

一四二八五七

高小組數學科第三名

宜蘭順安國小

作 者：李芷蕙、林秀玲
簡秀娟、蘇麗琴
指導老師：李鑑榮

一、研究動機

在一次無意中，我將一這個分數變爲小數，答案等於 0.142857，當時因我從未見過這個數目，接著將 142857×3 , $\times 4 \dots \times 6$ 它的答案只是這些數字的循環而已，面對這個變化奧妙的數目產生了極大的興趣，於是約集了幾位志同道合的同學，共同來作這件奇妙而有趣的數學，並將它看成好比一本變化無窮的故事書，越看越有趣，越看越精彩。

二、研究方法

在我們研究的同學裏，常常利用空閒時間在一起討論研究，只在每星期一、四兩天，老師看看筆記簿，給我們批改，剩下時間大家一起克服困難，不怕狂風暴雨的阻擋，力求新的發現，有了問題復並討論發表意見，絕不想有依賴老師的心理之下，請老師給我們指導，我們研究就是以 142857 為題目，研究方法是：

- | | |
|------------|-----------|
| (一) 加起來試試看 | (二) 減 |
| (三) 乘 | (四) 除 |
| (五) 正排列 | (六) 倒排 |
| (七) 圓周排列 | (八) |

我們以上面次序依依討論下來，再把發現資料記在筆記簿上，差不多已有了骨架，就開始綜合了。

三、研究過程

(一) 從研究當中，我們發現了許許多以前所未見的結果：

1. 被乘數如果是 142857，乘數是 1 …… 6 只要將乘數和

142857 的 7 乘上去，判斷其個位數，再將被乘數的位數循環一次，就可得到答案。

例如： 142857×5

解：因為 $7 \times 5 = 35$ ，個位數為 5 故得答案為 714285 為什麼會這樣呢？因為

$$\frac{1}{7} = 0.142857\ldots$$

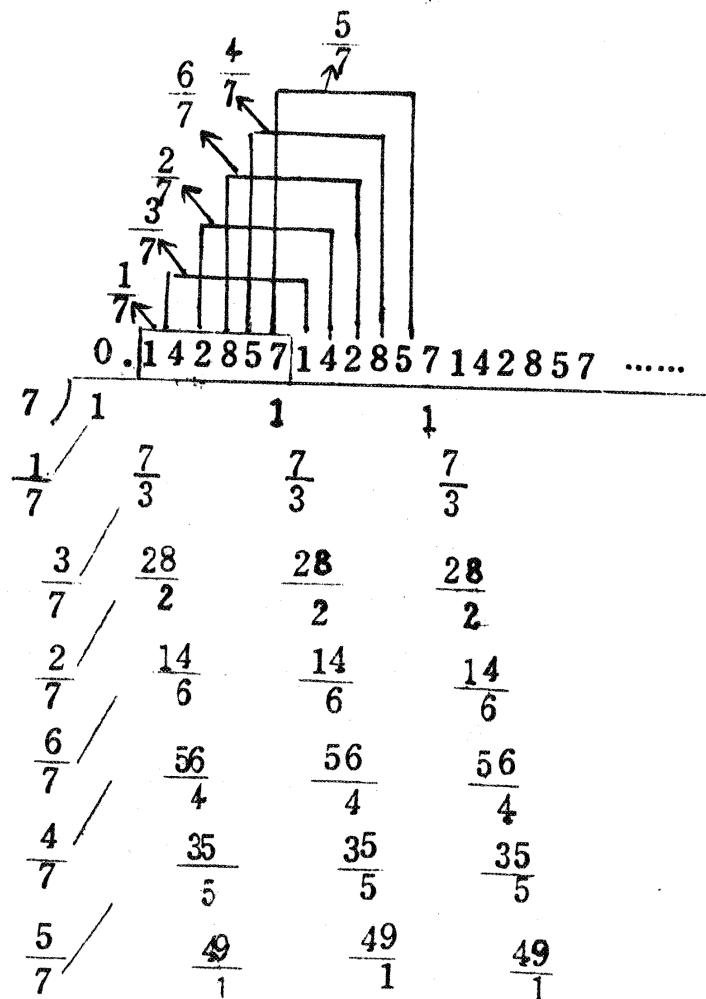
$$\frac{3}{7} = 0.428571\ldots$$

$$\frac{2}{7} = 0.285714\ldots$$

$$\frac{6}{7} = 0.857142\ldots$$

$$\frac{4}{7} = 0.571428\ldots$$

$$\frac{5}{7} = 0.714285\ldots$$



由 $\frac{1}{7}$ 的除法過程中，了解 $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \dots, \frac{6}{7}$ 的結果，也就了解

$142857 \times 1, 2, \dots, 6$ 的結果了。

由於 $= 0.142857$ 循環，所以我們可利用上面的計算法，來算出 142857 乘於 $1, 2, \dots, 6$ 的答案，以此方法算出答案

，將更簡便迅速。

2. $142857 \times 57 = ?$

這個題目，你能不經過普通乘法，迅速的算出結果嗎，我們的發現是：

$$57 \div 7 = 8 \cdots \cdots 1$$

將 8 置於 142857 之前，再減去 8 也就是

$$142857 \times 57 = 8142857 - 8 = 8142849$$

其他的數：當乘數為 142857

例如： $142857 \times 584 = ?$

解：因為 $584 \div 7 = 83$ 餘 3

先將 $142857 \times 3 = 428571$

利用（十一月十五日發現方法）

再將 83 置於 428571 之前面即可，也就是

$$142857 \times 584 = 83428571 - 83 = 83428488$$

一般來說：

求 $142857 \times$ 某數 = ?

某數 $\div 7 = \Delta +$ 餘數

將 Δ 置於 $142857 \times$ 餘數的得數之前再減 Δ 即得答案。

3. 任何數乘於 9 都是非常好算的

例如： $9999 \times 7 = ?$

因為 $9999 = 10000 - 1$

所以 $9999 \times 7 = 70000 - 7$

這個方法是將 7 置於 4 個零之前，因為 9 有 4 位，再減去 7

同樣道理：

$$348 \times 9999 = ?$$

因為乘數有 5 位 9，所以前面位數 1 的後面有五個零

$$99999 = 100000 - 1$$

所以將 348 置於 5 個零之前，再減 348，也就是：

$$348 \times 9999 = 34800000 - 348 = 34899652$$

(二)研究結果的原因探討：

1. 當「 142857×57 」為什麼可以像研究過程 2 的方法那樣計算呢？

當 142857 乘於較大的數目時，如果能利用 142857 乘於 7 的關係便能以最快的速度算出。

例如：142857 乘於 57 時，我們可利用 142857 和 7 的關係，將 57 分解開來，57 等於 $7 \times 8 + 1$ ，先將 $142857 \times 7 = 999999$ ，而 999999 又等於 $1000000 - 1$ ，再另外的一個 1 就是 1 個 142857，把這些統統分解清楚後以下的便可方便的算出：

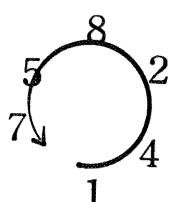
$$\begin{aligned}142857 \times 57 &= 99999 \times 8 + 142857 \\&= 1000000 - 1 \times 8 + 142857 = 8142857 - 8 \\&= 8142849\end{aligned}$$

又如： $142857 \times 584 = 142857 \times (7 \times 83 + 3)$

$$\begin{aligned}&= 999999 \times 83 + 142857 \times 3 \\&= 83000000 - 83 + 428571 \\&= 83428571 - 83 \\&= 83428488\end{aligned}$$

2. 利用圓盤而逆著時鐘方向旋轉也可知答案：

例如： $142857 \times 6 = ?$



因為 $7 \times 6 = 42$ ，由 2 為個位數依序排列而得

答：857142

3. 如 142857 遇乘數能被 7 整除先把 142857×7 再處理 42。

$142857 \times 7 = 999999$ ，然後把 999999×42 等於 $(1000000 - 1) \times 42$ 再把 42 放置於前再減 42 就等於 41999958

例如： 142857×294

$$= 142857 \times 7 \times 42 = (1000000 - 1) \times 42$$

$$= 42000000 - 42$$

$$= 41999958$$

4. 5382758329這個數除以 142857，因將兩數都先乘 7，因
 $142857 \times 7 = 999999$ ，任何數除以九都是非常好算的。
例如：

$$\begin{array}{r} 5382758329 \\ \times \quad \quad \quad 7 \\ \hline 37679308303 \end{array} \quad \begin{array}{r} 142857 \\ \times \quad \quad \quad 7 \\ \hline 37679.345982 \\ 999999 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} & 37679 & 345982 \\ 999999 \text{ } \longdiv{37679} & 308303 & 000000 \\ & 345982 & 345982 \end{array}$$

37679308303 \div 999999 除數有六位，所以將被除數六位、六位分開，再將所分開的一個一個往上加最後底下的就是餘數，上面的即是答案。

5. 任何數除以 7 只要不能整除，小數點後面的數一定是 1，4，2，8，5，7 的調換循環。

例如：

$$\begin{array}{r} \frac{124}{7} = 17.7142857 \dots \dots \text{ 因為任何數除以 7 的} \\ \frac{32}{7} = 4.571428 \dots \dots \text{ 餘數，都不超過 } 1, 2, \dots, 6 \text{ 所以，它的循環} \\ \text{節必為 } 1, 4, 2, 8, 5, 7 \\ \text{組成} \end{array}$$

當你看到右邊那題加法時，最初你一定會說這麼多數字，要怎樣加，但只要你了解 142857 的特性，便能不費吹灰之力的算出答案。

$$\begin{array}{r} 142857 (\times 1) \\ 428571 (\times 3) \\ 285714 (\times 2) \\ 857142 (\times 6) \\ 571428 (\times 4) \\ + 714285 (\times 5) \\ \hline 142857 \times 21 \\ = 999999 \times 3 \\ = 10000001 \times 3 \\ = 3000000 - 3 \\ = 2999997 \end{array}$$

解：上面加法中所加的數字都只是 142857 的掉換，所以可明顯的看出主要還是 142857 這個題目，而旁邊另外寫著乘 21，是因為加法中以 1 開頭的是乘於 1，4 開頭的乘以 3，將以下的照樣算出後再加起來，最後就等於 142857×21 ，再引用 142857 和 7 的關係，將 21 分解開來等於 7×3 ， $142857 \times 7 = 999999$ ， 999999 再乘於 3，任何數乘於 9 都是非常好算的，可先將 999999 寫為負數 $1000001 \times 3 = 3000003 = 2999997$

6. 為什麼除數位數全為 9 的除法，可以像十一月二十九日所提的方法計算呢？也就是先算算看 9 有幾位，再將被除數後個位數幾位、幾位分開再計算。

例如： $34512344128 \div 9999 = ?$

因為 $9999 = 10000 - 1$ ，為了方便，我們設計 10001，代表 $10000 - 1$ ，也就是 $9999 = 10001$ ，再四位，四位的分開，就得到 10001，那「第一位數」就是「0001」第二位數就是 1，那麼再將被除數四位四位當一位數，再除得

$$\begin{array}{r}
 & 345 & 1579 \\
 9999 & \overline{)345} & \overline{1234} & 4128 \\
 & 345 & \overline{0345} & \\
 & & 1579 & \overline{4128} \\
 & & 1579 & \overline{1579} \\
 & & & 5707 \cdots \cdots \text{餘數}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 & 345 & 1579 \\
 10001 & \overline{345} & \overline{1234} & + 4128 \\
 & & 1579 & 5707
 \end{array}$$

就得最簡便的除法

7. 推廣 142857 的應用

以上的算術是否僅有 142857 這個情形呢？我們推廣如下：如果一個循環節長，却為被除數 - 1 的話，那麼它的循環節內的數字，却可以用類似的算法

例如：

$$\frac{1}{19} = 0.\overline{052631578947368421}$$

$$\frac{1}{17} = 0.\overline{0588235294117647}$$

那麼設： $0.0558823529417647 \times 5434479 = ?$

因為 $5434479 \div 17 = 319675 \dots\dots\dots 4$

設 $\triangle = 0.0588235294117647$

$$\triangle \times 4 = ?$$

因為 $47 \times 4 = 188$ ，也就最末二位數 88

因 $\triangle \times 4 = 2352941176470588$

再將 319675 置於 $\triangle \times 4$ 之前以及減 319675 就得到

$$319675.2352941176470588 - 319675 \times (10^{-16})$$

$$319675.2352941176150913$$

8. 擴大 142857 的應用

以下這個天文數字，就是應用循環節內的數字推算出來的。

$$697054872037 \div 52631578947368421 = ?$$

$$\text{解： } 6973054872037 \times 19 = 132488042568703$$

$$\begin{array}{r} 0.00132488042568703 \\ 99 \cdots 9 \sqrt{132488042568703.000000000000000000000000} \\ \quad 18 \text{ 位} \end{array}$$

$$\text{答： } 0.00132488042568703$$

方法說明：除數是 的循環節內的數字，所以，當除數乘上 19 之後，就得 $10^{18} - 1$ ，也就是 18 位的 9，再應用 9 的除法，就得到答案。

四、研究結果

(+) $\frac{1}{7} = 0.142857$ ，由 $1 \div 7$ 的過程中，也就可以了解 $\times 1, 2$

……的各個結果，顯然，他們必為 1, 4, 2, 8, 5, 7 這幾個數字循環而已，所以要了解 $142857 \times 1, 2, 3 \dots\dots 6$

，的結果，因為 $7 \times 1, 2, \dots, 6$ 的個位數均不相同，能判斷最後一個數字，再將位數循環一次就得答案。

(二) $\frac{1}{17}, \frac{1}{19}$ 的循環長度各為 16 位，及 18 位，所以，由 $1 \div 17$,

或 $1 \div 19$ 的過程中，可以了解 $\frac{1}{17}, \frac{2}{17}, \frac{3}{17}, \dots, \frac{16}{17}$ ，以及

$\frac{1}{19}, \frac{2}{19}, \dots, \frac{18}{19}$ 的結果，也就是 0588236294117647,

052631578947368421 的循環而已，又由於除數是二位數，且循環內的數字，沒有連續三位會相同，所以，只要判斷兩位數，就能得到乘數是 1, 2, \dots, 16，及 1, 2, \dots, 18 的積了。

(三) 把上面兩個結果再擴大，如果 的循環節恰為 $\square - 1$ ，那麼就可證實在 $1 \div \square$ 的過程中，有 $\square - 1$ 種餘數，那麼

$\frac{2}{\square}, \frac{3}{\square}, \dots, \frac{\square}{\square} - 1$ 就可用循環節內的數字循環排列，再判斷其最末的數字為何？就可以知道結果。

(四) 因為純循環的數，其分母都可以化為分母全為 9 的數字，所以若循環節長為 \triangle 位的 9，那麼， $\square \times$ 循環節內的數字，就可得到 \triangle 位的 9。例如：

$$\frac{1}{7} = 0.142857 = \frac{142857}{999999} \text{ 所以, } 142857 \times 7 = 999999$$

(五) 位數全為 9 的乘法或除法是非常簡便的，例如：

$99999 = 100000 - 1$ ，因為，它們都是 $10 \dots, 0 - 1$ 而已，再稍加以設計，使 $10 \dots, 0 - 1 = 10 \dots, 01 = 100 \dots, 1$ ，再用它來做計算，就會非常非常的方便。例如： $354 \times 99999 = 354 \times 100001 = 35400000 - 354 = 35499646$ 這知是看乘數，有 5 個 9，再將 354354 置於 5 個 0 之前，再減去 354，就得答案。又如： $348763412 \div 9999 = ?$

我們的方法是：

$$\begin{array}{r} & 3 & 4879 \\ 9999 & \overline{)3} & 4876 & 3412 \\ & & 4879 & 8291 \end{array}$$

答：3487……餘8291

(六)有了最方便的9的算術我們就可應用9為媒介，作為計算的踏板，在做乘法時，可將被乘數配做9就會十分好算。例如：

1. $\frac{8}{37} = ?$ 因為 $37 \times 27 = 999$ 所以

$$\frac{8}{37} = \frac{8 \times 27}{37 \times 27} = \frac{216}{999} = 0.\overline{216}$$

2. $\frac{18}{2439} = ?$ 因為 $2439 \times 41 = 99999$ 所以

$$\frac{18}{2439} = \frac{18 \times 41}{2439 \times 41} = \frac{738}{99999} = 0.00738$$

3. $4367 \times 142857 = ?$ 因為 $142857 \times 7 = 999999$

所以： $4367 \times 142857 = (7 \times 623 + 6)$

4. $348 \times 76923 = ?$ 因為 $76923 \times 13 = 999999$

$$\begin{aligned} \text{所以： } 348 \times 76923 &= 76923 \times (13 \times 26 + 10) \\ &= 26000000 - 26 + 769230 \\ &= 26769204 \end{aligned}$$

評語：本件對分數化為循環小數，有較簡捷的方法，說明完整，操作方便，值得鼓勵。