

# 一四二八五七

## 高小組數學科第三名

宜蘭順安國小

作者：李芷慧、林秀玲  
簡秀娟、蘇麗琴  
指導老師：李鐘榮

### 一、研究動機

在一次無意中，我將一這個分數變為小數，答案等於0.142857，當時因我從未見過這個數目，接著將 $142857 \times 3$ ， $\times 4 \cdots \cdots \times 6$ 它的答案只是這些數字的循環而已，面對這個變化奧妙的數目產生了極大的興趣，於是約集了幾位志同道合的同學，共同來作這件奇妙而有趣的數學，並將它看成好比一本變化無窮的故事書，越看越有趣，越看越精彩。

### 二、研究方法

在我們研究的同學裏，常常利用空閒時間在一起討論研究，只在每星期一、四兩天，老師看看筆記簿，給我們批改，剩下時間大家一起克服困難，不怕狂風暴雨的阻擋，力求新的發現，有了問題復並討論發表意見，絕不想有依賴老師的心理之下，請老師給我們指導，我們研究就是以142857為題目，研究方法是：

- |           |          |
|-----------|----------|
| (一)加起來試試看 | (二)減     |
| (三)乘      | (四)除     |
| (五)正排列    | (六)倒排    |
| (七)圓周排列   | (八)…………… |

我們以上面次序依依討論下來，再把發現資料記在筆記簿上，差不多已有了骨架，就開始綜合了。

### 三、研究過程

(-)從研究當中，我們發現了許許多多以前所未見的結果：

1. 被乘數如果是 142857，乘數是 1……6 只要將乘數和 142857 的 7 乘上去，判斷其個位數，再將被乘數的位數循環一次，就可得到答案。

例如：142857 × 5

解：因為 7 × 5 = 35，個位數為 5 故得答案為 714285 爲什麼會這樣呢？因爲

$$\frac{1}{7} = 0.142857 \dots$$

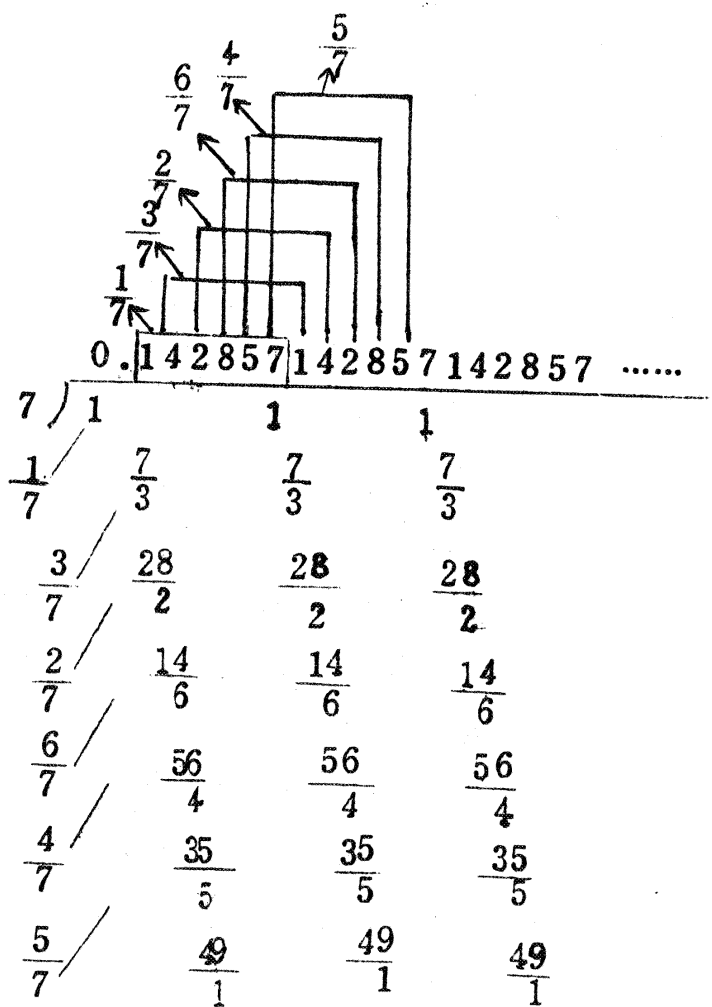
$$\frac{3}{7} = 0.428571 \dots$$

$$\frac{2}{7} = 0.285714 \dots$$

$$\frac{6}{7} = 0.857142 \dots$$

$$\frac{4}{7} = 0.571428 \dots$$

$$\frac{5}{7} = 0.714285 \dots$$



由  $\frac{1}{7}$  的除法過程中，了解  $\frac{2}{7}$ ， $\frac{3}{7}$ …… $\frac{6}{7}$  的結果，也就了解

142857 × 1，2……6 的結果了。

由於  $\frac{1}{7} = 0.142857$  循環，所以我們可利用上面的計算法，來算出 142857 乘於 1……6 的答案，以此方法算出答案

，將更簡便迅速。

2.  $142857 \times 57 = ?$

這個題目，你能不經過普通乘法，迅速的算出結果嗎，我們的發現是：

$$57 \div 7 = 8 \cdots \cdots 1$$

將 8 置於 142857 之前，再減去 8 也就是

$$142857 \times 57 = 8142857 - 8 = 8142849$$

其他的數：當乘數為 142857

例如： $142857 \times 584 = ?$

解：因為  $584 \div 7 = 83$  餘 3

先將  $142857 \times 3 = 428571$

利用（十一月十五日發現方法）

再將 83 置於 428571 之前面即可，也就是

$$142857 \times 584 = 83428571 - 83 = 83428488$$

一般來說：

求  $142857 \times$  某數  $= ?$

某數  $\div 7 = \triangle +$  餘數

將  $\triangle$  置於  $142857 \times$  餘數的得數之前再減  $\triangle$  即得答案。

3. 任何數乘於 9 都是非常好算的

例如： $9999 \times 7 = ?$

因為  $9999 = 10000 - 1$

所以  $9999 \times 7 = 70000 - 7$

這個方法是將 7 置於 4 個零之前，因為 9 有 4 位，再減去 7

同樣道理：

$$348 \times 99999 = ?$$

因為乘數有 5 位 9，所以前面位數 1 的後面有五個零

$$99999 = 100000 - 1$$

所以將 348 置於 5 個零之前，再減 348，也就是：

$$348 \times 9999 = 34800000 - 348 = 34899652$$

(二) 研究結果的原因探討：

1. 當「 $142857 \times 57$ 」為什麼可以像研究過程 2 的方法那樣計算呢？

當 142857 乘於較大的數目時，如果能利用 142857 乘於 7 的關係便能以最快的速度算出。

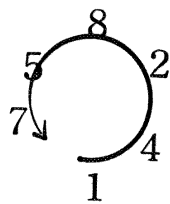
例如：142857 乘於 57 時，我們可利用 142857 和 7 的關係，將 57 分解開來，57 等於  $7 \times 8 + 1$ ，先將  $142857 \times 7 = 999999$ ，而 999999 又等於  $1000000 - 1$ ，再另外的一個 1 就是 1 個 142857，把這些統統分解清楚後以下的便可方便的算出：

$$\begin{aligned} 142857 \times 57 &= 99999 \times 8 + 142857 \\ &= 1000000 - 1 \times 8 + 142857 = 8142857 - 8 \\ &= 8142849 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又如：} 142857 \times 584 &= 142857 \times (7 \times 83 + 3) \\ &= 999999 \times 83 + 142857 \times 3 \\ &= 83000000 - 83 + 428571 \\ &= 83428571 - 83 \\ &= 83428488 \end{aligned}$$

2. 利用圓盤而逆著時鐘方向旋轉也可知答案：

例如： $142857 \times 6 = ?$



因為  $7 \times 6 = 42$ ，由 2 為個位數依次排列而得

答： $857142$

3. 如 142857 遇乘數能被 7 整除先把  $142857 \times 7$  再處理 42。  
 $142857 \times 7 = 999999$ ，然後把  $999999 \times 42$  等於  $(1000000 - 1) \times 42$  再把 42 放置於前再減 42 就等於 41999958

例如： $142857 \times 294$

$$= 142857 \times 7 \times 42 = (1000000 - 1) \times 42$$

$$= 42000000 - 42$$

$$= 41999958$$

4. 5382758329 這個數除以 142857，因將兩數都先乘 7，因  $142857 \times 7 = 999999$ ，任何數除以九都是非常好算的。例如：

$$\begin{array}{r} 5382758329 \div 142857 \\ \times \quad \quad \quad 7 \\ \hline 37679308303 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times \quad \quad \quad 7 \\ \hline 999999 \end{array} = 37679.345982$$

$$\begin{array}{r} 999999 \overline{) 37679} \quad \quad \quad \begin{array}{r} 37679 \\ 308303 \\ 345982 \end{array} \quad \quad \quad \begin{array}{r} 345982 \\ 000000 \\ 345982 \end{array} \end{array}$$

$37679308303 \div 999999$  除數有六位，所以將被除數六位、六位分開，再將所分開的一個一個往上加最後底下的就是餘數，上面的即是答案。

5. 任何數除以 7 只要不能整除，小數點後面的數一定是 1, 4, 2, 8, 5, 7 的調換循環。

例如：

$$\begin{array}{l} \frac{124}{7} = 17.7142857 \dots\dots \\ \frac{32}{7} = 4.571428 \dots\dots \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{因為任何數除以 7 的} \\ \text{餘數，都不超過 1, 2} \\ \text{,} \dots 6 \text{ 所以，它的循環} \\ \text{節必為 1, 4, 2, 8, 5, 7} \\ \text{組成} \end{array}$$

當你看到右邊那題加法時，最初你一定會說這麼多數目字，要怎樣加，但只要你了解 142857 的特性，便能不費吹灰之力的算出答案。

$$\begin{array}{r} 142857 (\times 1) \\ 428571 (\times 3) \\ 285714 (\times 2) \\ 857142 (\times 6) \\ 571428 (\times 4) \\ + 714285 (\times 5) \\ \hline 142857 \times 21 \\ = 999999 \times 3 \\ = 10000001 \times 3 \\ = 3000000 - 3 \\ = 2999997 \end{array}$$





，的結果，因為  $7 \times 1, 2, \dots, 6$  的個位數均不相同，能判斷最後一個數字，再將位數循環一次就得答案。

(二)  $\frac{1}{17}, \frac{1}{19}$  的循環長度各為 16 位，及 18 位，所以，由  $1 \div 17$ ，

或  $1 \div 19$  的過程中，可以了解  $\frac{1}{17}, \frac{2}{17}, \frac{3}{17}, \dots, \frac{16}{17}$ ，以及

$\frac{1}{19}, \frac{2}{19}, \dots, \frac{18}{19}$  的結果，也就是 0588236294117647，

052631578947368421 的循環而已，又由於除數是二位數，且循環內的數字，沒有連續三位會相同，所以，只要判斷兩位數，就能得到乘數是  $1, 2, \dots, 16$ ，及  $1, 2, \dots, 18$  的積了。

(三) 把上面兩個結果再擴大，如果 的循環節恰為  $\square - 1$ ，那麼就可證實在  $1 \div \square$  的過程中，有  $\square - 1$  種餘數，那麼

$\frac{2}{\square}, \frac{3}{\square}, \dots, \frac{\square-1}{\square}$  就可用循環節內的數字循環排列，再判

斷其最末的數字為何？就可以知道結果。

(四) 因為純循環的數，其分母都可以化為分母全為 9 的數字，所以若循環節長為  $\triangle$  位的 9，那麼， $\square \times$  循環節內的數字，就可得到  $\triangle$  位的 9。例如：

$$\frac{1}{7} = 0.142857 = \frac{142857}{999999} \text{ 所以， } 142857 \times 7 = 999999$$

(五) 位數全為 9 的乘法或除法是非常簡便的，例如：

$99999 = 100000 - 1$ ，因為，它們都是  $10 \dots 0 - 1$  而已，再稍加以設計，使  $10 \dots 0 - 1 = 10 \dots 01 = 100 \dots 1$ ，再用它來做計算，就會非常非常的方便。例如：  
 $354 \times 99999 = 354 \times 100001 = 35400000 - 354 = 35499646$  這知是看乘數，有 5 個 9，再將 354354 置於 5 個 0 之前，再減去 354，就得答案。又如： $348763412 \div 9999 = ?$



我們的方法是：

$$\begin{array}{r} \phantom{9999} \phantom{3} \phantom{4879} \\ 9999 \overline{) 3 \phantom{4876} \phantom{3412} \phantom{8291}} \\ \underline{\phantom{9999} 3 \phantom{4876} \phantom{3412} \phantom{8291}} \\ \phantom{9999} \phantom{3} 4876 \phantom{3412} \\ \underline{\phantom{9999} \phantom{3} 4879 \phantom{3412}} \\ \phantom{9999} \phantom{3} \phantom{4879} 3412 \\ \underline{\phantom{9999} \phantom{3} \phantom{4879} 3412} \\ \phantom{9999} \phantom{3} \phantom{4879} \phantom{3412} 8291 \end{array}$$

答：3487……餘8291

(六)有了最方便的9的算術我們就可應用9為媒介，作為計算的踏板，在做乘法時，可將被乘數配做9就會十分好算。例如：

1.  $\frac{8}{37} = ?$  因為  $37 \times 27 = 999$  所以

$$\frac{8}{37} = \frac{8 \times 27}{37 \times 27} = \frac{216}{999} = 0.\overline{216}$$

2.  $\frac{18}{2439} = ?$  因為  $2439 \times 41 = 99999$  所以

$$\frac{18}{2439} = \frac{18 \times 41}{2439 \times 41} = \frac{738}{99999} = 0.00738$$

3.  $4367 \times 142857 = ?$  因為  $142857 \times 7 = 999999$

所以： $4367 \times 142857 = (7 \times 623 + 6)$

4.  $348 \times 76923 = ?$  因為  $76923 \times 13 = 999999$

所以： $348 \times 76923 = 76923 \times (13 \times 26 + 10)$

$$= 26000000 - 26 + 769230$$

$$= 26769204$$

評語：本件對分數化為循環小數，有較簡捷的方法，說明完整，操作方便，值得鼓勵。