祖冲之怎樣計算球的體積

國小教師組數學科第一名

台北明倫國小　　　　作　　者：林玉珍、謝慶沛

一、研究動機

(一)新編國小數學課程中有關幾何的教材，可說是由立體講到平面，然後又從平面講回到立體的流程。然有關圓的部分卻未完成如上所述的流程。圓的介紹是將圓柱直立於紙上，由描繪圓柱的底部而得（第一册第四單元）並與球之剖面相關聯（第五册第十單元），可是指導體積時，卻只出現圓柱的體積計算而不談球的體積。有些小朋友在求算圓的面積與圓柱的體積時，很容易聯想到球的體積之計算問題（因爲圓爲球或圓柱之正射影），這時老師們給予他們的答案往往是：計算公式爲

$$球體積=\frac{4}{3}\pi r^3$$

，至於公式的原理等到上了大學，學了微積分就可以知道。爲此，師生對此問題之問與答都耿耿於懷，問者是不明其理，答者只好應付。由此緣故，激發了我們探討如何解說球的體積的計算方法之動機。

(二)球體體積之計算，南北朝大數學家祖沖之（西元 429～500〔5：54〕）與祖暅父子，早已解決。他們所用的技巧很生動，令人拍案叫絕。從現在已發表的資料來看，祖氏父子的想法，由於不易將立體模型描繪於平面上，圖示複雜，對缺乏想像與透視能力的人很難對他們說明清楚並使他信服。因此激發我們依據祖氏父子的計算方法製造出具體模型的動機。期以具體的實物模型說明抽象的證明方法，使學習者的思路通暢。同時也藉此傳佈祖沖之父子的偉大工作，讓我們的學生具體的認識自己祖先在數學上卓越的貢獻。

二、研究目的

(一)製作實物模型來解說祖沖之父子計算球體體積的想法以及證明方法。

(二)印證心理學上的學習理論：直覺法可以幫助我們直接抓住觀念及如何證明的思考方法。

(三)宣揚傳播我國古代數學的獨特風格，肯定我們祖先的數學成就。

(四)印證數學是創造性的活動，以及觀念、定理和證明是從現實世界引發出來的，改進數學的教學方法。

三、研究設備器材

(一)材料與工具：

1. 木材。	2. 線鋸。	3. 強力黏膠。	4. 砂布。
5. 鉋刀。	6. 圓規。	7. 三角定規。	8. 參考書籍。

(二)成品：

1. 作兩直徑相等之圓柱垂直相交，並取出其共同的部分（即牟合方蓋），將其分成上下兩半，成兩個半牟合方蓋，且分別在半方蓋中挖了兩個半球狀的洞，將球套入方蓋中，再把方蓋套回二相交之圓柱中。
2. 小牟合方蓋（八分之一個牟合方蓋）與內切球之截面模型。
3. 劉徽計算體積的「棋」：立方、塹堵、陽馬、鱉臑。
4. 小牟合方蓋與陽馬的等高截面模型。

(三)用途：用來說明祖氏父子計算的體積的方法。

四、研究過程與方法

(一)過程：

1. 確定主題、蒐集資料、研讀數學雜誌及中國古代數學史書。
2. 研讀祖氏父子的傳記並探討其證明球的體積公式的方法（見參考資料）。由此而發現圖示複雜，不易看懂、不易想像，

諸多證明難以理解。因而提示了製作實物模型的必要。

3. 製作實物模型。

(二)祖氏父子所應用的原理：

1. 勾股定理（即畢達哥拉斯定理）：

在直角三角形中，兩腰的平方之和等於斜邊的平方。即 $a^2+b^2=c^2$（圖1）〔1：153〕。

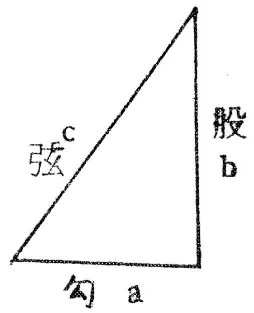

圖 1

2. 祖暅原理（即卡瓦利里原則 Cavalieri's Principle）：

(1)所謂祖暅原理即：「冪勢既同，則積不容異」。「冪」指的是截面積，「勢」指的是高。

(2)用數學語言表之：設兩物體夾於平行平面P和Q之間，若以任意一個平行於P和Q的平面R跟它們相截，截出來的二塊截面面積總是相等，則兩物體的體積相等（圖2）〔6：57〕。

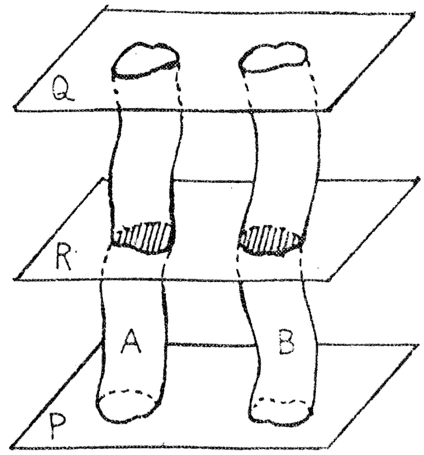

圖 2

(三)模型製作方法：

1. 從一圓柱之肚中挖一個圓洞，使其洞大小正好可以垂直地穿過另一直徑相同之圓柱（圖3）。

2. 取原來圓柱所應挖掉的部分，這部分便是劉徽（三國時代，公元二六三年左右）所謂的「牟合方蓋」（圖4）〔1：240〕。

3. 將牟合方蓋切成兩半使成兩個像飯桌上常用的紗罩形狀（圖5）。

4. 從兩個方蓋中分別挖出兩個半球的空洞（圖6）。

5. 將方蓋套住木球，方蓋又正好套在兩圓柱交穿的位置中，成一十字形垂直相交之二圓柱（圖3）。

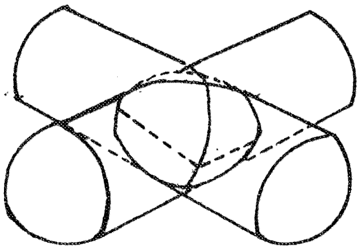

圖 3

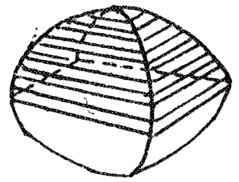

圖 4

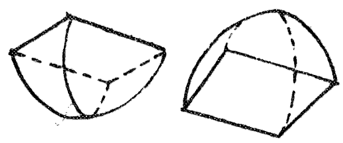

圖 5

6. 另取 8 個 10 公分立方的正方體，（圖 7 之(1)）令其邊長等於內切球的半徑 r，以 o 為圓心，r 為圓的半徑，從橫、豎兩面都把這小立方截為圓柱的一角的方法截開（如圖 7 之(1)）。這樣小立方體被截成三部分如圖 7 之(2)、(3)、(4)。其中(2)就是劉徽所說牟合方蓋體積的 $\frac{1}{8}$，可暫稱為小牟合方蓋，〔1:239—240〕。

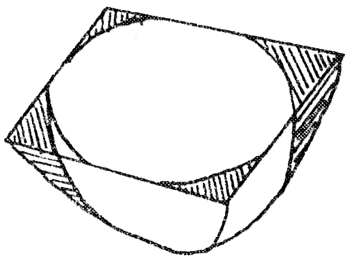

圖 6

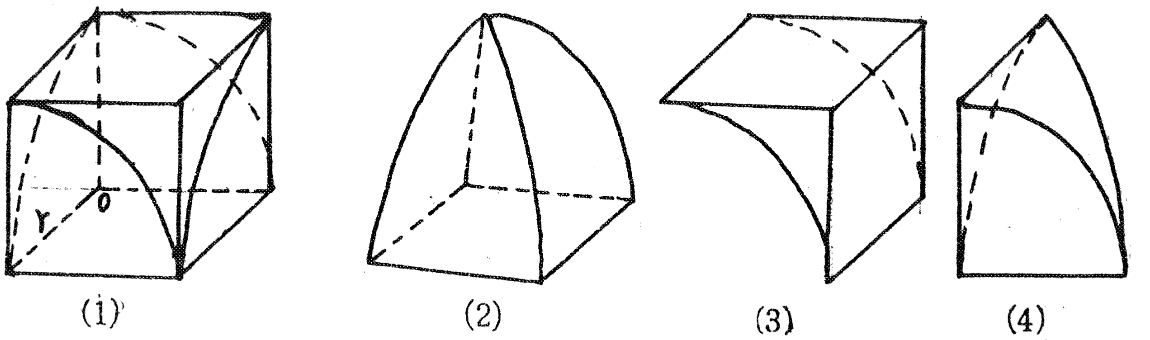

圖 7　牟合方蓋的分截

7. 將二個（10公分）^{3} 的正方體切割，分別取出「塹堵」，又從塹堵取出「陽馬」與「鱉臑」，再把三個陽馬拼合成一正方體（圖 8）。

4號

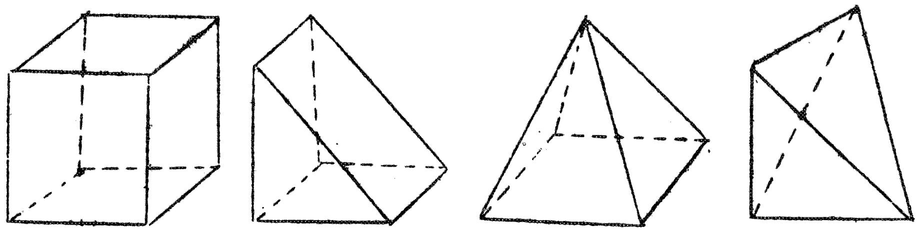

圖 8　立方　塹堵　陽馬　鱉臑

8.將一已分割之小牟合方蓋及其蓋外，仍合爲原正方體，然後在高 h 處截之（圖 9），斜線部分爲蓋外。

9.另用一層層大小不同的正方形橡皮墊製成牟合方蓋的水平截面，並在每個截面畫出內切的圓（球的截面）（圖 10）。

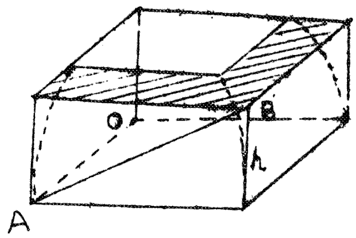

圖 9

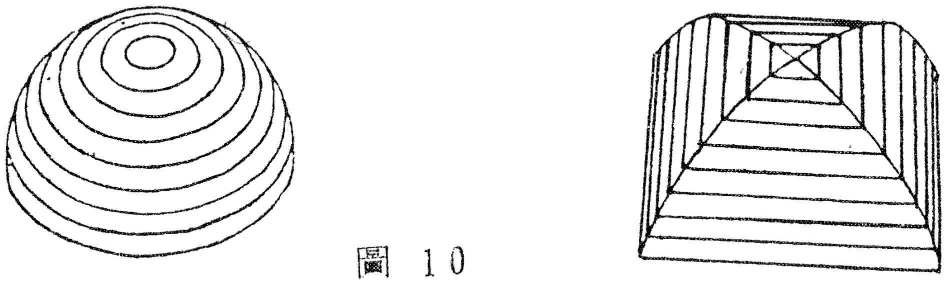

圖 10

五、證明方法

(一)在圖 11 中，每個圓和它的外切正方形面積之比爲 π ： 4 。所以根據祖暅原理的引伸，可以看出如下的體積關係：

球：牟合方蓋＝ π ： 4

因此，如果能求出牟合方蓋的體積，就能得到球的體積。

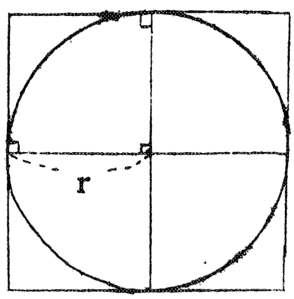

圖 11

(二)在圖12 中，NOACB 是全體牟合方蓋的八分之一，我們希望求出它的體積。

注意：NA和NB 都是半徑爲 r 的圓的部分，所以這些點都在球上。但NC 不是，它是每個正方形尖端的軌跡。這時ON＝ r

$$OC=\sqrt{2}\,r$$

這八分之一個牟合方蓋正好可以放在一個邊長爲 r 的正方體NGEFACBO 中，所以體積關係是:

$$牟合方蓋 / 8 = r^3 -蓋外體積$$

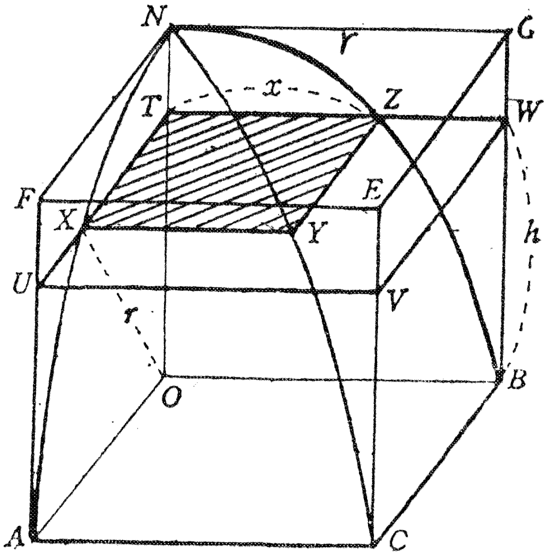

圖 12

在距蓋底 h 處加攔腰一刀，從正方體上斬得大正方形TUVW，面積爲 r^2 。

從八分之一個方蓋上斬得小正方形TXYZ。設其邊長是 x ，則因爲OX＝r　OT＝h　XT=x 加上這一刀垂直於ON ，所以從直角三角形OXT 中得　$r^2-x^2=h^2$　（勾股定理）r^2 爲大正方形面積，x^2 爲小正方形面積，所以 h^2 恰等於蓋外的面積。

(三)從邊長爲 r 的正方體可取得三個陽馬（圖 13 ），取一陽馬使倒立（圖14 ），因爲CEF和CEG都是等腰直角三角形，所以陽馬之截面積等於高度 h 的平方。

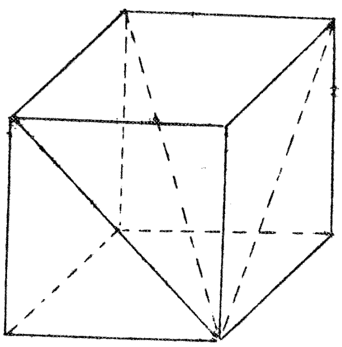
圖 13

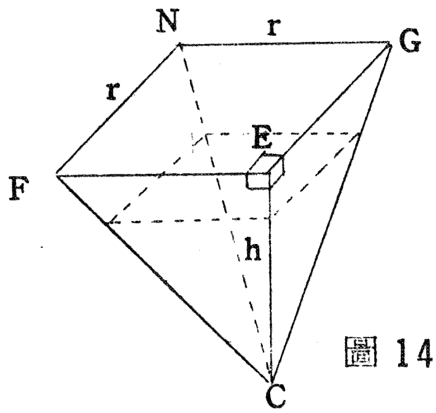

圖 14

已知當高度爲h時，蓋外部分的截面積（即正方形截面積減去方蓋截面積所剩下的截面積）爲h^2 。所以根據祖暅原理知：

蓋外部分的體積＝陽馬的體積

(四)已知三個陽馬可湊成一正方體，故知 陽馬＝ $r^3/3$

因此 $\frac{1}{8}$牟合方蓋的體積＝ $r^3-\frac{1}{3}r^3=\frac{2}{3}r^3$

全體牟合方蓋的體積 $=\frac{16}{3}r^3$

(五)由於 球：牟合方蓋＝π ：4 （體積關係）

所以 球：$\frac{16}{3}r^3=\pi:4$

球體積$=\frac{4}{3}\pi r^3$ 〔2：3～6〕

六、研究心得

(一) 牟合方蓋的提出有何意義？

1. 由牟合方蓋的體積來求球的體積的想法，起始於三國時代的劉徽，他說：「欲陋形措意，懼失正理，敢不闕疑，以俟能言者」。劉徽這樣提出問題，「留給後來的聰明人去解決」，爲後人開路的踏實作風和態度，值得後人學習。這問題在250年後才被祖沖之父子解決〔1：239〕。
2. 對於某一問題的解答，一時無法求出，動動腦筋有時可以找到一些助於解決問題的新線索，例如：祖氏父子本欲求球的體積，而借用了牟合方蓋來思考，又欲求蓋外部分的體積，也借用了陽馬的體積來思考。這種逐步推求的方法，在現在中學立體幾何學的課程中仍很重要。這也充分說明了我國古代數學的特殊風格：(1)特別着重於實際問題的解決，(2)把解決實際問題的方法推廣成一般的原理原則，(3)我國古代的數學家具有高度的推廣及抽象化的能力。

㈡祖暅原理的提出有何意義？

所謂祖恒原理即：「冪勢既同，則積不容異」，是說如果兩個立體的高一樣，且垂直於高的每個平面截此兩立體所得的截面積也相等，則此兩立體的體積相等（見圖2）。可將此原理推廣為：如果兩個立體的高一樣，且垂直於高的每個平面截此兩立體的截面積都成固定的比例時，則此兩立體的體積之比，就等於固定的比例。這個原理成為計算面積和體積的有力工具。此原理在西元十七世紀以卡瓦利里（B. Cavalieri，1598—1647）原理的名稱，重視於歐洲大陸成為微積分創立的關鍵之一〔3〕。

㈢製作實物模型有何意義？

製作實物模型的深一層意義是：空洞地高聲讚美我國古代的數學成就，並不能增加國人對數學的自信心，用模型具體地把我國古代的數學方法顯現出來，則比較容易使我們的下一代得到這方面的心理建設。因為這樣做，一方面顯示古人的思路，承認他們的高明，另一方面使學習者具體地了解其過程與方法，並體會數學的創造性，以及它與現實世界的引發關係。中國需要更多像祖沖之一樣的數學家，也需要更多腳踏實地的播種者。

㈣對祖氏父子的證明方法，我們可以如何去應用？

可以做反方向的應用，如果你承認了球體積的公式，則球：方蓋＝π：4 馬上告訴你牟合方蓋的體積公式。換言之，有助於計算一些求積的問題，或說明其思路。

七、結論與展望

㈠本研究的動機雖是在小學課堂上所激發，但經深入研究後發現：在證明、推理的過程中，需要用到的數學基本知識（如勾股定理、祖暅原理），是目前小學生還缺乏的，故在指導上可能會遭遇困難，但若在國中階段，用這些模型，用這樣的方法來指導，應該是可行的，有價值的。

(二)「牟合方蓋」是劉徽首先引入的，第一步驟的結果實質上也是劉徽所求得。祖氏父子的功勞，不僅在於具體的求出了牟合方蓋的體積，因而求出球的體積，更在於把實際上已知而且已經廣泛應用的實踐經驗，總結提高到一般原理的形式。

(三)數學教學除了偏重紙上的推理操作外，應該包括模型的製作。因為在製作過程中可以帶給製作者成功、快樂與滿足，包括材料與工具的找選，設計製作方法與步驟等方面。在此要強調的是對於數學內容與圖示的了解，捨棄模型而一味要求學生要有抽象、透視、想像的能力，那無疑是緣木求魚之舉。另一方面藉著模型的製作，也可讓學生對社會的資訊廣為關懷，並樂於去實驗、試用。

(四)在此問題中除了應用「祖暅原理」外，還用了「出入相補」原理。所謂「出入相補」原理就是：把一個平面圖形由一處移到他處，面積不變。又若把一圖形分成若干塊，則各塊面積的和等於原圖形的面積，因而圖形移置前後各面積間的和、差有簡單的相等關係。立體圖形的情形也是如此。這就是小學數學幾何教材中的等積異形，明此原理的廣泛應用，當可再次肯定是項教材的意義與價值。

八、參考資料

(一)黃武雄編　中西數學簡史　人間文化事業公司　民69年。

(二)李宗元「祖沖之、球體公式及其他」數學傳播第一卷第四期　中央研究院數學研究所。

(三)數學傳播雜誌第一卷第一期、第三卷第四期　中央研究院數學研究所。

(四)陳勝崑：祖沖之（中國科學家列傳之一），科學月刊　民64年4月。

(五)錢寶琮：中國算學史　九章文化出版事業公司　民68年台北重印版。

(六)諸明嘉編著　劉徽割圓術　人間文化事業公司　民68年。

評語：1.作者對於祖沖之計算球體體積的方法有深入的研究，並將說明的過程以製作的模型配合。

2.本作品的模型部分，作者克服製作上的困難，製作一套很完整的立體模型。

3.這些模型在球體體積的教學上很有價值，尤其適合國中、高中、甚至大學教學之用。

4.這些模型值得大量推廣，建議科學館設法製作。