$\dfrac{q}{\cos\theta}+\dfrac{q}{\sin\theta}$ $\left(\begin{array}{c}\text{p.q為正常數}\\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right)$ 最小值之求法及推廣

高中組數學科第三名

台灣省立嘉義女子高級中學

作　　者：吳素幸、林怡君
林溫慧

指導教師：洪　銡　雄

一、動機

72年大學聯考數學試題，有底下這個題目：設 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 試求 $\dfrac{3}{\cos\theta}+\dfrac{2}{\sin\theta}$ 之最小值。事後有很多人（包括大學教授）認爲這個題目應該用微分來解，但三角函數的微分在高中階段並未講授，故用微分解這個問題，實在是超出高中生的能力範圍，因此激起我們對這個問題研究的興趣，希望能想出一個較完美的解法，並能推到一般的結論。

二、內容概要

(一)我們發現可將 $\dfrac{3}{\cos\theta}+\dfrac{2}{\sin\theta}$ 化成坐標面上的線段長，而且對任意之正常數p、q，$\dfrac{p}{\cos\theta}+\dfrac{q}{\sin\theta}$ 均可線段化（引理1），因而求出該線段長之最小值（引理2）就能得出 $\dfrac{p}{\cos\theta}+\dfrac{q}{\sin\theta}$ 之最小值（定理1）。

(二)將引理2推廣到坐標空間：對任意之正常數 x_0，y_0，z_0，求過（x_0，y_0，z_0）之平面在第一卦限與 x，y，z 軸之三個交

點以及原點等四點，所決定之長方體的最小對角線長（引理3）。

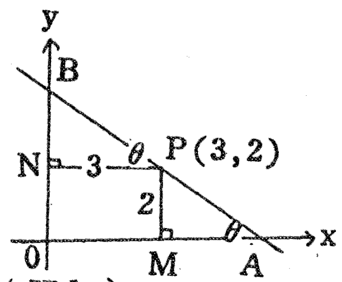
㈢進一步發現 $\frac{x_0}{\cos\alpha}+\frac{y_0}{\cos\beta}+\frac{z_0}{\cos\gamma}$（$x_0$，$y_0$，$z_0$為正常數，$0<\alpha，\beta，\gamma<\frac{\pi}{2}$且$\sum\cos^2\alpha=1$）亦可線段化，它就是2中長方體的對角線長（引理4），從而可求出其最小值（定理2）。

㈣將3再推至一般情形：求 $\frac{x_1}{\cos\alpha_1}+\frac{x_2}{\cos\alpha_2}+\cdots\cdots+\frac{x_n}{\cos\alpha_n}$（$x_1$ 均為正常數，$0<\alpha_i<\frac{\pi}{2}$且$\sum\cos^2\alpha_i=1,\ i=1,2,\cdots,n$）之最小值（定理3）。

三、研究過程與內容

㈠從特例說起：

在 $0-xy$ 坐標面上，過點 $P(3,2)$ 作直線於第一象限與 x、y 軸分別交於 A、B 兩點且使 $\angle 0AB=\theta$，作 $PM\perp x$ 軸於 M，作 $PN\perp y$ 軸於 N（圖1）則在 $Rt\triangle pBN$ 中有 $\frac{3}{\cos\theta}=PB$，在 Rt



（圖1）

$\triangle PAM$ 中有 $\frac{2}{\sin\theta}=PA$

$\therefore\frac{3}{\cos\theta}+\frac{2}{\sin\theta}=PB+PA=AB$，也就是說可將 $\frac{3}{\cos\theta}+\frac{2}{\sin\theta}$ 線段化，因而求出該線段長（AB）的最小值，就等於是求出 $\frac{3}{\cos\theta}+\frac{2}{\sin\theta}$ 的最小值。

㈡推至一般情形

我們發現對任意正常數p、q，$\dfrac{p}{\cos\theta}+\dfrac{q}{\sin\theta}$ 均可線段化，述

爲引理1如下：

引理1：

在0－x y坐標面上，設過點（p，q）之直線於第一象限，分別交x、y軸於A、B且∠0AB＝θ 則$\dfrac{p}{\cos\theta}+\dfrac{q}{\sin\theta}=AB$。

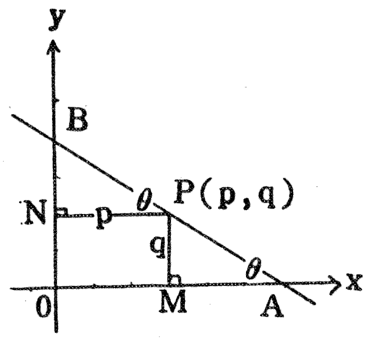
證明：

如圖2所示，在Rt△PBN中，

$$\frac{p}{\cos\theta}=PB$$

在Rt△PAM中，

$$\frac{q}{\sin\theta}=PA$$



（圖2）

$$\therefore\frac{p}{\cos\theta}+\frac{q}{\sin\theta}=PB+PA=AB$$

引理2：

設p＞0，q＞0，在0－x y坐標面上，過點（p，q）之直線於第一象限分別交x、y軸於A、B則AB之最小值爲

$(p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$，此時AB的方程式爲$\dfrac{x}{p^{\frac{1}{3}}(p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}})}+\dfrac{y}{q^{\frac{1}{3}}(p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}})}=1$

證明：

令0A＝a，0B＝b則$AB=\sqrt{a^2+b^2}$，現即欲求$\sqrt{a^2+b^2}$之最小值，因出現a^2+b^2，故聯想到利用柯西－史瓦滋不等式（以下簡稱柯西不等式）

(1)取正常數ℓ，m，由柯西不等式得

$(a^2+b^2)(\ell^2+m^2) \geq (\ell a+mb)^2$ ……………………(1)

又 $(\ell a+mb)\left(\frac{p}{a}+\frac{q}{b}\right) \geq (\sqrt{\ell p}+\sqrt{mq})^2$

因 $\frac{p}{a}+\frac{q}{b}=1$　故 $\ell a+mb \geq (\sqrt{\ell p}+\sqrt{mb})^2$ …………(2)

由(1)(2)得 $(a^2+b^2)(\ell^2+m^2) \geq (\sqrt{\ell p}+\sqrt{mq})^4$

$$故\sqrt{a^2+b^2} \geq \frac{(\sqrt{\ell p}+\sqrt{mq})^2}{\sqrt{\ell^2+m^2}} \quad (*)$$

(2)(＊)式「＝」號成立的充要條件為：(1)式「＝」號成立且(2)「＝」號成立

(1)式「＝」號成立時：$\frac{a}{\ell}=\frac{b}{m}$ 即 $\frac{a}{b}=\frac{\ell}{m}$ ……………………(3)

(2)式「＝」號成立時：$\frac{\sqrt{\ell a}}{\sqrt{\frac{p}{a}}}=\frac{\sqrt{mb}}{\sqrt{\frac{q}{b}}}$ 即 $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{mp}}{\sqrt{\ell q}}$ ………(4)

由(3)(4)得 $\frac{\ell}{m}=\frac{\sqrt{mp}}{\sqrt{\ell q}}$ 平方之得 $\frac{\ell^3}{m^3}=\frac{p}{q}$ $\therefore \frac{\ell}{m}=\frac{\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{q}}$ …………(5)

$\therefore$ Ek＞0，$\ni \ell=\sqrt[3]{pk}$，$m=\sqrt[3]{pk}$ 代入(＊)中得

$$AB=\sqrt{a^2+b^2}\text{之最小值為}\frac{(\sqrt{p\sqrt[3]{pk}}+\sqrt{q\sqrt[3]{pk}})^2}{\sqrt{\sqrt[3]{p^2k^2}+\sqrt[3]{q^2k^2}}}$$

$$=\frac{(\sqrt{p^{\frac{4}{3}}}+\sqrt{q^{\frac{4}{3}}})^2}{\sqrt{p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}}}}$$

$$=\frac{(p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}})^2}{(p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}=(p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

(3)當 AB 最小時，則 $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{q}}$（由(3)(5)知）且 $a^2+b^2=(p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}})^3$ …(6)

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

$\therefore \exists\ t>0$，$\ni a=\sqrt[3]{p}\,t$，$b=\sqrt[3]{q}\,t$ 代入得(6)得

$$(p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}})t^2=(p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}})^3 \quad \therefore t=p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}}$$

故得 $a=p^{\frac{1}{3}}(p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}})$，$b=q^{\frac{1}{3}}(p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}})$

由直線的截距式知，此時AB的方程式為

$$\frac{x}{p^{\frac{1}{3}}(p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}})}+\frac{y}{q^{\frac{1}{3}}(p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}})}=1$$

推論 1：

設 $p\cdot q\neq 0$，則在點 (p,q) 之象限內，過點 (p,q) 之直線被兩軸所截取之最小線段長為 $(p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$，又此時該直線的方程式為 $\dfrac{x}{p^{\frac{1}{3}}(p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}})}+\dfrac{y}{q^{\frac{1}{3}}(p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}})}=1$

證明：吾人僅討論 p，q 至少有一為負的情形即可：

(ㄅ)由對稱的觀念知，過點 (p,q) 之直線在該點之象限內被兩軸所截取之最小線段長與過點 $(|p|,|q|)$ 之直線在第一象限內被兩軸所截取之最小線段長相同，故由引理 2 知此最小線段長為 $(|p|^{\frac{2}{3}}+|q|^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}=(p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

又此時過 $(|p|,|q|)$ 之直線的方程式為

$$\frac{x}{|p|^{\frac{1}{3}}(|p|^{\frac{2}{3}}+|q|^{\frac{2}{3}})}+\frac{y}{|q|^{\frac{1}{3}}(|p|^{\frac{2}{3}}+|q|^{\frac{2}{3}})}=1 \text{ —(A)}$$

(ㄆ)當截取線段長最小時，過 (p,q) 之直線的方程式可如下求之：

若 $p<0$，$q>0$ 則由對稱的關係及(A)知，此時過 (p,q) 之直線的 X 截為

$$-|p|^{\frac{1}{3}}(|p|^{\frac{2}{3}}+|q|^{\frac{2}{3}})=p^{\frac{1}{3}}(p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}})$$，y 截距仍為

$|q|^{\frac{1}{3}}(|p|^{\frac{2}{3}}+|q|^{\frac{2}{3}})=q^{\frac{1}{3}}(p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}})$。

故其方程式為 $\dfrac{x}{p^{\frac{1}{3}}(p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}})}+\dfrac{y}{q^{\frac{1}{3}}(p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}})}=1$，同理 $p<0$，$q>0$ 及 $p>0$，$q<0$ 之情形仿上亦可得出同樣結果。

利用引理 1 與引理 2，立即可推得下之定理 1

> 定理 1：設 p，q 為正常數則 $\dfrac{p}{\cos\theta}+\dfrac{q}{\sin\theta}$ 之最小值為
>
> $(p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

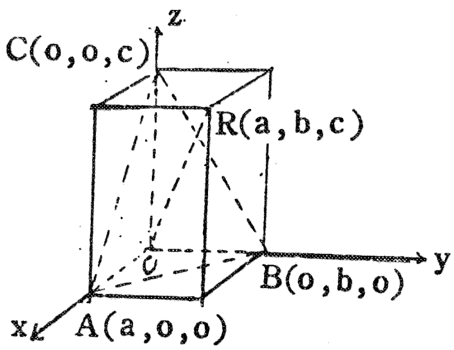
證明：由引理 1 知 $\dfrac{p}{\cos\theta}+\dfrac{q}{\sin\theta}=AB$ ，又由引理 2 知 AB 之最小值為 $(p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

$\therefore(\dfrac{p}{\cos\theta}+\dfrac{q}{\sin\theta})$ 之最小值為 $(p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

㈢推廣：將引理 2 推廣到坐標空間，可得下列引理 3。

> 引理 3：
>
> 設 $x_0>0$，$y_0>0$，$z_0>0$，則在 0－x y z 坐標空間裡，過點 (x_0, y_0, z_0) 之平面於第一卦限與 x、y、z 軸之三個交點以及原點等四點，所決定之長方體的最小對角線長為
>
> $(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$，此時該平面的方程式為
>
> $$\frac{x}{x_0^{\frac{1}{3}}(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})}+\frac{y}{y_0^{\frac{1}{3}}(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})}+\frac{z}{z_0^{\frac{1}{3}}(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})}=1$$

證明：設過（x_0，y_0，z_0）之平面，在第一卦限與 x，y，z 軸的交點分別為 A（a，0，0），B（0，b，0）C（0，0，c），則由O，A，B，C 四點所決定之長方體的對角線長為 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，故現即欲求 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 之最小值（圖 3 中OR為對角線）。



（圖 3 ）

因出現 $a^2+b^2+c^2$，故可考慮利用柯西不等式。

(1)取正常數 ℓ，m，n，由柯西不等式得

$$(a^2+b^2+c^2)(\ell^2+m^2+n^2)\geq(\ell a+mb+nc)^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 $(\ell a+mb+nc)(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}\geq(\sqrt{\ell x_0}+\sqrt{my_0}+\sqrt{nz_0})^2$

因 $\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}=1$ 故 $\ell a+mb+nc\geq(\sqrt{\ell x_0}+\sqrt{my_0}+\sqrt{nz_0})^2$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

由(1)(2)得 $(a^2+b^2+c^2)(\ell^2+m^2+n^2\geq(\sqrt{\ell x_0}+\sqrt{my_0}+\sqrt{nz_0})^4$

$$\therefore\sqrt{a^2+b^2+c^2}\geq\frac{(\sqrt{\ell x_0}+\sqrt{my_0}+\sqrt{nz_0})^2}{\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}} \quad (**)$$

(2)(1)式「＝」號成立時：$\frac{a}{\ell}=\frac{b}{m}=\frac{c}{n}$ 即 a ：b ：c $=\ell$ ：m：n

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(2)式「＝」號成立時：$\frac{\sqrt{\ell a}}{\frac{\sqrt{x_0}}{a}}=\frac{\sqrt{mb}}{\frac{\sqrt{y_0}}{b}}=\frac{\sqrt{nc}}{\frac{\sqrt{z_0}}{c}}$ 即 $\frac{a}{\frac{\sqrt{x_0}}{\ell}}=\frac{b}{\frac{\sqrt{y_0}}{m}}=\frac{c}{\frac{\sqrt{z_0}}{n}}$

$$\therefore a:b:c=\sqrt{\frac{x_0}{\ell}}:\sqrt{\frac{y_0}{m}}:\sqrt{\frac{z_0}{n}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

由(3)(4)得　$\ell : m : n = \sqrt{\frac{x_0}{\ell}} : \sqrt{\frac{y_0}{m}} : \sqrt{\frac{z_0}{n}}$

平方得 $\ell^2 : m^2 : n^2 = \frac{x_0}{\ell} : \frac{y_0}{m} : \frac{z_0}{n}$

$\therefore \ell : m : n = \sqrt[3]{x_0} : \sqrt[3]{y_0} : \sqrt[3]{z_0}$ ……………………………(5)

$\therefore \exists\, k > 0$，$\ni \ell = \sqrt[3]{x_0}\,k$，$m = \sqrt[3]{y_0}\,k$，$n = \sqrt[3]{z_0}\,k$

以之代入（＊＊）中得 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 之最小值爲

$$\frac{(\sqrt{x_0\sqrt[3]{x_0}\,k}+\sqrt{y_0\sqrt[3]{y_0}\,k}+\sqrt{z_0\sqrt[3]{z_0}\,k})^2}{\sqrt{\sqrt[3]{x_0}^2k^2+\sqrt[3]{y_0}^2k^2+\sqrt[3]{z_0}^2k^2}}$$

$$=\frac{(\sqrt{x_0^{\frac{4}{3}}}+\sqrt{y_0^{\frac{4}{3}}}+\sqrt{z_0^{\frac{4}{3}}})^2}{\sqrt{x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}}}}=\frac{(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})^2}{(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}$$

$$=(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

(3)當 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 最小時 $a : b : c = \sqrt[3]{x_0} : \sqrt[3]{y_0} : \sqrt{z_0}$

（由(3)(5)得）且 $a^2+b^2+c^2=(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})^3$ ……………(6)

$\therefore \exists\, t > 0$，$\ni a = \sqrt[3]{x_0}\,t$，$b = \sqrt[3]{y_0}\,t$，$c = \sqrt[3]{z_0}\,t$ 代入(6)

得 $(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})t^2=(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})^3$

$\therefore t = x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}}$

故 $a = x_0^{\frac{1}{3}}(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})$　$b = y_0^{\frac{1}{3}}(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})$

$c = z_0^{\frac{1}{3}}(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})$

$\therefore$ 此時平面的方程式爲 $\dfrac{x}{x_0^{\frac{1}{3}}(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})}+$

$$\frac{y}{y_0^{\frac{1}{3}}(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})}+\frac{z}{z_0^{\frac{1}{3}}(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})}=1$$

仿照引理2導出推論1的方法，吾人亦可由引理3，導出下列推論2：

推論2：

設 $x_0 \cdot y_0 \cdot z_0 \neq 0$ 則在點（x_0，y_0，z_0）之掛限內，過點（x_0，y_0，z_0）之平面與 x、y、z 軸之三個交點以及原點等四點，所決定之長方體的最小對角線長爲

$(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$，此時該平面的方程式爲

$$\frac{x}{x_0^{\frac{1}{3}}(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})}+\frac{y}{y_0^{\frac{1}{3}}(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})}+\frac{z}{z_0^{\frac{1}{3}}(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})}=1$$

進一步我們發現 $\frac{x_0}{\cos\theta}+\frac{y_0}{\cos\beta}+\frac{z_0}{\cos\gamma}$ 亦可線段化，（因而很容易可求出其最小值），列爲引理4如下：

引理4：

對 $\frac{x_0}{\cos\alpha}+\frac{y_0}{\cos\beta}+\frac{z_0}{\cos\gamma}$（$x_0$，$y_0$，$z_0$ 均爲正常數，$0<\alpha$，β，$\gamma<\frac{\pi}{2}$ 且 $\sum\cos^2\alpha=1$）而言，在 $0-xyz$ 坐標空間裡，設過點（x_0，y_0，z_0）之平面E於第一掛限與 x、y、z 軸相交於A、B、C，且0、A、B、C 四點所決定之長方體的對角線OR之方向角爲 α，β，γ 則 $\frac{x_0}{\cos\alpha}+\frac{y_0}{\cos\beta}+\frac{z_0}{\cos\gamma}=OR$

證明：1. 令A（a，0，0），B（0，b，0），C（0，0，c），因 α、β、γ 爲 $\overrightarrow{OR}$ 之方向角（圖4）

故 $\cos\alpha=\frac{0A}{OR}=\frac{a}{OR}$，$\cos\beta=\frac{0B}{OR}=\frac{b}{OR}$，

$$\cos\gamma=\frac{0C}{OR}=\frac{c}{OR}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

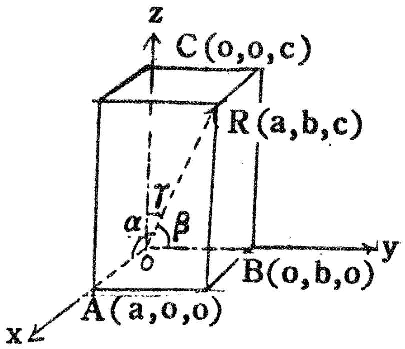
2. 平面E之方程式爲$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

因過點（x_0，y_0，z_0）故$\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}+\dfrac{z_0}{c}=1$ $\cdots\cdots\cdots(2)$

3. 於是由(1)(2)得

$$\frac{x_0}{\cos\alpha}+\frac{y_0}{\cos\beta}+\frac{z_0}{\cos\gamma}$$

$$=\frac{x_0}{\frac{a}{OR}}+\frac{y_0}{\frac{b}{OR}}+\frac{z_0}{\frac{c}{OR}}$$



（圖4）

$$=OR\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}\right)$$

利用引理3與引理4立即可得下列定理2。

定理2：

設x_0，y_0，z_0爲正常數，$0<\alpha$，β，$\gamma<\dfrac{\pi}{2}$且$\sum\cos^2\alpha=1$

則$\dfrac{x_0}{\cos\alpha}+\dfrac{y_0}{\cos\beta}+\dfrac{z_0}{\cos\gamma}$之最小值爲$\left(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

證明：由引理4知$\dfrac{x_0}{\cos\alpha}+\dfrac{y_0}{\cos\beta}+\dfrac{z_0}{\cos\gamma}=OR$

又由引理3知OR之最小值爲$\left(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

故$\dfrac{x_0}{\cos\alpha}+\dfrac{y_0}{\cos\beta}+\dfrac{z_0}{\cos\gamma}$之最小値爲$\left(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

(四)更一般化的結論：

由引理 4 知 $\frac{x_0}{\cos\alpha}+\frac{y_0}{\cos\beta}+\frac{z_0}{\cos\gamma}=OR$

故 $a=OR\cos\alpha=\left(\frac{x_0}{\cos\alpha}+\frac{y_0}{\cos\beta}+\frac{z_0}{\cos\gamma}\right)\cos\alpha$

$b=OR\cos\beta=\left(\frac{x_0}{\cos\alpha}+\frac{y_0}{\cos\beta}+\frac{z_0}{\cos\gamma}\right)\cos\beta$

$c=OR\cos\gamma=\left(\frac{x_0}{\cos\alpha}+\frac{y_0}{\cos\beta}+\frac{z_0}{\cos\gamma}\right)\cos\gamma$

由此給我們一個很重大的啟示，對一般情形欲求

$\frac{x_1}{\cos\alpha_1}+\frac{x_2}{\cos\alpha_2}+\cdots\cdots+\frac{x_3}{\cos\alpha_n}$（$x_i$ 均為正常數，$0<\alpha_1<\frac{\pi}{2}$，且 $\sum\cos^2\alpha_1=1$，$i=1.2\cdots\cdots n$）之最小值，可如下行之：

（為了簡便計，設 $\frac{x_1}{\cos\alpha_1}+\frac{x_2}{\cos\alpha_2}+\cdots\cdots+\frac{x_n}{\cos\alpha_n}=t$）

令 n 個正數 a_1，a_2，……，a_n 分別如下：

$a_1=t\cos\alpha_1$，$a_2=t\cos\alpha_2$，……，$a_n=t\cos\alpha_n$ 則

$a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2=t^2(\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cdots\cdots+\cos^2\alpha_n)=t^2$

$$\therefore\ t=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2}=\sqrt{\sum a_i^2},i=1,2,\cdots\cdots n$$

現欲求 $\sqrt{\sum a_i^2}$ 之最小值，再推一個式子，以備下面應用：

由 $a_i=t\cos\alpha_i$（$i=1,2,\cdots\cdots,n$）

得 $\sum\frac{x_i}{a_i}=\sum\frac{x_i}{t\cos\alpha_i}=\frac{1}{t}\sum\frac{x_i}{\cos\alpha_i}=\frac{1}{t}\times t=1$

故 $\sum\frac{x_i}{a_i}=1$（$i=1,2,\cdots\cdots\cdots,n$）

1.取正常數 ℓ_1，ℓ_2，……，ℓ_n 利用柯西不等式，得

$(\sum a_i^2)(\sum \ell_i^2) \geq [\sum(\ell_i\alpha_i)]^2$ ……………………………(1)

又 $[\sum(\ell_i a_i)][\sum \dfrac{x_i}{a_i}] \geq (\sum\sqrt{\ell_i x_i})^2$

因 $\sum \dfrac{x_i}{a_i} = 1$　故 $\sum(\ell_i a_i) \geq (\sum\sqrt{\ell_i x_i})^2$ ……………………(2)

由(1)(2)得　$(\sum a_i^2)(\sum \ell_i^2) \geq (\sum\sqrt{\ell_i x_i})^4$

故 $\sqrt{\sum a_i^2} \geq \dfrac{(\sum\sqrt{\ell_i x_i})^2}{\sqrt{\sum \ell_i^2}}$ （＊＊＊）

2. 當(1)式「＝」號成立時：$\dfrac{a_1}{\ell_1} = \dfrac{a_2}{\ell^2} = \cdots\cdots = \dfrac{a_n}{\ell_n}$

即 $a_1 : a_2 : \cdots\cdots : a_n = \ell_1 : \ell_2 : \cdots\cdots : \ell_n$ ……………………(3)

當(2)式「＝」號成立時：$\dfrac{\sqrt{\ell_1 a_1}}{\sqrt{\dfrac{x_1}{a_1}}} = \dfrac{\sqrt{\ell_2 a_2}}{\sqrt{\dfrac{x_2}{a_2}}} = \cdots\cdots = \dfrac{\sqrt{\ell_n a_n}}{\sqrt{\dfrac{x_n}{a_n}}}$

即 $\dfrac{a_1}{\sqrt{\dfrac{x_1}{\ell_1}}} = \dfrac{a_2}{\sqrt{\dfrac{x_2}{\ell_2}}} = \cdots\cdots\cdots = \dfrac{a_n}{\sqrt{\dfrac{x_n}{\ell_n}}}$

$\therefore a_1 : a_2 : \cdots\cdots : a_n = \sqrt{\dfrac{x_1}{\ell_1}} : \sqrt{\dfrac{x_2}{\ell_2}} : \cdots\cdots : \sqrt{\dfrac{x_n}{\ell_n}}$ ……(4)

由(3)(4)得 $\ell_1 : \ell_2 : \cdots\cdots : \ell_n = \sqrt{\dfrac{x_1}{\ell_1}} : \sqrt{\dfrac{x_2}{\ell_2}} : \cdots\cdots : \sqrt{\dfrac{x_n}{\ell_n}}$

$\therefore \ell_1^3 : \ell_2^3 : \cdots\cdots : \ell_n^3 = x_1 : x_2 : \cdots\cdots : x_n$

$\therefore \ell_1 : \ell_2 : \cdots\cdots : \ell_n = \sqrt[3]{x_1} : \sqrt[3]{x_2} : \cdots\cdots : \sqrt[3]{x_n}$ ………(5)

故 $\exists\, k > 0$，$\ni \ell_1 = \sqrt[3]{x_1 k}$，$\ell_2 = \sqrt[3]{x_2 k}$，……，$\ell_n = \sqrt[3]{x_n k}$

以之代入（＊＊＊）中得 $\sqrt{\sum a_i^2}$ 之最小值爲

$$\frac{(\sum\sqrt{x_i\sqrt[3]{x_i k}})^2}{\sqrt{\sum(\sqrt[3]{x_i k})^2}}=\frac{(\sum\sqrt{x_1^{\frac{4}{3}}})^2}{\sqrt{\sum\sqrt[3]{x_i})^2}}=\frac{(\sum x_i^{\frac{2}{3}})^2}{(\sum x_i^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}=(\sum x_i^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

故得下之定理3。

定理3：

設 x_i 爲正常數，$0<\alpha_i<\frac{\pi}{2}$ 且 $\sum\cos^2\alpha_i=1$，$i=1,2,\cdots\cdots n$

則 $\frac{x_1}{\cos\alpha_1}+\frac{x_2}{\cos\alpha_2}+\cdots\cdots+\frac{x_n}{\cos\alpha_n}$ 之最小值爲

$$(x_1^{\frac{2}{3}}+x_2^{\frac{2}{3}}+\cdots\cdots+x_n^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

定理3是一個非常一般化的結論，它不但涵蓋了定理2，而且也涵蓋了定理1，因爲 $\frac{p}{\cos\theta}+\frac{q}{\sin\theta}$ 可化爲 $\frac{p}{\cos\theta}+\frac{q}{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)}$ 而其中 $\cos^2\theta+\cos^2(\frac{\pi}{2}-\theta)=1$。

四、結語

本作品由探尋 $\frac{3}{\cos\theta}+\frac{2}{\sin\theta}$ 最小值的求法，發現凡是 $\frac{p}{\cos\theta}+\frac{q}{\sin\theta}$（p，q 爲正常數）均可線段化，因而求出對應之線段長的最小值就等於是求出該式的最小值。此種化抽象（三角函數值）爲直觀（線段長）的作法是本作品的一大特色。

更由此推廣到空間，推出引理4而得定理2（求 $\frac{x_0}{\cos\alpha}+\frac{y_0}{\cos\beta}+\frac{z_0}{\cos\gamma}$ 之最小值）並進而推出更一般化的結論而得定理3。引理4之出現是本作品的一項突破，因爲它的出現，不但建立了定理2，而且也使定理3能夠順利產生。然而引理4之發現乃是前面「線段化」觀

念的拓展。因此本作品，整個系列一脉相承，前後輝映，不但構成了一個優美完整的系統，而且也充分發揮了數學上歸納與演繹的精神。

五、參考資料

高中數學　　范傳坡等著　　數理出版公司

評語：1. 本件爲去年聯考考題之一的推廣，經由一相當聰慧的觀察而得到簡潔的解法。

2. 解法具創意。

3. 具有適當轉化問題而推廣的科學研究能力。

4. 表達力强。