x_3-x_4=4<5$ 時，$\left[\dfrac{k-x_3-x_4}{2}\right]+1=3$，

T之個數為區域內格子點個數之 3 倍。

………（以此類推）。

⇒也就是說作平行於 $k-x_3-x_4=0$ 之直線，再把 $k-x_3-x_4=0<1$ 為第一組，$k-x_3-x_4=2\vee 3$ 為第二組，$k-x_3-x_4=4\vee 5$ 為第三組……求其格子點個數，再分別乘以 1，2，3………。

其圖解如下：



x4
k
k-1
k-2
x3=x4
(k/2, k/2)
T1
個點
T2
T3
B
Tn-1
Tn
tn
t3 tn-1
t2
(k/4, k/4)
2x3+x4=k
t1
A
個點
3x3+x4=k
3
2
1
1 2 3 4 5
(k-1)/2
k/2
x3

上圖所求整數解之總個數為：

$$\boxed{1\times(t_1+t_2)+2\times(t_3+t_4)+\cdots\cdots+1\times(T_1+T_2)+2\times(T_3+T_4)+\cdots\cdots}$$

若有 $0\leqq x_1\leqq x_2\leqq x_3\leqq x_4\leqq q$ 之限制，亦可由(一)之方法，再限制區域內 x_4，x_3 之範圍以求解。

今以圖解法解，原題如下：

原題：求 $x_1+x_2+x_3+x_4=10$ 且 $0\leq x_1\leq x_2\leq x_3\leq x_4\leq x_5$

A 區域：$2x_3+x_4<10$，$x_4\geq x_3$，$3x_3+x_4\geq 10$

B 區域：$2x_3+x_4\geq 10$，$x_4\geq x_3$，$x_3+x_4\leq 10$

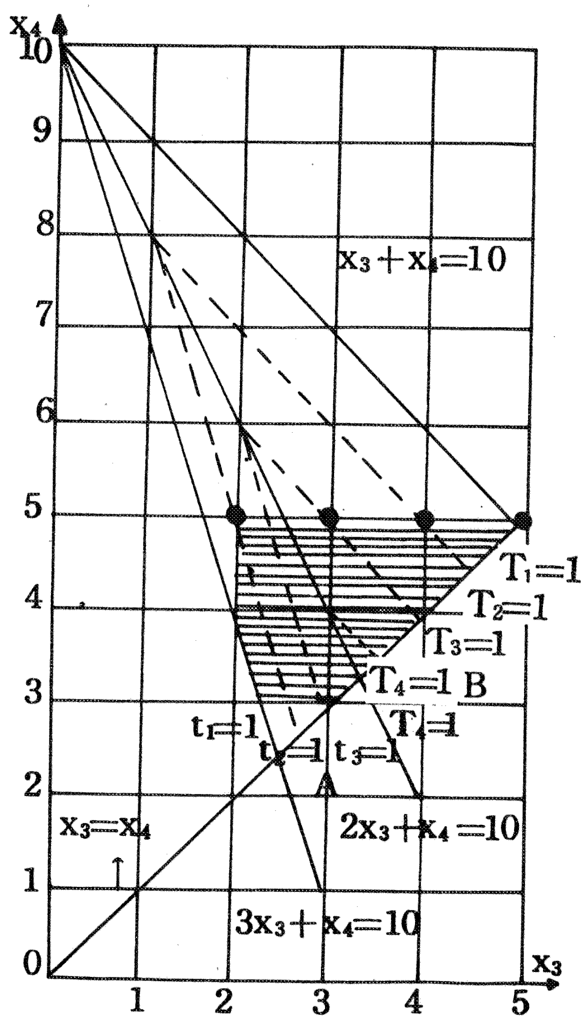
限　制：$2\leq x_3\leq 5$，$3\leq x_4\leq 5$

圖 $t_1=1$，$t_2=1$，$t_3=1$，$T_1=1$，$T_2=1$，$T_3=2$，$T_4=1$

$\therefore 1\times(t_1+t_2)+2\times t_3+1\times(T_1+T_2)+2\times(T_3+T_4)$

$=1\times 2+2\times 1+1\times 2+2\times 3=4+8=12$

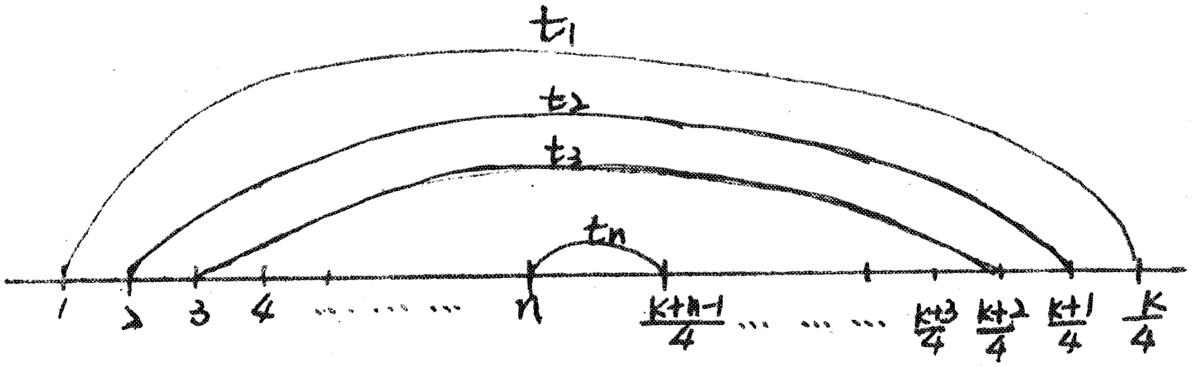
Ans：12 解



固平面上之格子點個數與其投影在 x_3 軸上之格子點個數是相同的。

（請詳看圖形之規律）

在A區域中 x_3 之投影坐標分別為：



設 $N_n \in \underbrace{1，2，3 \cdots\cdots\cdots t_n}_{t_n 個}$：

$$1 \le 1+(N_1-1) \le \frac{k}{4}，1 \le N_1 \le \left[\frac{k}{4}\right] \therefore t_1=\left[\frac{k}{4}\right]$$

$$2 \le 2+(N_2-1) \le \frac{k+1}{4}，1 \le N_2 \le \left[\frac{k-3}{4}\right] \therefore t_2=\left[\frac{k-3}{4}\right]$$

$$3 \le 3+(N_3-1) \le \frac{k+2}{4}，1 \le N_3 \le \left[\frac{k-6}{4}\right] \therefore t_3=\left[\frac{k-6}{4}\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$n \le n+(N_n-1) \le \frac{k+n-1}{4}，1 \le N_n \le \left[\frac{k-3(n-1)}{4}\right]$$

$$\therefore t_n=\left[\frac{k-3(n-1)}{4}\right] \text{ 但 } k \ge 3(n-1)，n-1 \le \frac{k}{3}，$$

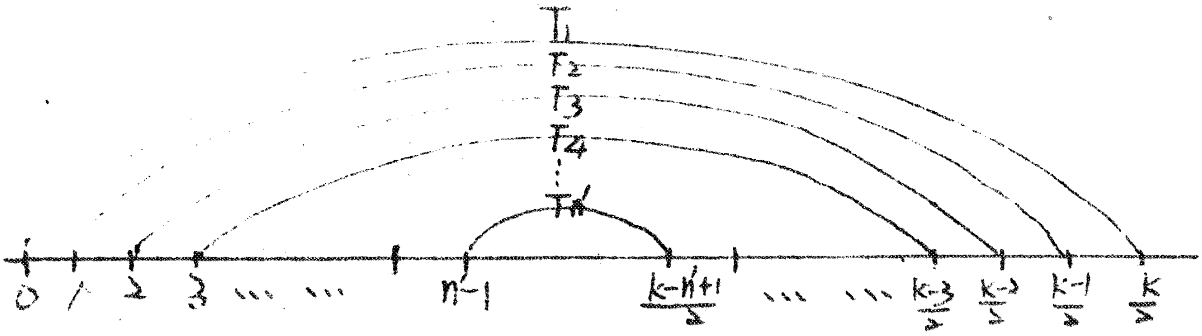
$$n \le \frac{k}{3}+1，n=\left[\frac{k}{3}\right]+1$$

∴A區域之整數解個數為：

$$1\times(t_1+t_2)+2\times(t_3+t_4)+3\times(t_5+t_6)+\cdots\cdots\cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{[\frac{k}{3}]+1} (\frac{n}{2})[\frac{k-3(n-1)}{4}] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

同理：在B區域中 x_3 上之投影坐標分別為：



設 $N_n \in \underbrace{1, 2, 3 \cdots\cdots\cdots T_n}_{T_n' \text{個}}$

$0 \leq N_1' - 1 \leq \frac{k}{2}$，$1 \leq N_1 \leq [\frac{k}{2}+1]$ 故 $T_1 = [\frac{k}{2}]+1$

$1 \leq (N_2'-1)+1 \leq \frac{k-1}{2}$，$1 \leq N_2' \leq [\frac{k-3}{2}+1]$ $\therefore T_2 = [\frac{k-3}{2}]+1$

$2 \leq (N_3'-1)+2 \leq \frac{k-2}{2}$，$1 \leq N_3' \leq [\frac{k-6}{2}+1]$

$\therefore T_3 = [\frac{k-6}{2}]+1$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$n'-1 \leq (N'n'-1)+n'-1 \leq \frac{k-n'+1}{2}$，$1 \leq N'n' \leq$

$[\frac{k-3(n'-)}{2}+1]$ $\therefore Tn' = [\frac{k-3(n-1)}{2}]+1$ 但 $k \geq 3$

$(n'-1)$，$n'-1 \leq \frac{k}{3}$，$n' \leq \frac{k}{3}+1$，$n' = [\frac{k}{3}]+1$ $\therefore n' = n$

∴B 區域之整數解個數為：

$1\times(T_1+T_2)+2\times(T_3+T_4)+3\times(T_5+T_6)+\cdots\cdots\cdots$

$$=\sum_{n=1}^{[\frac{k}{3}]+1}\left(\frac{n}{2}\right)\left(\left[\frac{k-3(n-1)}{2}\right]+1\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)(2)整數總和可記為：

$$\sum_{n=1}^{[\frac{k}{3}]+1}\left\langle\frac{n}{2}\right\rangle\left(\left[\frac{k-3(n-1)}{2}\right]+1+\left[\frac{k-3(n-1)}{4}\right]\right)$$

若 $[\frac{k}{3}]+1=m$，$\frac{k-3(n-1)}{2}=P$，則可記為：

$$\boxed{\sum_{n=1}^{m}\left\langle\frac{n}{2}\right\rangle\left([P]+1+\left[\frac{p}{2}\right]\right)}$$

進一步的探討整數解之總和，則可發現下列公式：

A部份：

利用 $(2m-1)\left(\left[\frac{k}{4}\right]+\left[\frac{k-3}{4}\right]\right)+2m\left(\left[\frac{k-6}{4}\right]+\left[\frac{k-9}{4}\right]\right)=\left[\frac{(4m-1)(k-6)}{2}\right]-F$

$F=\begin{cases}1. & k \text{ 不為 4 之倍數} \\ 2. & k \text{ 為 4 之倍數}\end{cases}$ （參考附註）

$m=1$ 時 $\rightarrow 1\times(t_1+t_2)+2\times(t_3+t_4)$

$$=\left(\left[\frac{k}{4}\right]+\left[\frac{k-3}{4}\right]\right)+2\left(\left[\frac{k-6}{4}\right]+\left[\frac{k-9}{4}\right]\right)$$

$$=\left[\frac{3(k-6)}{2}\right]-F$$

$m = 2$ 時→ $3\times(t_5+t_6)+4\times(t_7+t_8)$

$$= 3\left(\left[\frac{k-12}{4}\right]+\left[\frac{k-15}{4}\right]\right)+4\left(\left[\frac{k-18}{4}\right]+\left[\frac{k-21}{4}\right]\right)$$

$$= 3\left(\left[\frac{k}{4}\right]-3+\left[\frac{k-3}{4}\right]-3\right)+4\left(\left[\frac{k-6}{4}\right]-3\right.$$

$$\left.+\left[\frac{k-9}{4}\right]-3\right)$$

$$= 3\left(\left[\frac{k}{4}\right]+\left[\frac{k-3}{4}\right]\right)+4\left(\left[\frac{k-6}{4}\right]+\left[\frac{k-9}{4}\right]\right)$$

$$-6(4+3)$$

$$= \left[\frac{7(k-6)}{2}\right]-6\times7-F$$

$m = 3$ 時→ $5(t_9+t_{10})+6(t_{11}+t_{12})$

$$= 5\left(\left[\frac{k-24}{4}\right]+\left[\frac{k-27}{4}\right]\right)+6\left(\left[\frac{k-30}{4}\right]+\left[\frac{k-33}{4}\right]\right)$$

$$= 5\left(\left[\frac{k}{4}\right]-6+\left[\frac{k-3}{4}\right]-6\right)+6\left(\left[\frac{k-6}{4}\right]-6\right.$$

$$\left.+\left[\frac{k-9}{4}\right]-6\right)$$

$$= 5\left(\left[\frac{k}{4}\right]+\left[\frac{k-3}{4}\right]\right)+6\left(\left[\frac{k-6}{4}\right]+\left[\frac{k-9}{4}\right]\right)$$

$$-12(5+6)$$

$$= \left[\frac{11(k-6)}{2}\right]-12\times11-F$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$（以此類推）

設 $[\frac{k}{3}]+1=m$，$[\frac{m}{4}]=m_a$ ，則A區域中整數點個數爲：

$$\sum_{n=1}^{m}(\frac{n}{2})[\frac{k-3(n-1)}{4}]=\{1\times(t_1+t_2)+2\times(t_3+t_4)\}$$

$$+\{3\times(t_5+t_6)+4\times(t_7+t_8)\}+\cdots\cdots+\{(2m_a-1)$$
$$(t_{4m4-3}+t_{4ma-2})+2m_a(t_{4ma-1}+t_{4ma})\}+R_a$$

$$=[\frac{3(k-6)}{2}]-F+[\frac{7(k-6)}{2}]-6\times7-F+[\frac{11(k-6)}{2}]$$

$$-12\times11-F+\cdots\cdots+[\frac{(4m_a-1)(k-6)}{2}]-6(m_a-1)$$

$$(4m_a-1)-F+R_2$$

$$=\sum_{x_a=1}^{m_a}[\frac{4x_a-1)(k-6)}{2}]-6(x_a-1)(4x_a-1)-F)+R_a$$

$$=\sum_{x_a=1}^{m_a}2x_a(k+9)+3+[-\frac{k}{2}]-24x_a^2-6-F\}+R_a$$

$$=m_a\{(k+9)(m_a+1)-4(m_a+1)(2m_a+1)-3-<\frac{k}{2}>-F\}+R_a$$

$$=m_a(m_a+1)(k-8m_a+5)-m_a(<\frac{k}{2}>+3+F)+R_a\quad\cdots\cdots\cdots(A)$$

$$R_a=(2m_a+1)([\frac{k-12m_a}{4}]+[\frac{k-12m_a-3}{4}])+(2m_a+2)$$

$$[\frac{k-12m_a-6}{4}]$$

$$=(2m_a+1)\left(\left[\frac{k-12m_a}{4}\right]+\left[\frac{k-12m_a-3}{4}\right]\right)$$

$(\because\ k-12m_a<9，k-12m_a-6<3)$

（運算中高斯記號凡爲負值者均捨去）

B 部份：

利用公式 $\left[\frac{k}{2}\right]+\left[\frac{k+1}{2}\right]=k$

$$1\times(T_1+T_2)=\left[\frac{k}{2}\right]+\left[\frac{k-3}{2}\right]+2=\left[\frac{k}{2}\right]+\left[\frac{k+1}{2}\right]-2+2$$

$$=\left[\frac{k}{2}\right]+\left[\frac{k+1}{2}\right]=k$$

$$2\times(T_3+T_4)=2\left(\left[\frac{k-6}{2}\right]+\left[\frac{k-9}{2}\right]+2\right)$$

$$=2\left(\left[\frac{k}{2}\right]-3+\left[\frac{k+1}{2}\right]-5+2\right)=2(k-6)$$

$$3\times(T_5+T_6)=3\left(\left[\frac{k-12}{2}\right]+\left[\frac{k-1.5}{2}\right]+2\right)$$

$$=3\left(\left[\frac{k}{2}\right]-6+\left[\frac{k+1}{2}\right]-8+2\right)=3(k-12)$$

……………………………………

設 $\left[\frac{k}{3}\right]+1=m$，$\left[\frac{m}{2}\right]=m_6$，則B區域中整數點個數爲

$$\sum_{n=1}^{m}\left\langle\frac{n}{2}\right\rangle\left(\left[\frac{k-3(n-1)}{2}\right]+1\right)=1\times(T_1+T_2)$$

$+2\times(T_3+T_4)+3\times(T_5+T_6)+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$+m_6(T_{2m6-1}+T_{2m6})+R_6$

$=k+2(k-6)+3(k-12)+\cdots\cdots\cdots+m_6(k-6m_6+6)$

$+R_6=k(1+2+\cdots\cdots\cdots+m_6)-(2\times 6+3\times 12+\cdots\cdots\cdots$

$+m\times 6(m_6-1)+R_6$

$$=\frac{m_6(m_6+1)}{2}k-2m_b(m_b+1)(m_b-1)+R_b$$

$$=\frac{m_b(m_b+1)}{2}(k-4m_b+4)+R_b\rightarrow(B)$$

$$R_b=(m_b+1)([\frac{k-6m_b}{2}]+1)$$

綜合(A)(B)得：$\sum_{n=1}^{m}<\frac{n}{2}>([\frac{k-3(n-1)}{4}]+[\frac{k-3(n-1)}{2}]+1)$

$$=m_a(m_a+1)(k-8m_a+5)-m_a(<\frac{k}{2}>+3+F)+R_a$$

$$+\frac{mb(m_b+1)}{2}(k-4m_b+4)+R_b$$

$$\begin{cases} m_a=[\frac{m}{4}],\quad m_b=[\frac{m}{2}] \\ R_a=(2m_a+1)([\frac{k-12m_a}{4}]+[\frac{k-12m_a-3}{4}]) \\ R_b=(m_b+1)([\frac{k-6m_b}{2}]+1) \end{cases}$$

例：求 $x_1+x_2+x_3+x_4=30$，$0\le x_1\le x_2\le x_3\le x_4$ 之非負整數解？

解：代入上述公式：

$$m=\left[\frac{30}{3}\right]+1=11$$

$$m_a=\left[\frac{11}{4}\right]=2,\ m_b=\left[\frac{11}{2}\right]=5,\ F=1$$

$$R_a=(2\times2+1)\left[\frac{(30-12\times2)}{4}\right]=5$$

$$R_b=6\left(\left[\frac{30-30}{2}\right]+1\right)=6$$

$$2\times3(30-8\times2+5)-2\left(\left\langle\frac{30}{2}\right\rangle+3+1\right)+5$$

$$+\frac{5\times6(30-4\times5+4)}{2}+6$$

(三)若求 $x_2+x_1=k$，$0\le x_1\le x_2$ 之非負整數解：

解：若以 x_2，x_1 為變數，則在圖解上僅為一線段，即求

$\left\{\begin{array}{l}x_2-x_1\ge0\\x_2+x_1=k\end{array}\right.$ 之格子點，則總個數：$\boxed{T=\left[\frac{k}{2}\right]+1}$

(四)若求 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=k$，$P\le x_1\le x_2\le\cdots\cdots\le x_n$ 之非負整數解：

解：

元　素	x_1，x_2 …………………… x_n	剩下之值
先填入之值	p，p …………………… P	$k-np$

然後把剩下之值再排入 x_1，$x_2 \cdots\cdots x_n$ ，則排入之值分別以 a_1，$a_2 \cdots\cdots a_n$ 表示，且 $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots\cdots \leq a_n$，即求 $a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n = k - np \wedge 0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots\cdots \leq a_n$ 之非負整數解，而 $f(k-np, n)$ 表此形式之解。

若設本題形式之解爲 $g(k, n)$ 則 $g(k, n) = f(k-np, n) \cdots$(a)

※ $k - np \geq 0$

進一步探求 $x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n = k$，$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots\cdots \leq x_n$ 之非負整數解：

元　　素	x_1	$x_2 \cdots\cdots\cdots\cdots x_n$	剩下之值
先塡入之值	0	$0 \cdots\cdots 0$	k
	1	$1 \cdots\cdots 1$	$k-n$
	2	$2 \cdots\cdots 2$	$k-2n$
	⋮	⋮　⋮	⋮
	⋮	⋮　⋮	⋮
	$m-1$	$m-1 \cdots\cdots m-1$	$k-(m-1)n$

視 x_1 爲已知固定值，再把剩下之值排入 x_2，$x_3 \cdots\cdots x_n$，其排入之值分別以 a_2，$a_3 \cdots\cdots a_n$ 表示，且 $0 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots\cdots \leq a_n$ 然後如同上法，再視 a_2 爲已知固定值，再將剩下之值排入 a_3，$a_4 \cdots\cdots a_n$ 其排入之值分別以 b_3，$b_4 \cdots\cdots b_n$ 表示

……………………………………以此類推……………………………

若設 $f(k, n)$ 爲 $x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n = k$，$\wedge 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots\cdots \leq x_n$ 之非負整數解，則：

$$f(k, n) = f(k, n-1) + f(k-n, n-1) + f(k-2n, n-1) + \cdots\cdots + f(k-(m-1)n, n-1) \text{——(b)} ※ k-(m-1)n \geq 0$$

綜合(a)(b)得：

$$\boxed{\begin{aligned} g(k, n) &= f(k-np, n) \\ &= f(k-np, n-1) + f(k-n(p+1), n-1) + \cdots\cdots + f(k-n(p+m-1), n-1) \end{aligned}}$$

㈤若求 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=k$，$p\leq x_1<x_2<\cdots\cdots<x_n$ 之非負整數解：

解：

元　素	x_1，$x_2\cdots\cdots x_n$	剩下之值
先填入之值	p，$p+1\cdots\cdots p+(n-1)$	$k-np-\frac{n(n-1)}{2}$

然後把剩下之值再排入 x_1，$x_2\cdots\cdots x_n$，其排入之值分別以 a_1，$a_2\cdots\cdots a_n$ 表示 $\wedge\ 0\leq a_1\leq a_2\leq\cdots\cdots\leq a_n$ 即求 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n=k-np-\frac{n(n-1)}{2}$，$\wedge\ 0\leq a_1\leq a_2\leq\cdots\cdots\leq a_n$ 若設本題形式為 $\ell(k,n)$ 則：$\boxed{\ell(k,n)=f(k-np-\frac{n(n-1)}{2},n)}$

進一步求 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=k$，$P\leq x_1<x_2<\cdots\cdots<x_n\leq E$ 之非負整數解：

解：

元　素	x_1，$x_2\cdots\cdots x_n$	剩下之值	範　圍
先填入之值	p，$p+1\cdots p+(n-1)$	$k-np-\frac{n(n-1)}{2}$	$[0,q-p-(n-1)]$

然後亦將剩下之值排入 x_1，$x_2\cdots\cdots x_n$。（敘述同上）

設本題形式之解為：$\ell\left(\begin{smallmatrix}p,q\\k,n\end{smallmatrix}\right)$ 則：

$$\boxed{\ell\left(\begin{matrix}p,q\\k,n\end{matrix}\right)=f\left(\frac{0}{k-np-\frac{n(n-1)}{2}},\ \frac{q-p-(n-1)}{n}\right)}$$

∴從步驟㈣～㈥的作法中，可領悟到其中一定的通式，以將整體化為通解，其公式如下：

求 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=k$，且將 $\leq$ 或 $<$ 均任插入 $p\leq x_1$，$x_2\cdots\cdots x_n$ 之間的非負整數解：

解：作法同上：

元　　素	x_1，x_2 ……………… x_{n-1}，x_n	剩下之值
先填入之值	p_1，p_2 ………… p_n-1，p_n	$k-\sum p_i$

※ $i \in 1.2 \cdots\cdots n$　　$x_i \geq x_i-1 \rightarrow p_i = p_i-1$

$p_1 = p$　　$x_i > x_i-1 \rightarrow p_i = p_i-1+1$

設本題形式之解爲 $g\ell(k, n)$ 則：

$$\boxed{g\ell(k, n)=f(k-\sum p_i, n)}$$

若進一步將≤或＜均任挿入 $p \leq x_1, x_2 \cdots\cdots x_n \leq q$ 之間，試求其解：

解：同理：

元　　素	x_1，x_2 ………… x_n	剩下之值	範　　圍
先填入之值	p_1，p_2 ………… p_n	$k-\leq p_i$	$[0, q-p_n]$

設本題形式之解爲 $g, \ell\binom{p, q}{k, n}$ 則：

$$\boxed{g, \ell\left(\frac{p, q}{k, n}\right) = f\left(\frac{0 \quad , \quad q-p_n}{k-\sum p_i, \quad n}\right)}$$

例：求 $x_1+x_2+x_3+x_4=46$，$5 \leq x_1 \leq x_2 < x_3 < x_4$ 之非負整數解：

解：$\ell(46,4)=f\left(46-4\times 5-\frac{4\times 3}{2}, 4\right)$

$$=f(20.4)=108 \qquad \text{Ans：108 解}$$

(六)若求 $x_1+x_2 \leq k$，$0 \leq x_1 \leq x_2$ 之非負整數

解：（利用㈢之公式及 $\left[\frac{k}{2}\right]+\left[\frac{k+1}{2}\right]=k$ ）

解：$f(k,2)+f(k-1,2)+f(k-2,2)+\cdots\cdots+f(0,2)$

$$=\left(\left[\frac{k}{2}\right]+1+\left[\frac{k-1}{2}\right]+1\right)+\left(\left[\frac{k-2}{2}\right]+1+\left[\frac{k-3}{2}\right]+1\right)+\cdots$$

$$+\left(\left[\frac{k-2(m-1)}{2}\right]+1+\left[\frac{k-2(m-1)-1}{2}\right]+1\right)+R_1$$

$$=(k+1)+(k-1)+\cdots\cdots+(k-2(m-1)+1)+R_1$$

$$=mk-m(m-1)+m+R_1=m(k-m+2)+R_1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

（但 $k-2(m-1)+1\geq 0$，$\therefore m=\left[\frac{k+1}{2}\right]+1$ ）

$$R_1=\left[\frac{k-2(m-1)-2}{2}\right]+1=\left[\frac{k-2m}{2}\right]+1$$

（運算中高斯記號凡為負者均捨去）

進一步將之化為另一種形式：

$+(k,2)+f(k-1,2)+f(k-2,2)+\cdots\cdots+f(0,2)$

$=f(k,2)+f(k-3,2)+f(k-6,2)+\cdots\cdots+f(k-3(m_1-1)$
$2)+f(k-1,2)+f(k-4,2)+f(k-7,2)+\cdots\cdots+f(k-3$
$(n_2-1)-1,2)+f(k-2,2)+f(k-5,2)+f(k-8,2)+\cdots$
$+f(k-3(m_3-1)-2,2)$

$=f(k,3)+f(k-1,3)+f(k-2,3)$

（其中 $k-3(m-1)$，$k-3(m_2-1)-1$，$k-3(m_3-1)-2$ 必為連續最小之非負整數值）。

∴綜合(a)(b)得：

$f(k,3)+f(k-1,3)+f(k-2,3)$ $=m(k-m+2)+R_1$ $m=[\frac{k+1}{2}]+1$，$R_1=[\frac{k-2m}{2}]+1$	

進一步探求 $x_1+x_2\leq k$，$P\leq x_1\leq x_2$ 之非負整數解，則：

$$g(k,2)+g(k-1,2)+g(k-2,2)+\cdots\cdots+g(0,2)$$
$$=f(k-2p,2)+f(k-2p-1,2)+f(k-2p-2,2)+\cdots$$
$$+f(0,2)+\underbrace{\cdots\cdots+f(-2p,2)}\leftarrow(\text{此為負值，須捨去})$$
$$=f(k-2p,2)+f(k-2p-3,2)+f(k-2p-6,2)+\cdots$$
$$+f(k-2p-3(m_1-1),2)+f(k-2p-1,2)+f(k-2p-4,2)+f(k-2p-7,2)+\cdots\cdots+f(k-2p-3(m_2-1),2)+f(k-2p-2,2)+f(k-2p-5,2)+f(k-2p8,2)+\cdots\cdots+f(k-2p-3(m_3-1),2)$$

$$\boxed{=f(k-2p,3)+f(k-2p-1,3)+f(k-2p-2,3)}$$

（其中 $k-2p-3(m_1-1)$，$k-2p-3(m_2-1)-1$，$k-2p-3(m_3-1)-2$，必為連續最小之三非負整數值）且亦可

將 k 以 $k-2p$，$m'-[\frac{k-2p+1}{2}]+1$，$R_2=[\frac{k-2p-2m'}{2}]+1$

代入上式公式得：$\boxed{m'(k-2p-m'+2)\pm R_2}$

(七)若求 $x_1+x_2+x_3\leq k$，$p\leq x_1\leq x_2\leq x_2$ 之非負整數解：

解：作法同(六)之方法處理，可得其解為：

$$\boxed{\begin{array}{l}f(k-3p,4)+f(k-3p-1,4)+f(k-3p-2,4)\\+f(k-3p-3,4)\end{array}}$$

根據上面之結果可求 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n \leq k$，且將≤或＜均任插入 $p \leq x_1$，$x_2\cdots\cdots x_n$ 之間的非負整數解：

四、結　論

以上一系列之討論，含有其特殊的價值，其導出過程雖頗繁雜，然其主題的各種形式變化卻有連帶關係，只要能善加運用，這類問題便能徹底而迅速的解決。

五、附　註

於內容中，$q>k$ 時，必以 $q=k$ 來運算，而

〔 x 〕表不於 χ 之最大整數

〔 χ 〕表不小於 χ 之最小整數

六、補充

經研究發覺圖解法運用時有不便之處，可再改進，於是推得下列之解法，又其運用之方法亦可再推廣至機率問題，故再補充內容如下：

(一) 1. 若求 $x_1+x_2=k$，$0\leq x_1\leq x_2\leq q$ 之非負整數解？

解：

	x_2	x_1
	k	0
	$k-1$	1
	⋮	⋮
q	⋮	⋮
	⋮	⋮
	$\langle \frac{k}{2} \rangle$	$\left[\frac{k}{2} \right]$

$\Rightarrow$

x_2	x_1	
k	0	
$k-1$	1	
⋮	⋮	
$q+1$	$k-q-1$	
q	$k-q$	
⋮	⋮	本式之解
$\langle \frac{k}{2} \rangle$	$\left[\frac{k}{2} \right]$	

∵由(1)知 $<\frac{k}{2}> \le x_2 \le q$，∴ $q \ge <\frac{k}{2}>$ 方有解，若於 x_2 之值中，$q \ge <\frac{k}{2}>$ 時則其解為 f(k，2)−

$\{$ 求 $\begin{matrix} x_1 \leqslant k-q-1 \\ 0 \leqslant x_1 \end{matrix}$ 之非負整數解 $\}$

$$\boxed{\begin{array}{c} = f(k, 2) - f(k-q-1, 2) - f(k-q-2, 2) \\ \text{(利用(IX)之公式)} \end{array}}$$

若 $q < <\frac{k}{2}>$ 時則無解

2. 若求 $x_1 + x_2 + x_3 = k\ 0 \le x_1 \le x_2 \le {}_3 \le q$ 之非負整數解：

解：

	x_3	x_2	x_1
q	k	0	0
	$k-1$	1	0
	⋮	⋮	⋮
	$<\frac{k}{2}>$	$[\frac{k}{2}]$	0
	⋮	⋮	⋮
	⋮	⋮	⋮
	$<\frac{k}{2}>-1$	……	……
	⋮	⋮	⋮
	⋮	⋮	⋮
		⋮	⋮
	$<\frac{k}{3}>$	……	……

$\Rightarrow$

	x_3	x_2	x_1
	k	0	0
	$k-1$	1	0
	⋮	⋮	⋮
	⋮	⋮	⋮
	$q+1$	$k-q-1$	0
	⋮	⋮	⋮
本式之解	……	……	……
	⋮	⋮	⋮
	⋮	⋮	⋮
		⋮	⋮
	$<\frac{k}{3}>$	……	……

∴由(1)知 $<\frac{k}{3}> \leqslant x_3 \leqslant q$

若於 x_3 之值中 $q \ge <\frac{k}{2}>$ 時，則其解為：

$$f(k,3)-\{\text{求}\begin{matrix} x_1+x_2\leq k-q-1 \\ 0\leq x_1\leq x_2\end{matrix}\text{之非負整數解}\}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&=f(k,3)-f(k-q-1,3)-f(k-q-2,3)\\&\quad -f(k-q-3,3)\quad(\text{利用}(\text{Ⅷ})\text{之公式})\end{aligned}}$$

若 $q<<\frac{k}{2}>$時，則$f\left(\frac{0,q}{k,3}\right)=f\left(\frac{0,q}{k,2}\right)+f\left(\frac{0,q-1}{k-3,2}\right)+\cdots$

$$\cdots+f\left(\frac{0\qquad q-(m-1)}{k-3(m-1),\quad 3}\right)\quad(\text{利用}(\text{Ⅴ})\text{之公式})$$

其中 $q-(m-1)\geq<\frac{k-3(m-1)}{2}>$，$q-(m-1)+$

$\left[\frac{3(m-1)-k}{2}\right]$，$2q-2(m-1)+3(m-1)-k\geq 0$

$m\geq k-2q+1$，取$m=k-2q+1$

但由(1)知 $f\left(\frac{0,q}{k,2}\right)$中，若 $q<<\frac{k}{2}>$時則無解然後將

$m=k-2q+1$ 代入：

$$f\left(\frac{0\qquad q-(m-1)}{k-3(m-1),\quad 3}\right)$$

得 $$\boxed{f\left(\frac{0,q}{k,3}\right)=f\left(\frac{0\qquad 3q-k}{2(3q-k),\quad 3}\right)}$$

3. 若求 $x_1+x_2+x_3+x_4=k$，$0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4\leqslant q$
之非負整數解？

解：同上法：

x_4	x_3	x_2	x_1
k	0	0	0
$k-1$	1	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\langle \frac{k}{2} \rangle$	$\langle \frac{k}{2} \rangle$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\langle \frac{k}{2} \rangle-1$	……	……	……
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\langle \frac{k}{4} \rangle$	……	……	……

$\Rightarrow$

x_4	x_3	x_2	x_1
k	0	0	0
$k-1$	1	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$q+1$	$k-q-1$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
q	……	……	……
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\langle \frac{k}{4} \rangle$	……	……	……

本式之解

∴由(1)知$\langle \frac{k}{4} \rangle \leqslant x_4 \leqslant q$

若於 x_4 之值中 $q \geq \langle \frac{k}{2} \rangle$時，則其解爲：

$$f(k,4)-\{求 \begin{matrix} x_1+x_2+x_3 \leqslant k-q-1 \\ 0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \end{matrix} \text{之非負數解}\}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= f(k,4)-f(k-q-1,4)-f(k-q-2,4)- \\ &\quad f(k-q-3,4)-f(k-q-4,4) \text{(利用(IX)之公式)} \end{aligned}}$$

若 $q < \langle \frac{k}{2} \rangle$時，則

$$\boxed{\begin{aligned} & f\left(\begin{matrix}0,q\\k,4\end{matrix}\right)=f\left(\begin{matrix}0,q\\k,3\end{matrix}\right)+f\left(\begin{matrix}0,q-1\\k-4,3\end{matrix}\right)+\cdots\cdots+ \\ & f\left(\begin{matrix}0 & q-(m-1)\\k-4(m-1), & 4\end{matrix}\right) \end{aligned}}$$

其中 $q-(m-1) \geq \left\langle \frac{k-4(m-1)}{2} \right\rangle$，即運算到 $q-(m-1)$

$\geq \left\langle \frac{k-4(m-1)}{2} \right\rangle$ 爲止。

(二)若求 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=k$，$p \leqslant x_1$，$x_2 \cdots\cdots x_n \leqslant q$

之非負整數解：

解：

元　　素	x_1，$x_2 \cdots\cdots\cdots\cdots x_n$	剩下之值	範　　圍
先填入之值	$p, p \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots p$	$k-np$	$[0, q-p]$

設 $sg\binom{p, q}{n, k}$ 爲本題形式之解則：

$$sg\binom{p, q}{n, k}=sg\binom{0, q, p}{n, k-np} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (a)$$

進一步求 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=k$，$0 \leqslant x_1$，$x_2 \cdots\cdots x_n \leqslant q$

之非負整數解？

解：設 $sf\binom{0, q}{n, k}$ 爲本題形式之解則：

$$sf\binom{0, q}{n, k}=s(n, k)-\{求 \begin{matrix} x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=k \\ q+1 \leqslant x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n \end{matrix}$$

之非負整數解 $\}$

然後利用集合定理：

$(n(A \cup B \cup C \cup \cdots\cdots)=n(\sum A)-n(\sum A \cap B)+n$

$(\sum A \cap B \cap C) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots)$

〔說明〕：x_1，$x_2 \cdots\cdots x_n \in N \cup \{0\}$，而從 x_1，$x_2 \cdots\cdots x_n$ 中取一個大或等於 $q+1$ 之排法有 $s(n, k-(g+1))$，若從中取二個大或等於 $q+1$ 之排法有 $s(n, k-$

$(q+1)$) 若從中取三個大或等於 $q+1$ 之排法，有 $s(n, k-3(g+1))$ ……………以此類推………

$$\therefore sf\left(\frac{0, g}{n, k}\right)=s(n, k)-\{C_1^n s(n, k-(q+1))$$

$$-C_2^n s(n, k-2(q+1))+\cdots\cdots+C_m^n s(n, k-m(q+1))(-1)^{m-1}\}$$

$$=\sum C_m^n s(n, k-m\,p+1))(-1)^m \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(b)}$$

※$m-0, 1, 2$ ……至 $k-m(q+1)\geq 0$ 為止

綜合(a)(b)得：

$$\boxed{\begin{aligned} & sg\left(\frac{p, q}{n, k}\right)=sf\left(\frac{0, q-p}{n, k-np}\right) \\ & =\sum C_m^n s(n, k-np-m(q-p+1))(-1)^m \end{aligned}}$$

（此運算至 $k-np-m(q-p+1)\geq 0$ 為止）

故此類型可解投 n 個骰子，求 n 個骰子點數和為 k 之機率。

例一：若設三個骰子，求其三個骰子點數和為 11 之機率？

解：$sg\left(\frac{1, 6}{3, 11}\right)=sf\left(\frac{0, 5}{3, 8}\right)$

$$=s(3, 8)-C_1^3 s(3, 2)$$

$$=C_8^{10}-3C_2^4=27 \qquad \text{Ans}: \frac{27}{63}$$

評語：作者研究精神可佳，具有敏銳之數字研究潛能。