

以高中數學探討星球運行與其運行的

實驗與電腦模擬

高中組物理科第三名

臺灣省立花蓮高級中學

作者：賴慶智、郭晉魁

葉書中、周南光

指導教師：翁新建

一、研究動機

在高中物理星球運行中曾提及刻卜勒的三定律如下三點：

(一)某行星繞恒星的軌道爲橢圓。

(二)某星球在橢圓軌道中等時距掃過等面積。

(三)諸星繞同一母星，各星球的 $\frac{R^3}{T^2}$ 保持定值。(R 是軌道半徑， T 是運行周期) 但是並未對三定律的來源，做一來龍去脈的推演與介紹。以致吾人無法了解，基於此，使得我們對於星球運行爲何會如此發生了興趣，進而以所學的數學及物理知識，對星球的運行加以探討及模擬。

二、研究計劃

我們依照所想知道的一行星與一恆星，一行星與多恆星或是多行星與一恆星的運行關係提出三個探討計劃：

(一)以數理觀念解析星球運行問題。

(二)以電腦模擬行星運行。

(三)以實體模擬行星運行。

※一行星與多恆星或多行星與一恆星在我們模擬時發現由於變因太多，電腦模擬部分有圖形參考亦無法得出一規律性，故我們只探討一行星與一恆星的運動。

(一)以數理觀念解析星球運行

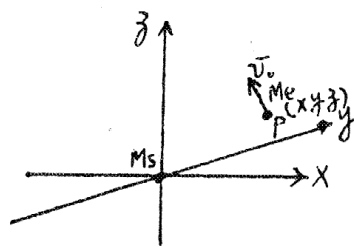
假設萬有引力定律 $\frac{GMm}{R^2}$ 用於相距很遠的物體是正確無誤，而高中的解析幾何也正確，擬定探討過程如下：

1. 星球繞恒星是否真正為橢圓，而造成橢圓的原因何在？
2. 星球運行時，週期與軌道半徑有何關係。（刻卜勒第三定律是否正確）
3. 星球運行時所掃過之面積與所歷時間有何關係？（刻卜勒第二定律是否正確）
4. 行星的機械能與運行軌道關係。
5. 星球運行軌道的預測。

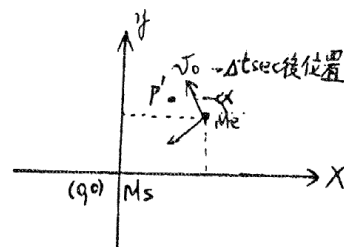
探討 1：星球運行是否真正為橢圓。

假想過程——若某恒星質量 M_s ，在空間上一點（為了方便往後定其於空間座標的原點）及一質量為 M_e 的行星於座標中 (x, y, z) 的 P 點，正以速度 \vec{V}_0 運行， M_s 與 M_e 互相之萬有引力 $\vec{F} = \frac{G M_e M_s}{x^2 + y^2 + z^2}$ 而 \vec{F} 方向在 $M_e M_s$ 的連線上，由於 M_e, M_s 連線與 \vec{V}_0 交於 P 點，即 \vec{V}_0 和 \vec{PO} （即 \vec{F} 方向）構成一平面，故吾人可將空間座標轉成平面座標來對 M_e 的運行加以解析

(1)



(2)



如上圖(2)令 M_s 在 $(0, 0)$ ， M_e 在 (x, y) ，出發瞬間 M_e 受作

用力 $\vec{F} = \frac{G M_e M_s}{x^2 + y^2} (\vec{p0})$ ， M_e 的加速為

$$\vec{a}_x = \frac{G M_s}{x^2 + y^2} \cdot \frac{-x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-G M_s x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{a}_y = \frac{G M_s}{x^2 + y^2} \cdot \frac{-y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{-G M_s y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

M_e 的速度為： $\vec{V}_x = \vec{V}_x = V_o \cdot \cos \alpha$, $\vec{V}_y = V_o \cdot \sin \alpha$

Δt 秒後到達 P' 點， M_e 的位置 $\left\{ \begin{array}{l} \vec{x}' = \vec{x} + \vec{V}_x \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a}_x (\Delta t)^2 \\ \vec{y}' = \vec{y} + \vec{V}_y \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a}_y (\Delta t)^2 \end{array} \right.$

加速度 $\vec{a}' = \frac{G M_s}{x'^2 + y'^2} (\vec{p}, 0)$ M_e 的速度 $\left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_x' = \vec{V}_x + \vec{a}_x \Delta t \\ \vec{V}_y' = \vec{V}_y + \vec{a}_y \Delta t \end{array} \right.$

M_e 的受力 $\vec{F} = \frac{G M_e M_s}{x'^2 + y'^2} (\vec{p}, 0)$ ，同理再經 Δt 秒 ($\Delta t \Rightarrow 0$)

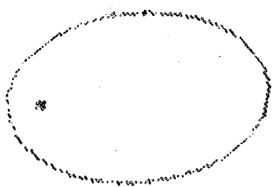
則 M_e 移到 P'' 點則位置 $\left\{ \begin{array}{l} \vec{x}'' = \vec{x}' + \vec{V}_x' \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a}'_x (\Delta t)^2 \\ \vec{y}'' = \vec{y}' + \vec{V}_y' \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a}'_y (\Delta t)^2 \end{array} \right.$ 如此

不斷的找出下一個位置的所在即可描出 M_e 的軌跡。

因此我們將其寫成電腦程式，並就以 M_e 代表地球， M_s 代表太陽，將這描點的工作交給電腦處理，結果得到下頁之圖表。

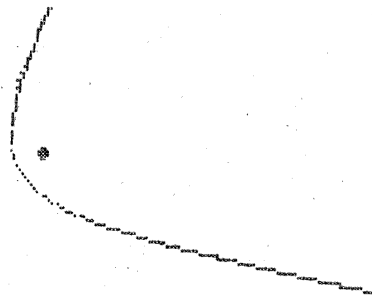
ㄅ

MS=1.99E+30 kg
Ro=5E+11 m
Vo=15000 m/sec
EG=-9.14736682E+33 joule
TH=140



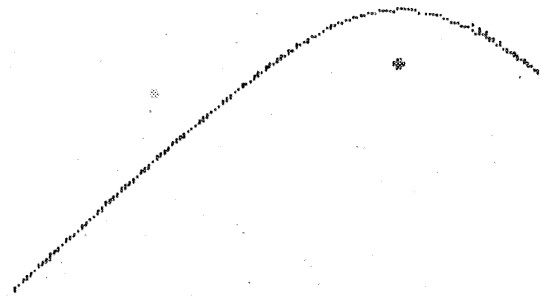
ㄆ

MS=1.99E+30 kg
Ro=5E+11 m
Vo=30000 m/sec
EG=1.10351332E+34 joule
TH=160



П
 $M_S = 1.99E+30 \text{ kg}$
 $R_0 = 5E+11 \text{ m}$
 $V_0 = 17000 \text{ m/sec}$
 $EG = -7.23376681E+33 \text{ joule}$
 $TH = 150$

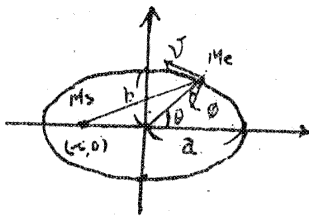
C
 $M_S = 1.99E+30 \text{ kg}$
 $R_0 = 5E+11 \text{ m}$
 $V_0 = 30000 \text{ m/sec}$
 $EG = 1.10351332E+34 \text{ joule}$
 $TH = 150$



而經測定發現圖々々就是橢圓，並依比例測之 M_s 恰在集點。

※圖П C造成原因容在後推導。

導證部分：若假設星球運行軌跡是橢圓，而且 M_s 在一焦點上如



圖若橢圓參數方程式為 $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$

(a 是半長軸， b 是半短軸)

c 為中心到焦點之距，離心率是 $\frac{c}{a}$ ，而 M_s 在 $(-c, 0)$ ，因為軌跡上一點的瞬時速在切線方向，此時 M_e 於 $P(a \cos \theta,$

$b \sin \theta)$ 處，所以此時 M_e 的加速度 $a = \frac{G M_s}{(a \cos \theta + c)^2 + (b \sin \theta)^2}$

$$= \frac{G M_s}{a^2 (1 + e \cos \theta)^2}$$

若 M_e 的軌道法線方向與 M_s 及 M_e 連線夾 ϕ 則

$$\cos \phi = \frac{b}{a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}}$$

(證明)，所以得 M_e 法線方向之加速度 a_N

$$a_N = a \cos \phi = \frac{G M_s b}{a^3 (1 + e \cos \theta)^2 \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}}$$

由於此點之曲率半徑 R

$$R = \frac{a^3 (1 - e^2 \cos^2 \theta)^{3/2}}{b}$$

$$\text{由 } R = \frac{V^2}{a_N} = \frac{a^3 (1 - e^2 \cos^2 \theta)^{3/2}}{b} = \frac{a^3 (1 + e \cos \theta)^2 \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}}{G M_s b}$$

$$\rightarrow V^2 = \frac{G M_s (1 - e \cos \theta)}{a (1 + \cos \theta)}$$

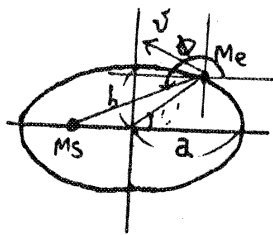
$$\text{所以 } V = \sqrt{\frac{G M_s (1 - e \cos \theta)}{a (1 + e \cos \theta)}}, \text{ 因此得到要使此星繞 } M_s$$

$$\text{能橢圓運動其必備之 } V = \sqrt{\frac{G M_s (1 - e \cos \theta)}{a (1 + e \cos \theta)}} \text{。而此速}$$

是否完全由萬有引力所造成與支配呢？因此吾人可由速度對位置之函數推求加速度對位置的函數來加以確認。

如圖加速度 a' 之方向為 $(-c - a \cos \theta', b \sin \theta')$ 令與 x 軸正向夾角 ϕ 。

$$\text{所以 } \cos \phi = \frac{-a (e + \cos \theta')}{\sqrt{(c + a \cos \theta')^2 + b^2 \sin^2 \theta'}}$$



$$= \frac{-a (e + \cos \theta')}{a (1 + e \cos \theta')} = \frac{-(e + \cos \theta')}{(1 + e \cos \theta')}$$

$$\sin \phi = \frac{-b \sin \theta'}{\sqrt{(c + a \cos \theta')^2 + b^2 \sin^2 \theta'}} = \frac{-b \sin \theta'}{a (1 + e \cos \theta')}$$

若此時 M_e 之速度 $V = \sqrt{\frac{GM_s(1 - e \cos\theta')}{a(1 + e \cos\theta')}}$ 將其投影在 xy

$$V_x = \sqrt{\frac{GM_s}{a}} \cdot \frac{-\sin\theta'}{1 + e \cos\theta'}$$

軸上得到 { (證明如附錄 3)

$$V_y = \sqrt{\frac{GM_s}{a}} \cdot \frac{b \cos\theta'}{a(1 + e \cos\theta')}$$

由於將速度在位置變化 $\Delta d \rightarrow 0$ ， $\frac{\lim \Delta V}{\Delta \rightarrow \Delta d}$ 即代表單位位移內之速度變化量 ($\Delta V = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} V(d)$) 而速度的倒數即可代表一

單位位移所須的時間也就是 $a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} V \frac{1}{V}$ 而所得

是 a 對位置的函數。

$$\begin{cases} ax' = \frac{GM_s}{a^2} \cdot \frac{\cos\theta' + e}{(1 + e \cos\theta')^3} \\ a'y = \frac{GM_s}{a} \cdot \frac{b \sin\theta'}{a(1 + e \cos\theta')^3} \end{cases}$$

$$\text{由 } a' = \sqrt{a'^2_x + a'^2_y} = \frac{GM_s}{a^2} \cdot \frac{1}{(1 + e \cos\theta')^2}$$

得 a' 對位置方程與前假設相同，所以由此可確定行星的橢圓軌跡，乃由萬有引力所造成，所以刻卜勒第一定律成立，但此星

球的速度與位置函數關係須為 $V = \sqrt{\frac{GM_s(1 - e \cos\theta)}{a(1 + e \cos\theta)}}$ 且

由能量觀念知此星 M_e 的機械能 E 機

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} M_e V^2 + \left(-\frac{G M_s M_e}{a(1+e \cos \theta)} = \frac{1}{2} M_e \frac{G M_s (1-e \cos \theta)}{a(1+e \cos \theta)} - \frac{G M_s M_e}{a(1+e \cos \theta)} \right) \\
 &= -G M_s M_e \left(\frac{-1+e \cos \theta}{2a(1+\cos \theta)} + \frac{2}{2a(1+e \cos \theta)} \right) = \frac{-G M_s M_e}{2a}
 \end{aligned}$$

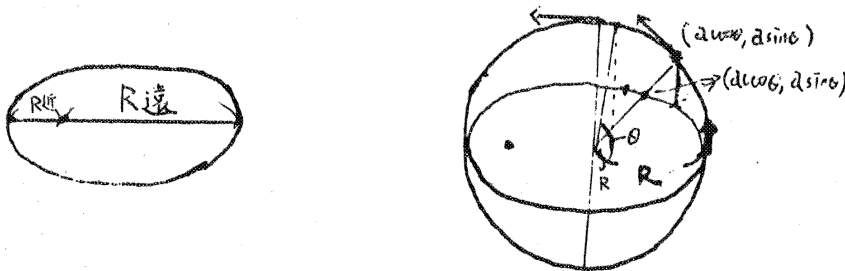
由此可以確認橢圓軌道上任一點的機械能守恒必為負值。

結論：當星球的 E 機 < 0 時其軌道為橢圓，而初速度的方向不同，橢圓的離心率 e 亦就不同。

探討 2：星球運行的周期與軌道半徑 R 的關係。

由探討 1 知星球運行為橢圓而恒星在焦點上，若定運行

軌道半徑 R ， $R = \frac{R_{\text{近恒星}} + R_{\text{遠恒星}}}{2}$ 恰為半長軸



如圖若行星做橢圓運動，半長軸為 R ，今以 R 為半徑做一大圓將橢圓投影到大圓上，所以當大圓上投影繞一圈的費時 (T) 即橢圓繞一圈的周期 (T) 如果行星在橢圓上座標。是為 $(R \cos \theta, b \sin \theta)$ 其在圓上的投影座標為 $(R \cos \theta, R \sin \theta)$ ，而影子在大圓上經 $\Delta t \rightarrow 0$ 所走的路徑是 $\Delta S = R, \Delta \theta$ ，在橢圓上時速度 V

$$= \sqrt{\frac{G M_s (1-e \cos \theta)}{R(1+e \cos \theta)}} \text{ 投影到圓上速度 } V' = \sqrt{\frac{G M_s}{R}}$$

• $\frac{1}{1 + e \cos \theta}$ 而 $\frac{1}{V'}$ 相當於單位位移，所須時間，所以

由 $\frac{1}{V'} \alpha s$, $t = \sum_{R, \Delta \theta} \frac{1}{V'}$ 相當於時間對位置的函數，

$$\text{所以 } t = \int \frac{1}{V'} a R \theta = \sqrt{\frac{R}{G M_s}} (R \theta + R \theta \sin \theta)$$

$$\Rightarrow t = \frac{R^{3/2} \theta + R^{3/2} \theta \sin \theta}{\sqrt{G M_s}}$$

$$\text{而繞一圈 } \theta \text{ 由 } 0 \rightarrow 2\pi \text{ 得周期 } T = \frac{R^{3/2} \cdot 2\pi}{\sqrt{G M_s}} \Rightarrow \frac{T}{R^{3/2}}$$

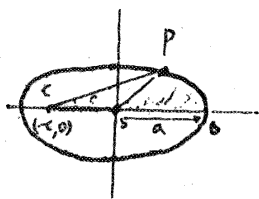
$$= \frac{2\pi}{\sqrt{G M_s}} \Rightarrow \frac{R^3}{T^2} = \frac{G M_s}{4\pi^2} \Rightarrow \frac{R^3}{T^2} = K \quad (K \text{ 是常數})$$

結論：行星運行若半徑 R ，週期 T 則 $\frac{R^3}{T^2} = \frac{G M_s}{4\pi^2}$ ，所以若諸行星繞同一母星 M_s 則諸行星的 $\frac{R^3}{T^2}$ 皆相等，故刻卜勒第三定律成立。

探討 3：星球運行所掃面積與歷時關係。

由探討 2 中吾人得知時間對位置之函數

$$t = \frac{1}{\sqrt{G M_s}} (R^{3/2} \theta + R^{3/2} e \sin \theta)$$



$$= \frac{2}{\sqrt{R G \sin \theta}} (\frac{1}{2} R^2 \theta + \frac{1}{2} R^2 e \sin \theta) \quad (a=R)$$

若 t 由 $\theta = 0$ 開始計起，所以角度由 $0 \rightarrow \theta$ ，所掃過的面積為斜線部份，令 t 時行了 θ ($\theta \Rightarrow 0$)，故面積 (A) = $\triangle C P S$ 面積 + 橢圓扇形面積 ($S O P$)

$$\text{由 } t = \frac{2}{\sqrt{a G M_s}} \left(\frac{1}{2} a^2 \theta + \frac{1}{2} e \sin \theta \right) \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{得 } A = \frac{1}{2} c b \sin \theta + \frac{1}{2} a b \theta = \frac{b}{a} \left(\frac{\ell}{2} a^2 \sin \theta + \frac{1}{2} a^2 \sin \theta \right) \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{由 } \frac{(1)}{(2)} \rightarrow \frac{A}{t} = \frac{\frac{b}{a} \left(\frac{1}{2} a^2 \theta + \frac{\ell}{2} a^2 \sin \theta \right)}{\frac{2}{\sqrt{a G M_s}} \left(\frac{1}{2} a^2 \theta + \frac{e}{2} a^2 \sin \theta \right)}$$

$$= \frac{\sqrt{a G M_s} b}{2 a} = \sqrt{\frac{G M_s}{a}} \frac{2}{b}$$

$$\text{所以得 } A = \sqrt{\frac{G M_s}{a}} \cdot \frac{b}{2} \cdot t = k t \text{ (} k \text{ 爲常數因 } a, b \text{ 爲}$$

常數) 即若 t 相同則 A 相同，所以相同的時距內掃過的面積亦相同故刻卜勒等面積定律成立。

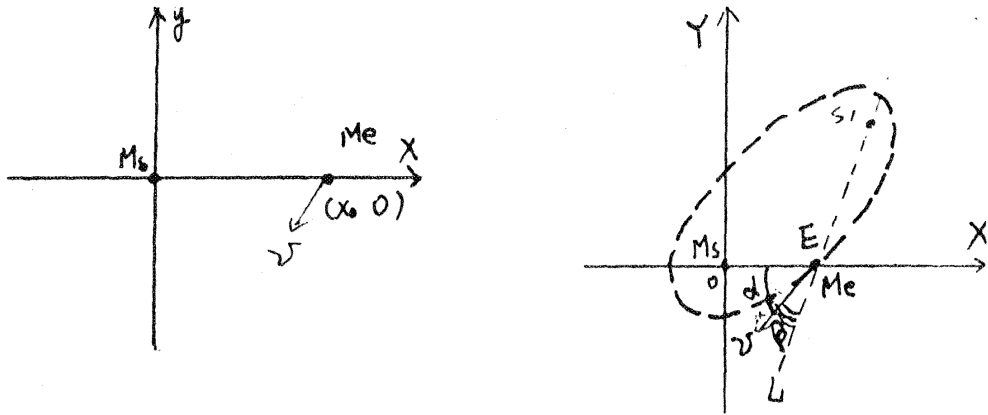
探討 4：機械能與運行軌道關係

由前面探討 1 知，當機械能小於零時，行星運行的軌道是橢圓，而於第 3 頁的(三)(四)圖由電腦螢幕上座標點求其曲線方程，發現為雙曲線，再以當時 M_e 所在點的機械

$$\text{能} = \frac{1}{2} M_e V_o^2 - \frac{G M_s M_e}{(x^2 + y^2)} \text{ 知當爲雙曲線時 } E \text{ 機} > 0,$$

當爲拋物線時 $E \text{ 機} = 0$ ， $E \text{ 機} < 0$ 時爲橢圓而且經多次

測試無誤，因此我們再以 $E_{機} < 0$ 將其數學意義再加以解析



4、設定一適當的 $x y$ 平面，令恒星在原點，行星在 x 軸上座標 $(x_0, 0)$ 以初速 V 運動（設 $x y$ 軸分速度為 V_x, V_y ）由機械能判斷， $E_{機} = \frac{1}{2} M_e V^2 + \frac{-G M_s M_e}{x_0}$ ，若 $E_{機} < 0$ 為橢圓，軌道求法如圖(2)。

(5) 先作直線 L 使 $\angle \alpha = \angle \beta$ 則一焦點在 M_s 上由刻卜勒第一定律知 M_s 為一焦點，且 M_e 之速度方向為橢圓的切線方向，由橢圓幾何性質知切線為切點與二焦點所圍三角形的外角平分線故當 $\angle \alpha = \angle \beta$ 時另一焦點在 L 上。

(6) 從前述知 $E_{機} = \frac{G M_s M_e}{-2a}$ ，故可求得 a 。由橢圓性質知軌跡上一點到二焦點之和為 $2a$ ，由此可定出另一焦點在 S' （因 $\overline{O E} + \overline{E S'} = 2a$ ）因為是橢圓故二焦點在 V 之同側。

(7) 由 1, 2 即可描出行星軌跡，再賦予時間對位置的函數故可在電腦螢幕上繪圖，模擬真實情況。

5、若 $E_{機} = 0$ 為拋物線，軌跡求法如下：

1. 作 L ，令 $\angle \alpha = \angle \beta$ 則 L 為拋物線的主軸方向 o 是焦點。
2. 由焦點，拋物線上一點即可求得拋物線軌跡。

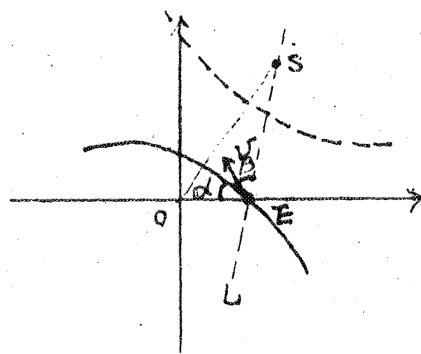
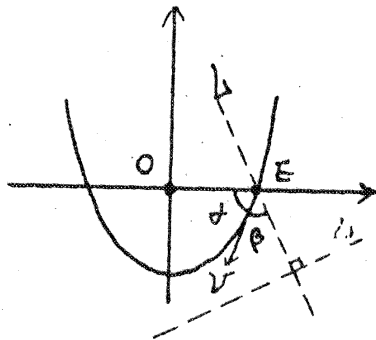
□、若 E 機 > 0 則為雙曲線軌跡求法如下：

1. 作 L 令 $\angle \alpha = \angle \beta$ 則雙曲線一焦點在 L 上然後可由 E 機 =

$$\frac{G M_s M_e}{2a} \text{ 得知 } 2a \text{。}$$

2. 從雙曲線的性質知另一焦點 S 與 O 在 V 異側且 $SE - EO = 2a$ ，故可定出 S 。

3. 已知雙曲線二焦點與綫上一點 E ，吾人可做出此雙曲線，但行星軌跡為雙曲線的一支。



結論：

ㄡ、有一行星於宇宙形成時若只考慮它與某一最近的恒星 (M_s) 有引力關係，且不受他星干擾則其 E 機 =

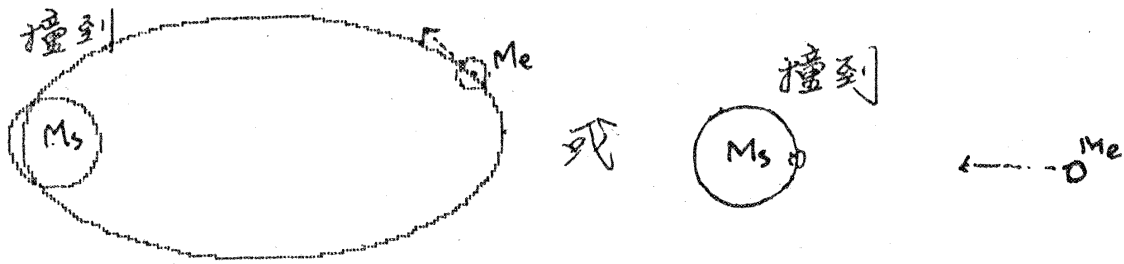
$$\frac{1}{2} M_e V^2 - \frac{G M_s M_e}{R} \quad (R \text{ 為 } M_e \text{ 與 } M_s \text{ 相距})$$

則：(ㄅ) 在 E 機 < 0 時 $\Rightarrow V < \sqrt{\frac{2 G M_s}{R}}$ 則此行星的軌道為橢圓。

(ㄆ) 在 E 機 $= 0$ 時 $\Rightarrow V = \sqrt{\frac{2 G M_s}{R}}$ 則此行星的軌道為拋物線。

(ㄇ) 在 E 機 > 0 時 $\Rightarrow V > \sqrt{\frac{2 G M_s}{R}}$ 則此行星的軌道為雙曲線。

ㄨ、當 M_e 的速度 V ，方向為正對 M_s 或其運行時其近恒星之距小於恒星與行星半徑和如圖：



探討 5：星球運行某位置的時間預測（找尋時間對位置函數）

(1) 橢圓軌道上時間對位置的函數前面探討 1 已有詳論

式子 $t = \frac{a^{1/2}}{\sqrt{GM_s}} (\theta + e \sin \theta)$ ，其中 θ 亦由 0 向負方向

運動，則時間出現負號，取絕對值即可。總而言之，求時間對位置之函數方法有二：

ㄅ、利用速度之倒數對位置積分即得。

ㄆ、利用等面積定律求得。

茲以拋物線與雙曲線為例。

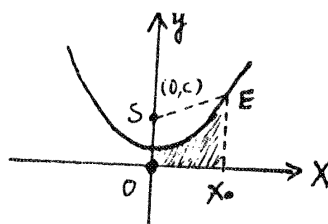
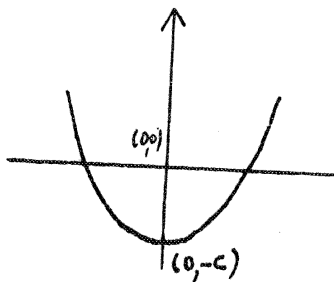
拋物線上時間對位置的函數：（利用速度倒數對位置積分）

設一拋物綫之參數式 $\begin{cases} x = 2\sqrt{c}h \\ y = h^2 - c \end{cases}$ （ h 為參數）

焦點在 $(0, 0)$ ，從 E 機 = 0 得 E 機 =

$$\frac{1}{2} M_e V^2 - \frac{G M_e M_s}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} M_e V^2 = \frac{G M_s M_e}{\sqrt{(2\sqrt{c}h)^2 + (h^2 - c)^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2GM_s}}{h^2 + c}$$



將速度投影在 x 軸上則 $V_x = V \cdot \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{(2\sqrt{c})^2 + (2h)^2}}$

$$\rightarrow V_x = \frac{\sqrt{2GM_s c}}{h^2 + c} \text{ 故 } \frac{1}{V_x} = \frac{h^2 + c}{\sqrt{2GM_s c}}$$

$$\text{而 } t = \int \frac{1}{V_x} r x = \int \frac{1}{V_x} r (2\sqrt{c h}) = \frac{2h^3 + 6ch}{3 \cdot \sqrt{2GM_s}}$$

$$\rightarrow t = \frac{2h^3 + 6ch}{3 \cdot \sqrt{2GM_s}} \text{ 即時間對位置的函數。}$$

雙曲線上時間對位置之函數：（利用等面積定律）

設一雙曲線中心在 $(0, 0)$ 上，主軸為 y 軸則其一支為 $y = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + x^2}$ ，對 x 積分代表斜線面積 $\int r x = \frac{a}{b} \left(\frac{x}{2} \sqrt{x^2 + b^2} + \frac{b^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + b^2}| + p \right)$ 其中 p 為常數然後以 $OSEX_0$ 之梯形面積減去斜線面積即刻卜勒所謂，行星與恒星連線所掃過的面積。

$$\text{面積 } OSEXo = \left(c + \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + x^2} \right) \frac{x}{2}$$

$$OSEXo - \int yrx = \frac{c}{2} x - \frac{ab}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + b^2}| - \frac{a}{b} p$$

由等面積得 $t = k \left(\frac{c}{2} x - \frac{ab}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + b^2}| - \frac{a}{b} p \right)$ 後

，吾人將 t 對 x 一次微分，表示 x 軸上單位位移所須時間

，而其倒數則代表 x 軸之分速度 $\circ \int t dx = \left(\frac{c}{2} - \frac{ab}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + b^2}} \right)$

) k 於 $x = 0$ 時行星速度與 x 軸之分速度相等，爲了運算方便取 $x = 0$ 求 k 之值。

$$x = 0 \int t dx = \frac{c}{2} - \frac{a}{2} = \left(\frac{c-a}{2} \right) k \text{ 其倒數 } \frac{1}{k} \left(\frac{2}{c-a} \right) \text{ 則}$$

$$\text{爲速度再由 } E \text{ 機得 } \frac{GM_s M_e}{2a} = \frac{1}{2} M_e V^2 - \frac{GM_e M_s}{\sqrt{x^2 + (y-c)^2}}$$

當 $x = 0, y = a$

$$\text{故 } \frac{GM_s M_e}{2a} = \frac{1}{2} M_e V^2 - \frac{GM_e M_s}{c-a} \quad (\because c > a)$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{\frac{GM_s (c+a)}{a(c-a)}} = \frac{1}{k} \left(\frac{2}{c-a} \right)$$

$$\Rightarrow k = \frac{2}{b} \sqrt{\frac{a}{GM_s}} \left(\text{代入 } t = k \left(\frac{c}{2} x - \frac{ab}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + b^2}| - \frac{a}{b} p \right) \right)$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{a}{GM_s}} \left(\frac{c}{b} x - a \ln |x + \sqrt{x^2 + b^2}| - \frac{2a}{b^2} p \right) \text{ 即}$$

時間對位置的函數

$$t = \sqrt{\frac{a}{GM_s}} \left(\frac{c}{b} x - a \ln |x + \sqrt{x^2 + b^2}| - \frac{2a}{b^2} p \right)$$

(2)結論：

ㄅ、若行星運行為橢圓則其時間的關係式為 $t = \frac{R^{3/2}}{\sqrt{GM_s}} (\theta + \sin \theta)$ (R 為軌道平均半徑, θ 為參數, 代表位置)。

ㄆ、若為拋物線則時間對位置的關係式 $t = \frac{2h^3 + 6ch}{3\sqrt{2GM_s}}$ (h 為參數)。

ㄇ、若為雙曲線則時間對位置的關係是 $t = \sqrt{\frac{a}{GM_s}} \left(\frac{c}{b} x -$

$$a \ln |x + \sqrt{x^2 + b^2}| - \frac{2a}{b^2} p \right) \quad (p \text{ 為可能發生的常數, } a \text{ 是半長軸, } c \text{ 是半短軸 } (c = a^2 + b^2))$$

故由三式吾人能測某行星的位置所在, 則可預測在另一位置的時間。

(二)以電腦模擬運行, 步驟如下:

1. 先行設定電腦螢幕圖形的比例圖。

2. 假設某恒星 M_s 與行星 M_e 的質量座標, 並假設行星的速度方向大小與受力 $F = \frac{GM_s M_e}{R^2}$ 進行描點工作。

3. 擬定參數式與計算離心率。

4. 判斷機械能並顯示軌跡圖。

5. 固定某些量, 改變其中一變量, 視其軌跡變化情形。

6. 從電腦顯示軌跡與 A 部份之理論做一比較。

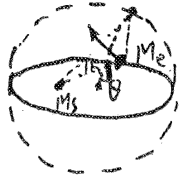
7. 以太陽系九大行星模擬之, 並與科學上公佈之實做比較以確定程式無誤, 資料於附錄 6。

1 ~ 4 仍屬程式寫作部份, 其流程圖與程式各如附錄略:

假設某恒星質量 M_s ，行星質量 M_e ，速度 V 其方向的角度 θ
 (θ 為參數式的 θ)

爲了使質量合理化，故以地球及太陽的質量模擬之，

$$M_e = 5.98 \times 10^{24} \text{ Kg}, M_s = 1.99 \times 10^{30} \text{ Kg}$$



1. 改變 V 的大小其餘不變

討論(1)可知 $V > \sqrt{\frac{GM_s}{R}}$ 軌跡爲雙曲線。

(2)可知 $V = \sqrt{\frac{GM_s}{R}}$ 軌跡的拋物線。

(3)可知 $V < \sqrt{\frac{GM_s}{R}}$ 軌跡爲橢圓。

2. 改變 θ ，其餘不變

討論(1)當 M_s ， M_e 都視爲點時除非 $\theta = 0$ or 180° 否則 M_e 之軌跡必爲橢圓。(但 e 不同)

(2)若 M_e ， M_s 非一點且二者近距離小於二星半徑之和則相撞。

3. 改變其餘不變

討論：

同一行星同一速度方向若當出發處距恒星 R 不同則機械能 E 機不同，且造成的軌跡亦不同。

討論：

由上綜論知道吾人只要知道一星球的 E 機即可預測其軌跡圖形。

※圖形若 $e > 1$ 爲雙曲線故無周期。

(三)由前面A B兩部分吾人對於星球運行，已有某一層次的認識，亦可知前當一星球於宇宙形成時已決定了它未來的運行軌道，當行星與某恒星所建立的E機大於零時，其軌跡為雙曲線。當E機等於零時，其軌道為拋物線（但此概率幾乎為0），E機 < 0 時其軌跡為橢圓。於此部分我們擬定以實物模擬之，看看是否一物在下等於 $-\frac{G m_1 m_2}{R^2}$ 作用力下其軌跡與能量有如此的關係存在，故依構想擬定計劃如下：

1. 尋找出一力使 $F \propto \frac{1}{R^2}$ 的關係成立。（R是受力體與力源之距）。
2. 使質量m的球（為了減少摩擦力所以用球）在 $F \propto \frac{1}{R^2}$ 的力作用下以不同的初速度、質量、運動探討其軌跡。
3. 由球的軌跡中解析其軌跡性質。
4. 探討運動球的機械能與軌跡關係。
5. 與（一）（二）部分做一比較，討論此模擬與實際的誤差情形。

原理 1：

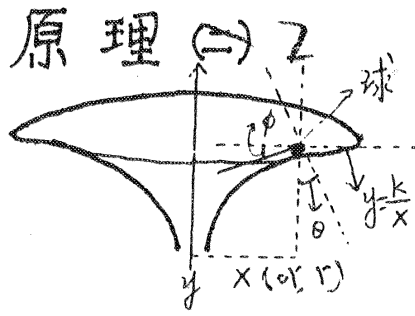
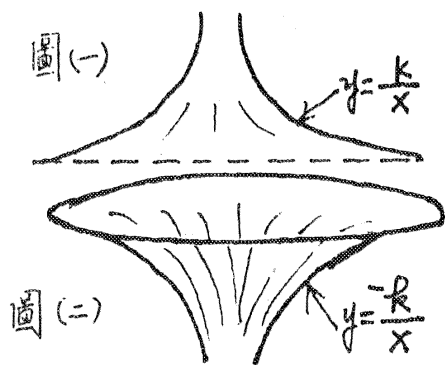
以 $y = \frac{k}{x}$ 的方程式，用油土做出一立體如圖電位丘的模型（圖一），再以玻璃纖維鑄出一模型（圖二）

原理 2：

當一球於此倒電位丘曲面時受重力 $mg \downarrow$ ，可知在切線方向之力為 $mg \sin \theta$ 而當 $\theta \Rightarrow 0^\circ$ 時 $\sin \theta = \frac{\frac{k}{x^2}}{1}$ 所以此球受切線力 $mg \frac{k}{x^2}$

$$\begin{aligned} \text{或由 } F_{\text{切}} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{kmg}{(x+\Delta x)} - \frac{kmg}{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-kmg}{x^2 + \Delta x \cdot x} = \frac{-kmg}{x^2} \end{aligned}$$

亦可知，而“—”表示方向



原理 3 :

當 x 越大 θ 越小, F 切 $\propto \frac{1}{x^2}$ 愈正確 (實驗時 θ 約為 0.1°)。

原理 4 :

若球由某一斜面高 h 處下滑, 當達平面時, $V = \sqrt{2gh}$ 所以可由斜面高 h 來了解球進入倒丘曲面時之初速大小及動能。

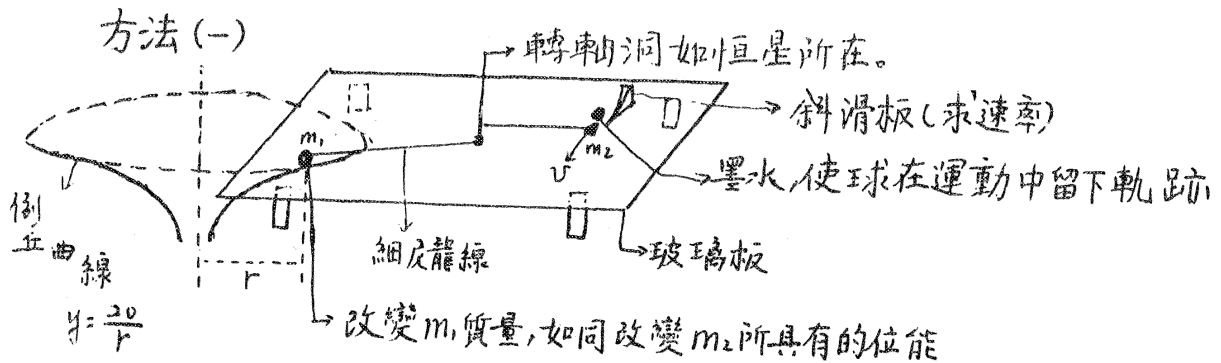
原理 5 :

由球入射曲線之點與曲面中心之 x , 了解球出發點所具有的位能 $U = \frac{-20mg}{r}$ (因為定無窮遠處位能為零故引力位能為“—”) ($\because h = 20, x = r$)

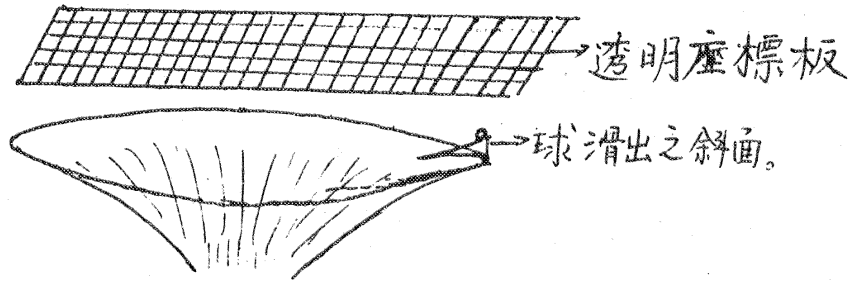
原理 6 : 爲了使摩擦力造成的誤差減少到最小, 於球滑出後取其軌跡上五點座標, 算出其軌跡方程式。

原理 7 : 再取軌跡上任一第六點判斷軌跡方程的誤差。

裝置 : 方法(1)

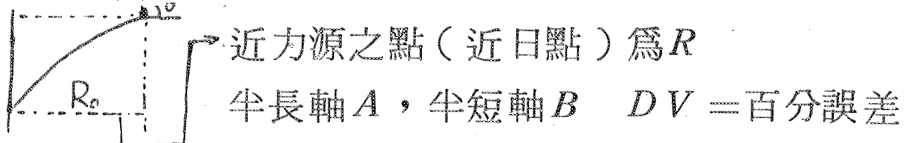


※於實驗中造成摩擦力的點太多（如 m_1 m_2 與面，轉軸洞與尼龍線）雖結果近似但不盡理想，故採用方法(2)
方法(2)：



當球由斜面滑出進入斜面運行留下軌跡後再以透明座標板平蓋於上找出數點軌跡座標，再由座標推算其全程軌跡。
※由於曲面斜角 0.1° 且 r 大，吾人只取出發後數點座標，故此球受力不再一面上，所造成誤差幾乎可忽略。

數據表示：曲面中點視為有一恆星所在



數據 \hookrightarrow ：固定小球質量 $m = 8.46 \text{ g}$ 方向 $\theta = 120^\circ$ 球發射點 $R_0 = 30 \text{ cm}$ 改變高度 h 。

h	E _K	U _g	E機	軌跡座標	軌跡方程	e	軌跡性質	電腦圖形	誤差
0.32	2643.7	5527.2	2883.4	(30,0)(10,15)(157,28) (0.2,15,2)(73,12.3) (7.3,15.5)	$1.6 \times 10^{-3} X^2 + 1.2 \times 10^{-3} Y^2 = 1$	0.51	橢圓	1	0.03%
0.46	3807	5527.2	1720.2	(30,0)(27.7,36) (-0.6,19.4)(16.2,14.5) (7.8,18.2)(239,8.2)	$6.3 \times 10^{-4} X^2 + 3.9 \times 10^{-4} Y^2 = 1$	0.62	橢圓	2	$2.6 \times 10^{-3} \%$
0.63	5181.8	"	-345.5	(30,0)(25.8,6.3) (-0.2,23.2)(13.4,17.8) (8.3,20.5)(21.2,11.5)	$3.0 \times 10^{-5} X^2 + 1.6 \times 10^{-6} Y^2 = 1$	0.97	橢圓	3	$31 \times 10^{-3} \%$
0.91	7532.9	"	2005.8	(30,0)(26.3,5.2) (10.4,30)(10.7,21) (2.4,25.7)(17.7,15)	$-2.6 \times 10^{-4} X^2 + 2.1 \times 10^{-4} Y^2 = 1$	1.34	雙曲線	4	1.34%
0.82	6768	"	1240.8	(30,0)(22,7,10,7) (3.4,27.7)(13.3,20.5) (7.3,25)(17.3,16.7)	$-5.9 \times 10^{-4} X^2 + 1.6 \times 10^{-3} Y^2 = 1$	1.16	雙曲線	5	$4.7 \times 10^{-3} \%$

質量單位 g ，線量單位： cm ，能量單位 erg

數據 α ：固定方向 $\theta = 120^\circ$ ，發射點 $R_0 = 30cm$ ，高度 $h = 0.46cm$ ，改變 m

m	E_k	U_g	E 機	軌跡座標點	軌跡方程	e	軌性	跡質	腦圖形	誤差
8.46	3796.9	-5527.2	-1730.4	(30,0)(28.7,2.1) (-16.2,15.3)(0.4,17.4) (-3.19,3)(17.5,13.7)	$6.7 \times 10^{-4} x^2 + 4.4 \times 10^{-4} y^2 = 1$	0.59	橢圓	圓	6	$6.29 \times 10^{-3}\%$
15.23	6835.2	-9950	-3114.8	(30,0)(26.7,4.9) (-22.4,11.2)(0.24,19.4) (-13.2,16.8)(13.6,16)	$6.7 \times 10^{-4} x^2 + 4.2 \times 10^{-4} y^2 = 1$	0.60	橢圓	圓	7	$2.1 \times 10^{-3}\%$
39.11	17552	-25555	-237999	(30,0)(23.9,2)(24.9,9) (1.4,19.4)(-14.2,16.3)	$6.6 \times 10^{-4} x^2 + 4.2 \times 10^{-4} y^2 = 1$	0.60	橢圓	圓	8	0.02%

質量單位 g ，線量單位 cm ，能量單位 erg

討論：

由數據及圖形知當球 m 變大，其 E_k ， V_g 皆變大，但只要 E 機 < 0 其軌跡必為橢圓。

數據 \square : 固定 $M = 8.46$, 發射點 $R_0 = 130 \text{ cm}$, 高度 $h = 0.45$ 改變 θ

θ	E_k	U_g	E機	軌跡座標點	軌跡方程	e	軌跡性質	電腦圖形	誤差
100	3716	-5527.2	-1811	(30,0)(28.4,6.2) (14.8,25)(23.7,15.6) (18.7,21.6)	$7.7 \times 10^{-4} x^2 + 6.8 \times 10^{-4} y^2 = 1$	0.348	橢圓	11	0.018%
110	"	"	"	(30,0)(28.7,31) (14.6,19.7)(22.7,12.6) (18.7,16.6)	$6.2 \times 10^{-4} x^2 + 4.8 \times 10^{-4} y^2 = 1$	0.47	橢圓	12	0.18%
130	"	"	"	(30,0)(27.7,2.5) (7.8,14.1)(19.8,9.1) (15.1,11.8)	$5.6 \times 10^{-4} x^2 + 2.4 \times 10^{-4} y^2 = 1$	0.75	橢圓	13	$4.4 \times 10^{-3} \%$

單位：質量單位：g，線量單位cm，能量單位：erg

討論：由上知，只要 $E_{\text{機}} < 0$ 則不論其方向如何其軌跡為橢圓而方向不同，造成不同之離心率。

數據 \square : 固定 $m = 8.46$, 方向 $\theta = 120^\circ$ 高度 $h = 0.43$ 改變出發點 R_0 。

R。	E _K	U _g	E機	軌跡座標點	軌跡方程	e	軌跡性質	電腦形	誤差
15	3557	-11054	-7497	(15, 0)(13.5, 2.1) (-5.3, -0.39)(5.8, 6.4) (-0.7, 5.6)	$7.5 \times 10^{-3} X^2 + 1.1 \times 10^{-2} Y^2 = 1$	0.57	橢圓	14	$2.6 \times 10^{-2} \%$
20	"	-820.8	-4733	(20, 0)(19, 1.6) (-0.26, 9.8)(12.5, 7.6) (4.9, 10.1)	$3.3 \times 10^{-3} X^2 + 4.8 \times 10^{-3} Y^2 = 1$	0.56	橢圓	15	$7.7 \times 10^{-2} \%$
25	"	-6632.6	-3075	(25, 0)(22.9, 3.1) (5.9, 14.1)(16.3, 9.7) (11.6, 12.4)	$1.4 \times 10^{-3} X^2 + 1.0 \times 10^{-3} Y^2 = 1$	0.52	橢圓	16	$9.9 \times 10^{-3} \%$
35	"	-4737.6	-1180	(35, 0)(33.2, 2.9) (19.8, 17.1)(27.5, 10.2) (23.7, 14)	$6.3 \times 10^{-4} X^2 + 3.5 \times 10^{-4} Y^2 = 1$	0.67	橢圓	17	$3.9 \times 10^{-3} \%$

數據為：固定 M ：8.46，方向 θ 120°，高度 h 1.31改變出發點 R_0 。

R_0	E_K	U_g	E 機	軌跡座標	軌跡方程	e	軌跡性質	電腦圖形	誤差
20	10860.9	-8290.8	2570.1	(20, 0)(4.2, 16.1) (0.3, 18.1)(-12.9, 22.4) (-16.4, 23.2)	$-9.69 \times 10^{-4} X^2 + 2.08 \times 10^{-3} Y^2 = 1$	1.33	雙曲線	18	$3 \times 10^{-5} \%$
25	"	-6632.6	4228.3	(25, 0)(17.1, 11.2) (0.8, 24.8)(-9.6, 30.4) (-13.9, 32.3)	$-8.69 \times 10^{-4} X^2 + 5.11 \times 10^{-4} Y^2 = 1$	1.14	"	19	$2.2 \times 10^{-5} \%$
30	"	-5527.0	5333.8	(30, 0)(25, 7.9) (19.9, 14.6)(14, 20.9) (7.8, 26.5)	$1.24 \times 10^{-4} X^2 - 5.85 \times 10^{-4} Y^2 = 1$	1.08	"	20	$6.6 \times 10^{-5} \%$

討論：當 E 機 < 0 則軌跡為橢圓

當 E 機 > 0 則軌跡為雙曲線

數據去，任取M θ RK。

m	R。	h	E _K	U _g	E機	軌跡座標點	軌跡方程	e	軌跡性質	電腦圖形	誤差
8.46	27	1.05	8733	-6141	2592	(27,0)(26.97,2.4) (22.5,37.9)(25.8,17.7) (24.5,26.8)	$0.19X^2 - 9.77 \times 10^{-4}y^2 = 1$	1.02	雙曲線	25	$5.8 \times 10^3\%$
15.23	33	0.9	13406	-9045	4361	(33,0)(32.3,38) (22.6,26.6)(28.2,14.36) (25.6,20.3)	$0.12X^2 - 8.54 \times 10^{-4}y^2 = 1$	1.03	雙曲線	26	$0.01 \times 10^3\%$
39.11	22	1.71	65356	-34843	30513	(22,0)(22,2,2,3) (17.5,25)(20.7,16.3) (20.63,16.6)	$0.05X^2 - 6.34 \times 10^{-3}y^2 = 1$	1.06	雙曲線	27	0.35%

單位：質量單位g，綫量單位cm，能量單位erg

討論：當 E 機 > 0 則軌跡為雙曲線。

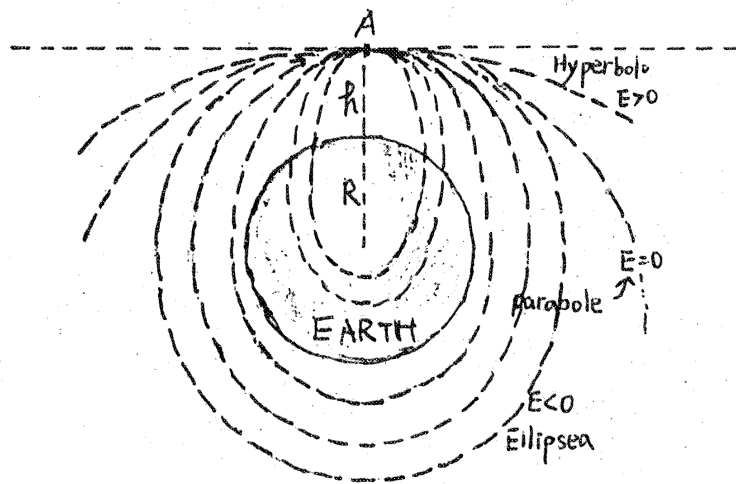
結論：由上數據我們可以確認

- ①一物的 E 機 < 0 其軌跡為橢圓（與其出發點的方向無關）。
- ②當一物 E 機 > 0 時其軌跡為雙曲線（與其方向無關）。
- ③當 E 機 $= 0$ ，由前 $A B$ 二部分知其軌跡為拋物線，由於要 E 機 $= 0$ 的幾率幾乎為 0 故無數據。

三、總 結

在半年來的探討過程中，我們不斷的討論、測試與找資料由理論的推演→電腦模擬→實體模擬，並一再的做驗證工作，限於板面與篇幅無法一一詳論，希望能在展覽會場中一一介紹我們所得的心得與結論，所以此篇只能代表我們的思路與探討過程的偶記。

宇宙之大萬物混行，但似乎有其規律性存在，如同理論部分推演出的時間與位置的關係等，此篇我們只探討一恒星與一行星，多恒星多行星運行我們也曾嚐試性的討論過，限於時間及所學並未做很深入的探討（如星球自轉的問題），九大行星運行與雙星運行，我們以電腦模擬之如附錄 6，在此一行星一恒星的探討中，我們確認當宇宙初成的刹那星球的運行軌跡及命運已被固定，而我們任意的拋出一物就是星球運行的模擬（除非過程中又有他物或他力突然介入）否則物體的 E 機 > 0 其軌跡必為雙曲線， E 機 $= 0$ 軌跡必為拋物線， E 機 < 0 軌跡必為橢圓，亦就是若地球視為一點的話則地球的拋體運動如圖



一般地球表面的拋體都視為拋物線的原因是由於：

- ①地球質量非集中於一點。
- ②地球附近重力場 $\frac{GM_e}{R^2}$ 視為定值。

而星球與星球的運行因為遠大於星球半徑所以視為如同二點運行。

評語：以基本的定律（牛頓第二定律）高中的數學程度，計算出星球的各種軌跡，並製作一簡單的儀器明顯地示範出這些軌跡，對星球的運動給予直接的了解，在教學上頗有價值。