平行五邊形

高中組數學科第二名

台灣省立新竹高中

作　　者：陳勇至　吳學晃
　　　　　吳鴻基　洪宇德

指導教師：黃　靜　卿

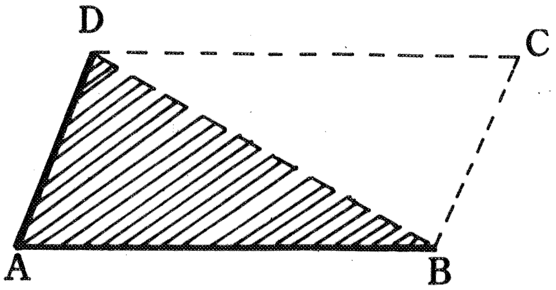
一、平行四邊形的回顧

在平面幾何的領域裡，平行四邊形，一直扮演很重要的角色。一般而言，它具有下列五點重要性質：

A_1：一凸四邊形爲平行四邊形之充要條件爲對角線互相平分，卽任一對角線被其他對角線分割而成之2段，長度比爲一常數（此常數爲1）。

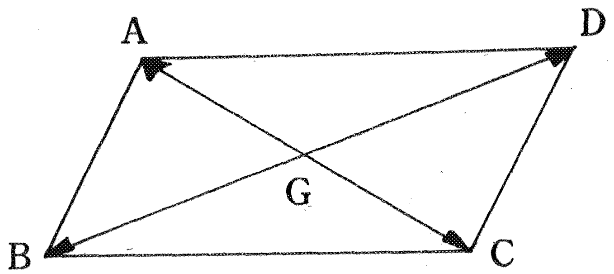
A_2：所有對角線長度之平方和與四邊長度平方和之比值爲一常數（此常數爲1）。

A_3：三點確立平行四邊形：確立方法如下



設A，B，D表不共線之3點，以$\overline{AD}$，$\overline{AB}$ 爲鄰邊，恰可展成一平行四邊形（如上圖）此平行四邊形稱爲 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AD}$ 確立之平行四邊形，面積 $|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}|$ 爲$\triangle ABD$ 面積之2倍。

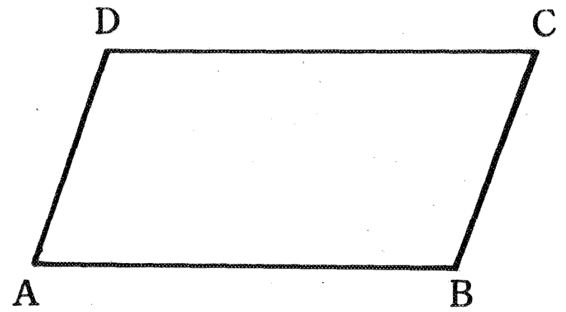
A_4：平行四邊形之重心G，在對角線之交點上，且$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{O}$。



A_5：重心到頂點之四線段，將平行四邊形分割成 4 個面積相等之三角形。

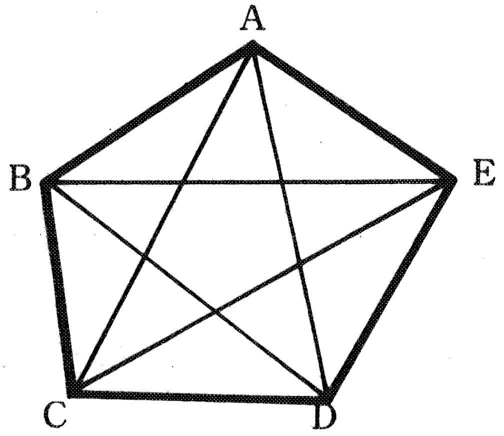
以上所有性質，可以說皆由平行四邊形之"平行"特性所引起。如何將這"平行"的特性，推廣到五邊形、六邊形、……甚至 n 邊形，而仍然保有類似 A_1 ，A_2 ，A_3 ，A_4 ，A_5 之性質，進而開創出新的領域，是令我們感到興趣的地方，不過限於時間，精力，我們先從平行五邊形著手。

二、平行五邊形的定義及其性質



一般來講，所謂的平行四邊形，指對邊平行之四邊形，不過以另外一角度看來，$\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 爲此四邊形不相鄰之 2 邊，順序連接此 2 邊端點的線段 $\overline{AB}$，$\overline{DC}$ 爲平行線段。又 $\overline{AB}$ 與 $\overline{DC}$ 也是不相鄰的 2 邊，順次連接此二邊端點的線段 $\overline{AD}$，$\overline{BC}$ 也是平行線段。按照這方法定義平行五邊形如下：

定義：設 ABCDE 表凸五邊形，對任一組不相鄰之 2 邊（如 $\overline{BC}$ 與 $\overline{ED}$）如果順次連接此二邊端點之線段（如 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CD}$）爲平行線段，稱此五邊形爲平行五邊行。



如上圖之五邊形ABCDE中

$\overline{BE} /\!/ \overline{CD}$（順次連接$\overline{BC}$與$\overline{ED}$）

$\overline{CA} /\!/ \overline{DE}$（順次連接$\overline{CD}$與$\overline{AE}$）

$\overline{DA} /\!/ \overline{CB}$（順次連接$\overline{DC}$與$\overline{AB}$）

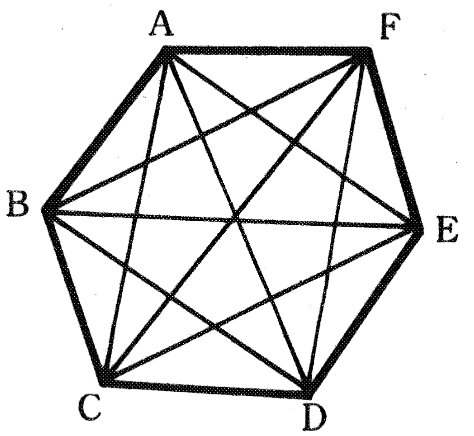
$\overline{EC} /\!/ \overline{AB}$（順次連接$\overline{EA}$與$\overline{CB}$）

$\overline{DB} /\!/ \overline{EA}$（順次連接$\overline{DE}$與$\overline{BA}$）

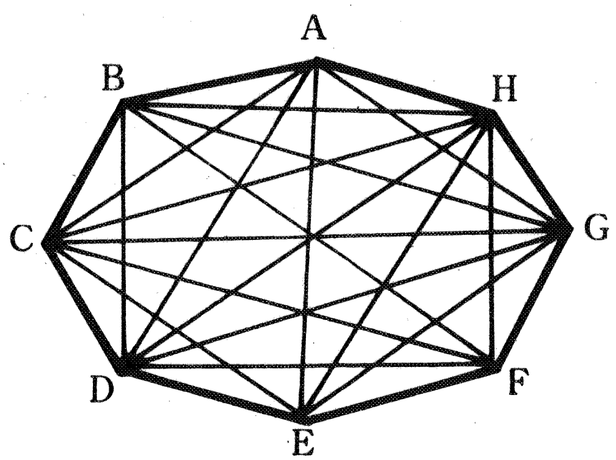
故ABCDE爲平行五邊形，

註(一)正五邊形爲平行五邊形之特例。除了正五邊行外，還有沒有其他的平行五邊形？如何求得一平行五邊形，是我們研究的重點。

(二)將此定義中，邊數可以推廣到六邊、七邊、八邊、……甚至一般之n邊（$n \geq 4$），可以定出“平行n邊形”的定義。



平形六邊形



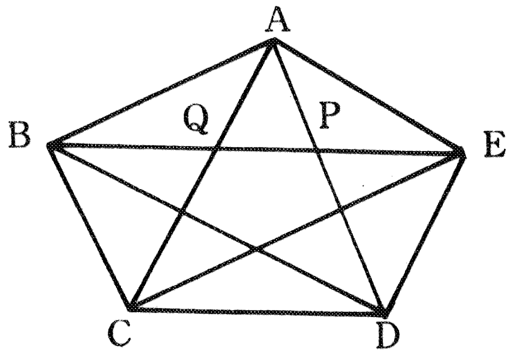
平形八邊形

B_1：平行五邊形任一對角線，被其他對角線分割而成之2段爲黃金分割。

B_1'：一凸五邊形，若每一對角線被其他對角線分割成2段比爲黃金分割比時，必爲平行五邊形。

B_2：平行五邊形所有對角線長度平方和爲5邊長度平方和之 $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 倍

B_3：三點確立平行五邊形



方法：①設B，C，D表不共線3點以$\overline{CD}$，$\overline{CB}$爲鄰邊展成一平行四邊形BCDP。

②在$\overrightarrow{PD}$之反射線上取一點A，使$\overline{AP}:\overline{PD}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}:1$

③過D作$\overline{AC}$之平行線交$\overleftrightarrow{BP}$於E ABCDE即爲所求。

B_4：若ABCDE爲平行五邊形，P，Q，R，S，T爲對角線交點（如圖）則$\overline{AS}$，$\overline{BT}$，$\overline{CP}$，$\overline{DQ}$，$\overline{ER}$ 五線交於一點G，且 $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{O}$

B_5：若G爲平行五邊形ABCDE之重心

則$\triangle GAB=\triangle GBC=\triangle GCD=\triangle GDE=\triangle GEA$

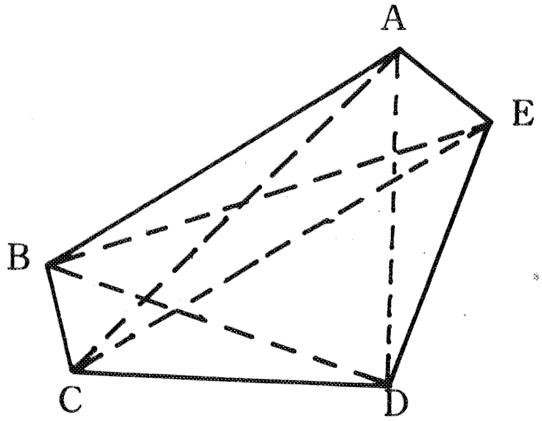
$=\frac{1}{5}$ ⬠ABCDE（面積相等）

三、正五邊與平行五邊形之比較

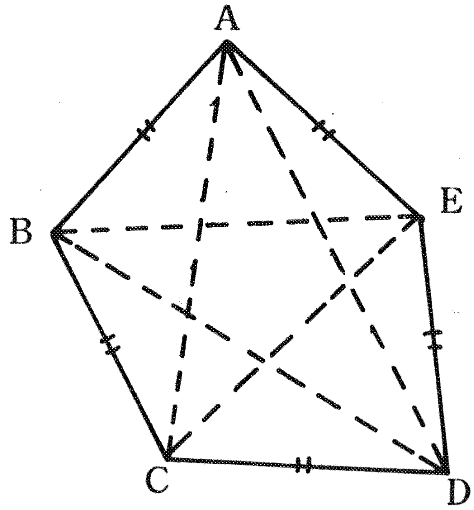
由第二單元的陳述，知平行五邊中之性質B_1，B_2，B_3，B_4，

B_5 實與平行四邊形中之 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5 相互呼應。因此我們可以斷定平行五邊形可以說是平行四邊形的推廣。除此以外，平行五邊形在幾何學上，還有什麼功能呢？它與正五邊形的關係如何？就平行五邊形定義看來，很明顯的正五邊形爲平行五邊形，但平行五邊形就不一定是正五邊形，而究竟怎樣的平行五邊形才是正五邊形呢？

依正五邊形的定義看來，正五邊形是等邊五邊形，也是等角五邊形。如下圖可看出等邊五邊形與等角五邊形都不一定是平行五邊形。不過等邊五邊形、等角五邊形、平形五邊形，這三種五邊形間有什麼關係呢？這一切都是本單元所要研究的問題。

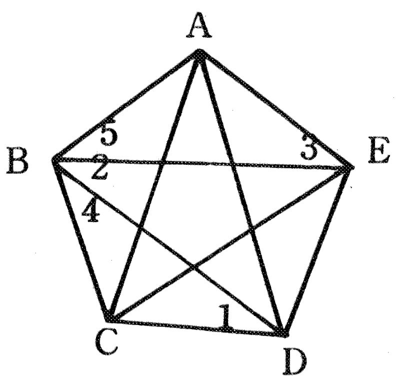


等角五邊形



等邊五邊形

C_1：若△BCD三邊比 $\overline{BC}:\overline{CD}:\overline{DB}=2:2:\sqrt{5}+1$ 則由 $\overrightarrow{CD}$ 與 $\overrightarrow{CB}$ 所展成之平行五邊形爲正五邊形



證明：令 $\angle BCD=\theta$

$$\cos\theta = \frac{2^2+2^2-(\sqrt{5}+1)^2}{2(2)(2)} = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \therefore \theta = 108^\circ$$

$$又\ \overline{BC}=\overline{CD}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overline{BD}$$

$$\overline{AE}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overline{BD}\ 且\ \overline{BE}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\overline{CD}$$

在△BCD與△AEB中

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 2 = \angle 3 \\ \overline{BD} = \overline{BE} \\ \overline{CD} = \overline{AE} \end{cases}$$

∴△BCD≅△BAE（S.A.S.）

∴$\angle EAB = \angle BCD = 108^\circ$ 且 $\overline{EA}=\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}$

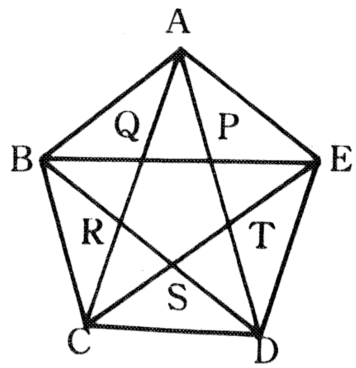
又$\angle 1 = \angle 4$，$\angle 3 = \angle 5$

∴$\angle ABC = 108^\circ$

同理 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}$ 且 $\angle EDC = \angle ABC = 108^\circ$

得ABCDE爲正五邊形

C_2：五邊相等之平行五邊形爲正五邊形



設ABCDE爲平行五邊形且 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EA}$

由 $\overline{AE}=\overline{BS}$ 且 $\overline{BS}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overline{BD}$

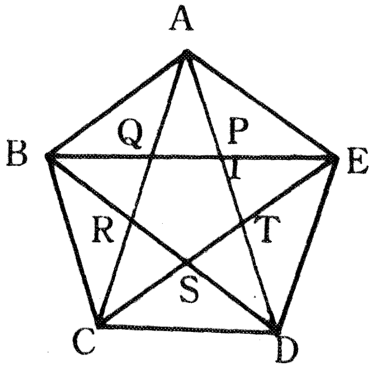
$$\therefore \overline{AE}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overline{BD}$$

$$\therefore \overline{BC}:\overline{CD}:\overline{DB}$$

$$=\overline{BC}:\overline{BC}:\frac{2}{\sqrt{5}-1}\overline{AE}=2:2:\sqrt{5}+1$$ 由C_1得

ABCDE爲正五邊形。

C_3：等角之平行五邊形爲正五邊形



設ABCDE爲平行五邊形且$\angle EAB=\angle ABC=\angle BCD=\angle CDE=\angle DEA=108^\circ$

由BCDP爲平行四邊形，$\angle BCD=108^\circ$ $\angle CBE=72^\circ$

$\therefore \angle 1=\angle CBE=72^\circ$

但EQCD亦爲平行四邊形且$\angle CDE=108^\circ$

$\therefore \angle BED=72^\circ$

$\therefore \overline{DE}=\overline{DP}$ 又 $\overline{DP}=\overline{BC}$

$\therefore \overline{BC}=\overline{DE}$ 同理可證 $\overline{BC}=\overline{AE}$

$\overline{CD}=\overline{AE}$， $\overline{CD}=\overline{AB}$

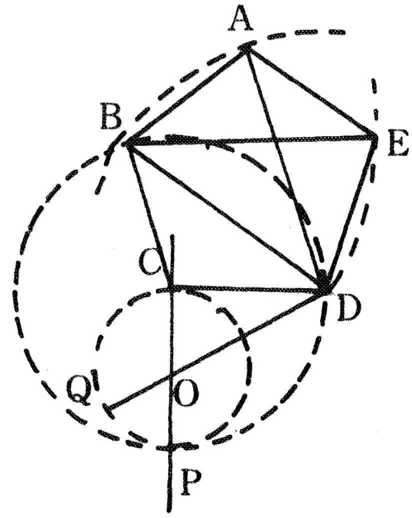
$\therefore \overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EA}$

由C_2知ABCDE爲正五邊形

C_4：五邊形中“平行”，“等邊”與“等角”等3種性質，只要具有其中之二，必3條件皆具有，而此時五邊形爲正五邊形。

應用：一般而言，正五邊形作圖方式很多，不過利用平行五邊形

之性質，可得到簡便方式，作一正五邊形，使其邊長爲已知線段 a



(1)以 a 爲直徑，作一圓O，CP爲直徑。

(2)以C爲圓心，a 爲半徑，作圓C。

(3)過C作圓O之切線，交圓C於D。

(4)連接$\overleftrightarrow{DO}$，$\overleftrightarrow{OD}$之反射線，交圓O於Q。

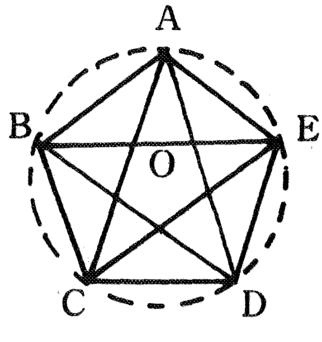
(5)以D爲圓心，$\overline{DQ}$爲半徑畫弧，交圓C於B。

(6)過B作$\overline{CD}$之平行線，且在$\overrightarrow{CD}$方向取E使$\overline{BE}=\overline{BD}$。

(7)過D作$\overline{CB}$之平行線且$\overrightarrow{CB}$方向取A使$\overline{DA}=\overline{DB}$。

(8)五邊形ABCDE爲正五邊形，邊長爲 a。

C_5：圓內接平行五邊形，爲正五邊形



設平行五邊形ABCDE有外接圓O

$\because \overline{BE} \parallel \overline{CD}$

$\therefore \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DE}$

$\therefore \overline{BC} = \overline{DE}$

同理$\overline{BC}=\overline{AE}$，$\overline{CD}=\overline{AB}$，$\overline{CD}=\overline{AE}$

$\therefore \overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EA}$

$\therefore$ ABCDE爲正五邊形

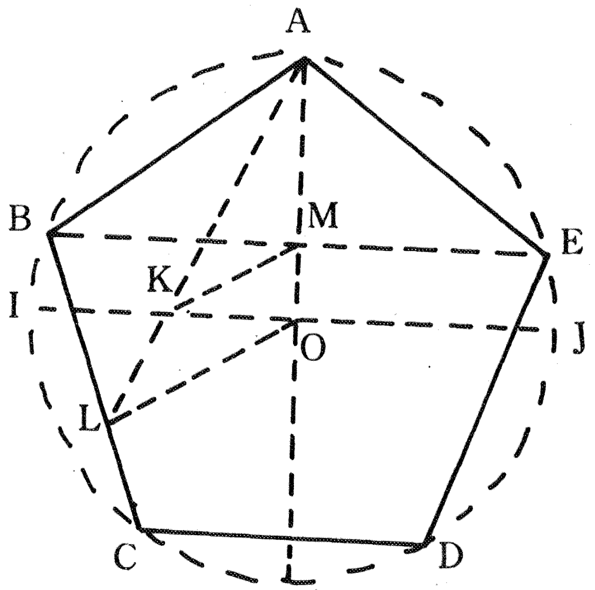
應用：過圓上一點，如何做圓內接正五邊形

由B_4中$\overline{AM}:\overline{MG}=10:2\sqrt{5}=\sqrt{5}:1$

得作法如下

(1)過A作互相垂直之二直徑AH，IJ。

(2)取OI中點K，連接$\overrightarrow{AK}$。



(3)在$\overrightarrow{KA}$反射線上取L使$\overline{KL}=\overline{KO}$。

(4)過K作$\overline{OK}$平行線，交$\overline{AO}$於M。

(5)過M作$\overline{AH}$垂線，交圓於B，E。

(6)以$\overline{AB}$爲一邊，即可做圓之內接正五邊形ABCDE。

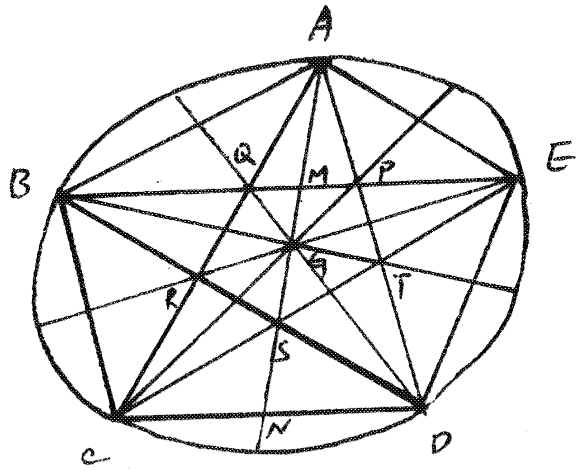
四、平行五邊形與橢圓內接五邊形面積之極值

平行五邊形除了與等邊五邊形，等角五邊形具有3角關係外，另外一項重要應用，便是橢圓內接五邊形面積極值之求法與作圖。

D_1：任何平行五邊形，必內接於一橢圓，且五邊形之重心即爲橢圓之對稱中心。

由五點決定一圓錐曲線之性質知恰有一錐線Γ，同時通過A

，B，C，D，E 5點。



又 $\overline{BE} /\!/ \overline{CD}$，故 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CD}$ 爲 Γ 之一組平行弦

連接 $\overleftrightarrow{AS}$ 交 $\overline{BE}$ 於 M，$\overline{CD}$ 於 N

∵ ABSE 爲平行四邊形 ∴ $\overline{BM} = \overline{ME}$

又 $\overline{BQ} = \overline{PE} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\ \overline{BE}$

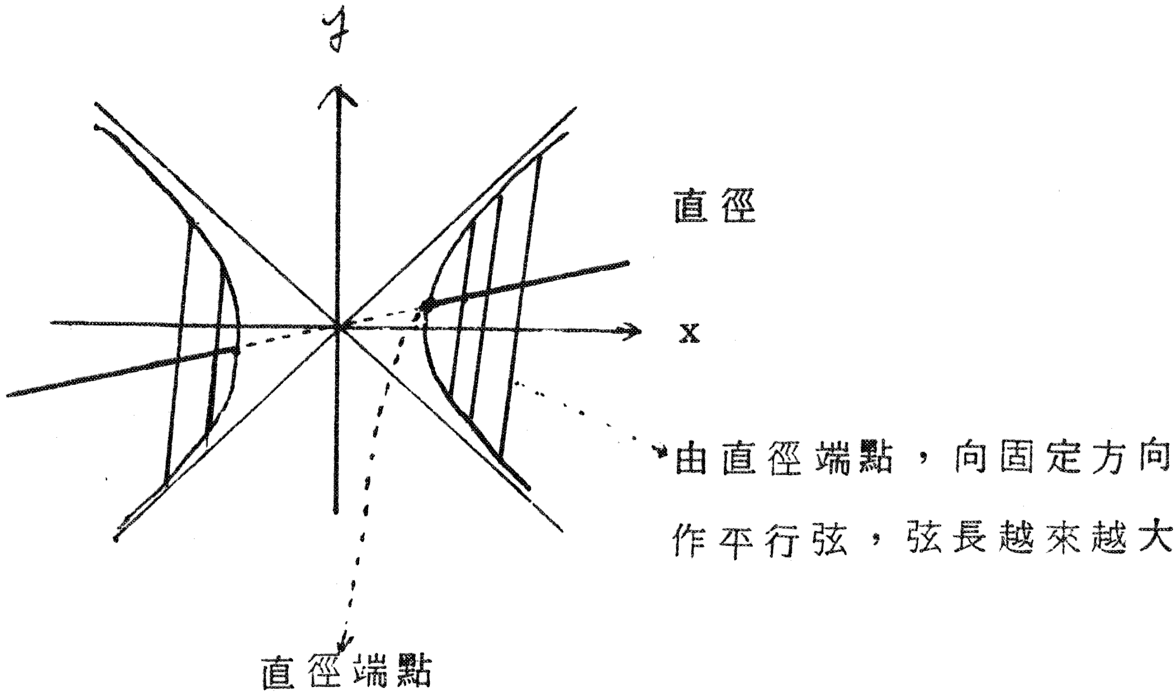
∴ $\overline{QM} = \overline{PM}$ 但 $\overline{BE} /\!/ \overline{CD}$

∴ $\overline{CN} = \overline{DN}$　即 M，N 分別爲 Γ 之平行弦 $\overline{BE}$，$\overline{CD}$ 之中點

又 A 在曲線上，∴ $\overleftrightarrow{AN}$ 爲錐線 Γ 之一直徑

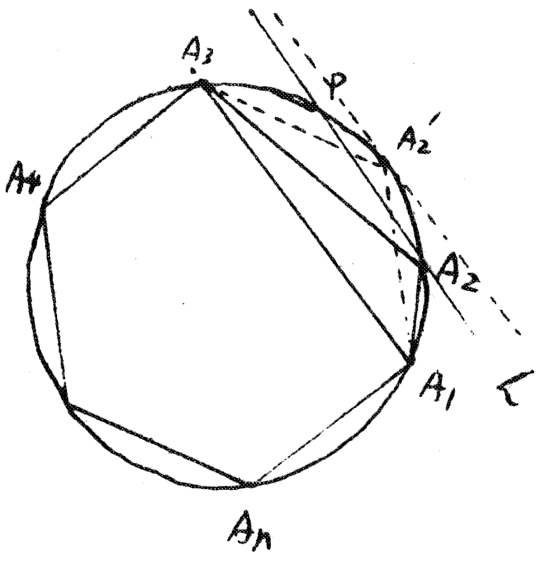
同理 $\overleftrightarrow{BT}$，$\overleftrightarrow{CP}$，$\overleftrightarrow{DQ}$，$\overleftrightarrow{ER}$ 皆爲 Γ 之直徑

直徑 $\overleftrightarrow{AN}$，$\overleftrightarrow{BT}$，$\overleftrightarrow{CP}$，$\overleftrightarrow{DQ}$，$\overleftrightarrow{ER}$ 之交點 G 即爲 Γ 之中心，亦即爲平行五邊形之重心 Γ 有對稱中心，故此錐線不可能是拋物線，又從雙曲線直徑端點，向同一方向作平行弦，弦長越來越大，（如圖）但 $\overline{CD} < \overline{BE}$ 故此錐線也不可能是雙曲線。因而過 A，B，C，D，E 之錐線爲橢圓。



D_2：圓內接 n 邊形中，以正 n 邊形面積最大

設 $A_1\ A_2\ A_3\cdots\cdots A_n$ 表圓 O 之所有 n 邊形中面積最大者。過 A_2 作 $\overline{A_1\ A_3}$ 之平行線 L，若 L 與圓 O 有 2 交點 A_2，P 取 $\overset{\frown}{A_2\ P}$ 中點 A'



得 $\triangle A_1\ A_2'\ A_3 > \triangle A_1\ A_2\ A_3$

$\therefore$ 多邊形 $A_1\ A_2'\ A_3\cdots\cdots A_n$ 面積 > 多邊形 $A_1\ A_2\ A_3\cdots\cdots A_n$

產生矛盾結果，故 L 必與圓 O 恰有一交點，卽 L 爲其切線由

$L \parallel \overleftrightarrow{A_2\ A_3}$ $\quad\therefore \overset{\frown}{A_1\ A_2} = \overset{\frown}{A_2\ A_3}$ $\quad\therefore \overline{A_1\ A_2} = \overline{A_2\ A_3}$

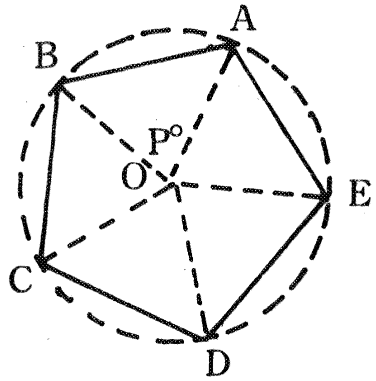
同理$\overline{A_2A_3}=\overline{A_3A_4}=\cdots\cdots=\overline{A_{n-1}A_n}=\overline{A_nA_1}=\overline{A_1A_2}$

$\therefore A_1A_2\cdots\cdots A_n$ 爲正 n 邊形

註：圓 $x^2+y^2=b^2$（ $b>0$ ）之內接五邊形，面積最大值爲

$$\frac{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}b^2$$

說明：$\pentagon$ABCDE面積$=5\cdot\triangle OAB=5\cdot\frac{1}{2}\times b\times b\times\sin 72^\circ$



$$=5\times\frac{1}{2}\times b^2\times\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$=\frac{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}b^2$$

D_3：橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（ $a>b>0$ ）之內接五邊形，面積最大

值爲$\frac{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}a\cdot b$而此時之五邊形必爲平行五邊形

證明：(1)設ABCDE表橢圓之內接正五邊形。

令A（ $a\cos\alpha$ ，$b\sin\alpha$ ）

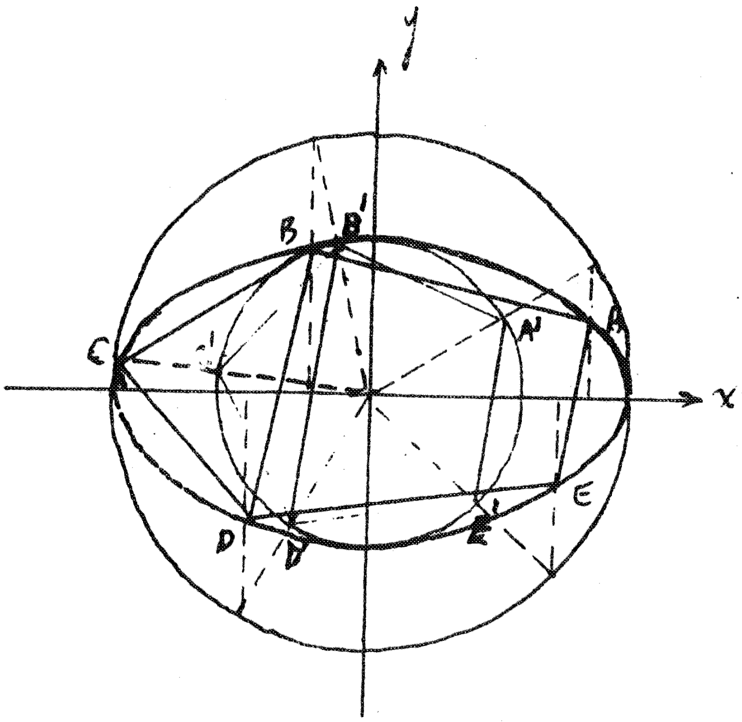
B（ $a\cos\beta$ ，$b\sin\beta$ ）

C（ $a\cos\gamma$ ，$b\sin\gamma$ ）

D（ $a\cos\delta$ ，$b\sin\delta$ ）

$E(a\cos\varepsilon，b\sin\varepsilon)$

而在圓 $x^2+y^2=b^2$ 上取五點 A'，B'，C'，E' 如下



$A'=(b\cos\alpha，b\sin\alpha)$

$B'=(b\cos\beta，b\sin\beta)$

$C'=(b\cos\gamma，b\sin\gamma)$

$D'=(b\cos\delta，b\sin\delta)$

$E'=(b\cos\varepsilon，b\sin\varepsilon)$

則⬠ABCDE

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a\cos\alpha & b\sin\alpha \\ a\cos\beta & b\sin\beta \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a\cos\beta & b\sin\beta \\ a\cos\gamma & b\sin\gamma \end{vmatrix}\right.$$

$$+\begin{vmatrix} a\cos\gamma & b\sin\gamma \\ a\cos\delta & b\sin\delta \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a\cos\delta & b\sin\delta \\ a\cos\varepsilon & b\sin\varepsilon \end{vmatrix}$$

$$\left.+\begin{vmatrix} a\cos\varepsilon & b\sin\varepsilon \\ a\cos\alpha & b\sin\alpha \end{vmatrix}\right|$$

$$=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} b\cos\alpha & b\sin\alpha \\ b\cos\beta & b\sin\beta \end{vmatrix}+\right.$$

$$+\begin{vmatrix} b\cos\beta & b\sin\beta \\ b\cos\gamma & b\sin\gamma \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b\cos\gamma & b\sin\gamma \\ b\cos\delta & b\sin\delta \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} b\cos\delta & b\sin\delta \\ b\cos\varepsilon & b\sin\varepsilon \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b\cos\varepsilon & b\sin\varepsilon \\ b\cos\alpha & b\sin\alpha \end{vmatrix}$$

$$=\frac{a}{b}\pentagon A'B'C'D'E'$$

但$A'B'C'D'E'$爲圓$x^2+y^2=b^2$之內接五邊形，

故其面積之最大值爲$\dfrac{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}b^2$

$\therefore$ ABCDE面積之最大值爲$\dfrac{a}{b}\left(\dfrac{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}b^2\right)$

$$=\frac{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}ab$$

(2)又當ABCDE面積最大時，$A'B'C'D'E'$必爲正五邊形此時$\overrightarrow{AE'}\parallel\overrightarrow{B'D'}$

$\therefore(b(\cos\varepsilon-\cos\alpha),b(\sin\varepsilon-\sin\alpha))\parallel$
$(b(\cos\delta-\cos\beta),b(\sin\delta-\sin\beta))$

$\therefore(a(\cos\varepsilon-\cos\alpha),b(\sin\varepsilon-\sin\alpha))\parallel$
$(a(\cos\delta-\cos\beta),b(\sin\delta-\sin\beta))$

$\therefore\overrightarrow{AE}\parallel\overrightarrow{BD}$　$\therefore\overline{AE}\parallel\overline{BD}$

同理可證$\overline{AB}\parallel\overline{CE}$，$\overline{AC}\parallel\overline{DE}$，$\overline{BC}\parallel\overline{AD}$，$\overline{CD}\parallel\overline{BE}$

$\therefore$ ABCDE爲平行五邊形。

D_4：所有橢圓之內接平行五邊形，面積爲一定值。（見圖D_3）

證明：設ABCDE爲其中一平行五邊形，在圓$x^2+y^2=b^2$上取一五邊形$A'B'C'D'E'$，方法如下

當 $\begin{cases} A(a\cos\alpha, b\sin\alpha) \\ B(a\cos\beta, b\sin\beta) \\ C(a\cos\gamma, b\sin\gamma) \\ D(a\cos\delta, b\sin\delta) \\ E(a\cos\varepsilon, b\sin\varepsilon) \end{cases}$ 時 $\begin{cases} A'=(b\cos\alpha, b\sin\alpha) \\ B'=(b\cos\beta, b\sin\beta) \\ C'=(b\cos\gamma, b\sin\gamma) \\ D'=(b\cos\delta, b\sin\delta) \\ E'=(b\cos\varepsilon, b\sin\varepsilon) \end{cases}$

因⬠ABCDE是平行五邊形，故 $\overline{AE} /\!/ \overline{BD}$ $\quad\therefore \overline{AE} /\!/ \overline{BD}$

$\therefore (a(\cos\varepsilon-\cos\alpha), b(\sin\varepsilon-\sin\alpha)) /\!/$
$(a(\cos\delta-\cos\beta), b(\sin\delta-\sin\beta))$

$\therefore (b(\cos\varepsilon-\cos\alpha), b(\sin\varepsilon-\sin\alpha)) /\!/$
$(b(\cos\delta-\cos\beta), b(\sin\delta-\sin\beta))$

$\therefore \overrightarrow{A'E'} /\!/ \overrightarrow{B'D'}$

同理 $\overline{A'C'} /\!/ \overline{D'E'}$，$\overline{C'E'} /\!/ \overline{A'B'}$

可知⬠A′B′C′D′E′爲平行五邊形

又由 D_3 (1)中知⬠ABCDE

$$=\frac{a}{b}⬠A'B'C'D'E'=\frac{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}ab$$

∴橢圓之中任意內接五邊形的面積皆爲 $\dfrac{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}ab$

D_5：橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 之內接正五邊形並不存在

設 $A(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$ $\quad B(a\cos\beta, b\sin\beta)$
$C(a\cos\gamma, b\sin\gamma)$ $\quad D(a\cos\delta, b\sin\delta)$
$E(a\cos\varepsilon, b\sin\varepsilon)$ $\quad 0\le\alpha<\beta<\gamma<\delta<\varepsilon<2\pi$

表橢圓之內接正五邊形

∴ABCDE爲平行五邊形

如 D_3 中所述，A′，B′，C′，D′，E′爲圓 $x^2+y^2=b^2$ 之內接正五邊形

$\therefore \beta-\alpha=\gamma-\beta=\delta-\gamma=\varepsilon-\delta=72^\circ$ ……………… ①

但 $\overline{OA}=\overline{OB}$

$\therefore a^2\ \cos^2\ \alpha+b^2\ \sin^2\ \alpha=a^2\ \cos^2\ \beta+b^2\ \sin^2\ \beta$

$\therefore a^2\ \cos^2\ \alpha+b^2\ (\ 1-\cos^2\ \alpha\ )$

$\quad =a^2\ \cos^2\ \beta+b^2\ (\ 1-\cos^2\ \beta\ )$

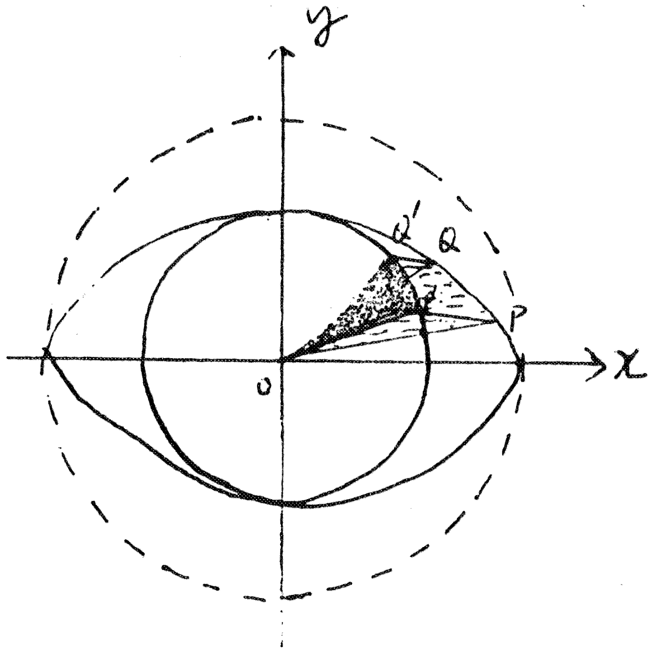
$\therefore (\ a^2-b^2\ )(\ \cos^2\ \alpha-\cos^2\ \beta\ )=0$

$\therefore \cos^2\ \alpha=\cos^2\ \beta$

$\therefore \alpha=\beta$ 或 $\alpha+\beta=\pi$ ……………………………………②

①與②相矛盾，故假設錯誤。

D_6：從橢圓中心到內接平行五邊形之頂點，將橢圓面積 5 等分



(1)設 P (a cos p ，b sin p)

Q (a cos q ，b sin q)爲橢圓

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上任 2 點

則 $P'=(\ b\cos p\ ,\ b\sin p\ )$

$Q'=(\ b\cos q\ ,\ b\sin q\ )$

爲 P，Q 對應在圓 $x^2+y^2=b^2$ 之 2 點

$$\triangle OPQ=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} a\cos p & b\sin p \\ a\cos q & b\sin q\end{vmatrix}\right\|$$

$$=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} b\cos p & b\sin p \\ b\cos q & b\sin q\end{vmatrix}\right\|$$

$$=\frac{a}{b}\triangle OP'Q'$$

同理，若將橢圓上連接P，Q兩點之弧、相多等分、等分點為M_1，M_2，……M_n，對應到圓 $x^2+y^2=b^2$ 上之點為M_1'，M_2'，……，M_n'

則橢圓上，扇形OPQ之面積

$$=\lim_{n\to\infty}〔\triangle OPM_1+\triangle OM_1M_2+\cdots\cdots+\triangle OM_nQ〕$$

$$=\frac{a}{b}\lim_{n\to\infty}〔\triangle OP'M_1'+\triangle OM_1'M_2'+\cdots\cdots+\triangle OM_n'Q'〕$$

$=\frac{a}{b}$扇形$OP'Q'$面積

(2)若ABCDE為橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上之內接平行五邊行

A'，B'，C'，D'，E'為對應到 $x^2+y^2=b^2$ 上之點

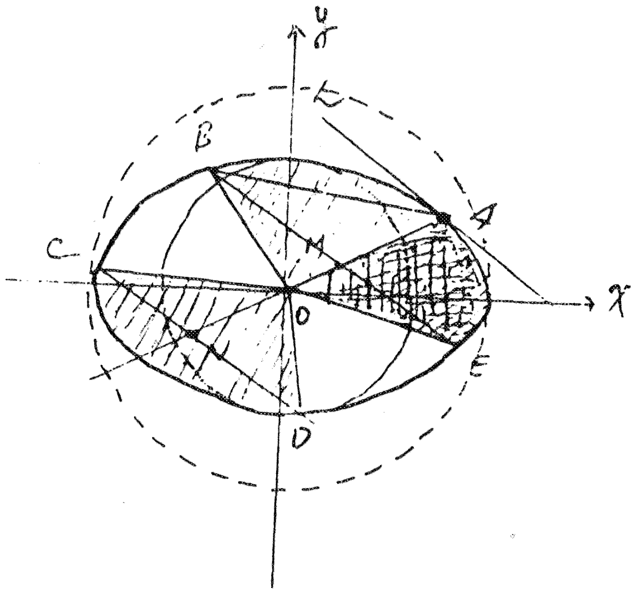
因$A'B'C'D'E'$為正五邊形

故扇形$OA'B'$＝扇形$OB'C'$面積＝扇形$OC'D'$＝扇形$OD'E'$＝$OE'A'$面積。

由(I)知橢圓上

扇形OAB＝扇形OBC＝扇形OCD＝扇形ODE＝扇形OEA。

D_7：過橢圓上任一點，如何將橢圓面積5等分



(1)連接$\overleftrightarrow{AO}$。

(2)在$\overline{OA}$取一點M，$\overrightarrow{OA}$反射上取一點N使$\overline{AM}:\overline{MO}:\overline{ON}$
$=10:2\sqrt{5}:5+3\sqrt{5}$

(3)過A作橢圓之切線L。

(4)過M作L之平行線交橢圓於B，E，過N作L之平行線交橢圓於C，D。

(5)連接$\overline{OA}$，$\overline{OB}$，$\overline{OC}$，$\overline{OD}$，$\overline{OE}$即爲所求。

五、推廣

由(四)之敍述，尙可得以下三點推廣

(一)橢圓內接n邊形以平行n邊形面積最大。

(二)橢圓外切n邊形以平行n邊形面積最小。

(三)橢圓中心到平行n邊形交點之線段，將橢圓分割成n個面積相等之區域。

六、研究心得

當我們在研究平行五邊形及橢圓時，發現星球運轉也略呈橢圓，爲了徹底研究橢圓的定義及其應用，我們查閱了不少有關天文、物理書籍，起初我們是發現行星運轉的軌道，呈現橢圓形，又發現克卜勒

定律也談到星球運轉，爲了追求應用，我們遂將研究方向轉向克卜勒的橢圓應用，但後來發現我們所研究的橢圓核心（正中心）與克卜勒的橢圓核心（焦點之一）不同位置，即其所劃分的弧形成的不規則扇形的面積與我們平行五邊形所分割的面積，雖同比例，但只因核心不同點而有所差別，遂放棄了這方面的研究，再轉向天文科學的另一面「太空」，爲了將來更遠的發展，人類不免要到外太空去尋找更多適應的空間，而欲達此一目的，其中間媒介一太空船（組織）其形體暫定爲橢圓環狀，那麼它的中心母體所牽制的幾個子體，其運輸系統，當應以我們所研究的橢圓平行 n 邊形作法，其途徑最簡捷、便利，但又因我們能力有限，無法知道將來是否眞有環狀構造，於是不敢肯定此一應用，接著我們又想到將來的建築設計，或許也有關聯吧！因爲它的面積及所成立的條件。我們可以將此一研究成果推廣，利用平行 n 邊形所求的結果及定義，應該可以利用在往後數學概念的加強及其應用，尙可利用向量及空間平面的關係來加強我們對世界的認識，及數學奧妙的領悟。

評語：1. 本件由平行四邊形諸性質之引導定義平行五邊形並導出許多有意思的性質，具創意。

2. 知道如何提出有意義的問題，並解決之。

3. 具系統性研究能力。

4. 表達清楚。