

移形换位趣味多

高小組數學科第二名

苗栗縣建功國民小學

作者：鍾興陽等 7 人

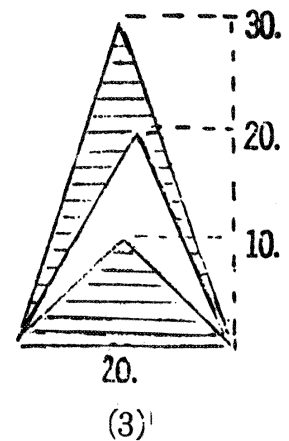
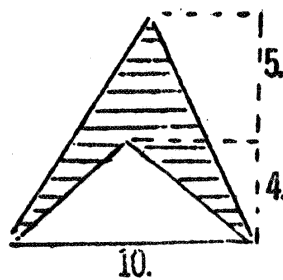
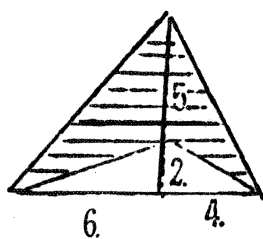
指導教師：陳耀南

一、動機

寒假前，郭老師要我負責今年科學展覽作品的製作，我因為找不到題材，便去請教陳老師。陳老師說：「你在上課中提到的鏢形面積算法，解釋新穎特殊，這種觀念就是很好的題材。你如果能把它加以歸納整理，做有系統的實驗研究，除了能加深了解外，更可以帶動同學們，從課本內容發現問題，蔚成實驗研究的風氣。得到老師誠懇詳細的指導和鼓勵，於是決定把解鏢形面積時的移形换位觀念提供給喜愛數學的同學參考，並共同切磋。

二、問題

求下列斜線部分的面積：



三、過去解法的幾種模式

(一)

(1) $6 + 4 = 10$ ……底
 $5 + 2 = 7$ ……高

$$\boxed{10 \times 7 \div 2 - 10 \times 2 \div 2} = 25$$

(2)把括號部分用結合律歸納成

$$10 \times (7 - 2) \div 2 = 25$$

(3) $\boxed{5 \times 4 \div 2 + 5 \times 6 \div 2} = 25$

(4)把括號部分結合：

$$5 \times (4 + 6) \div 2 = 25$$

(二)

(1) $5 + 4 = 9$

$$\boxed{10 \times 9 \div 2 - 10 \times 4 \div 2} = 25$$

(2)把括號部分結合

$$10 \times (9 - 4) \div 2 = 25$$

(三)

(1) $\boxed{20 \times 30 \div 2 - 20 \times 20 \div 2} + 20 \times 10 \div 2 = 200$

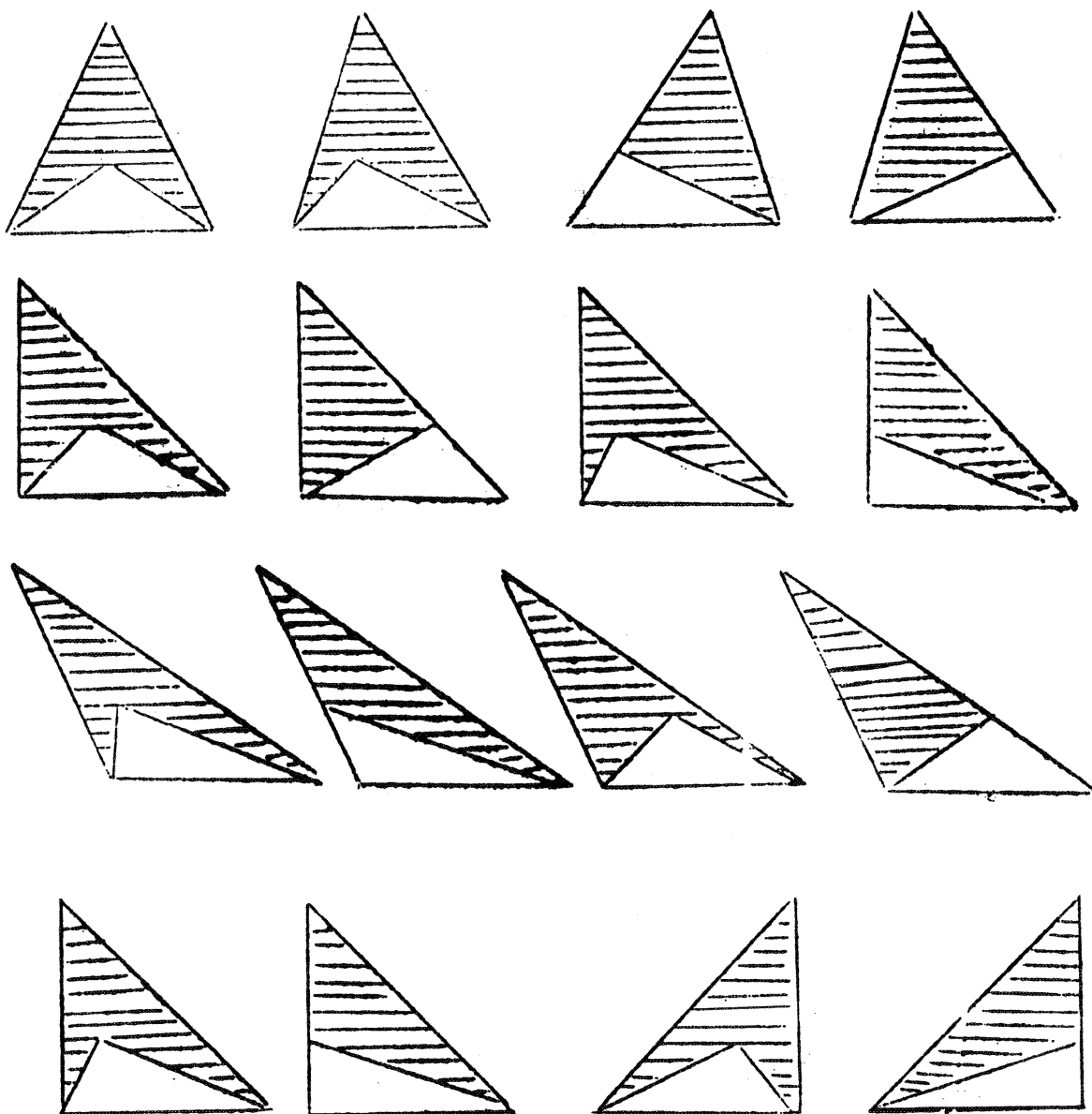
(2)括號部分結合

$$20 \times (30 - 20) \div 2 + 20 \times 10 \div 2 = 200$$

以上各種算法歸納結果，不外用大三角形面積減去小三角形面積，及用乘法結合律結合簡化等二種變化。

四、給圖形搬新家——移形換位的探討

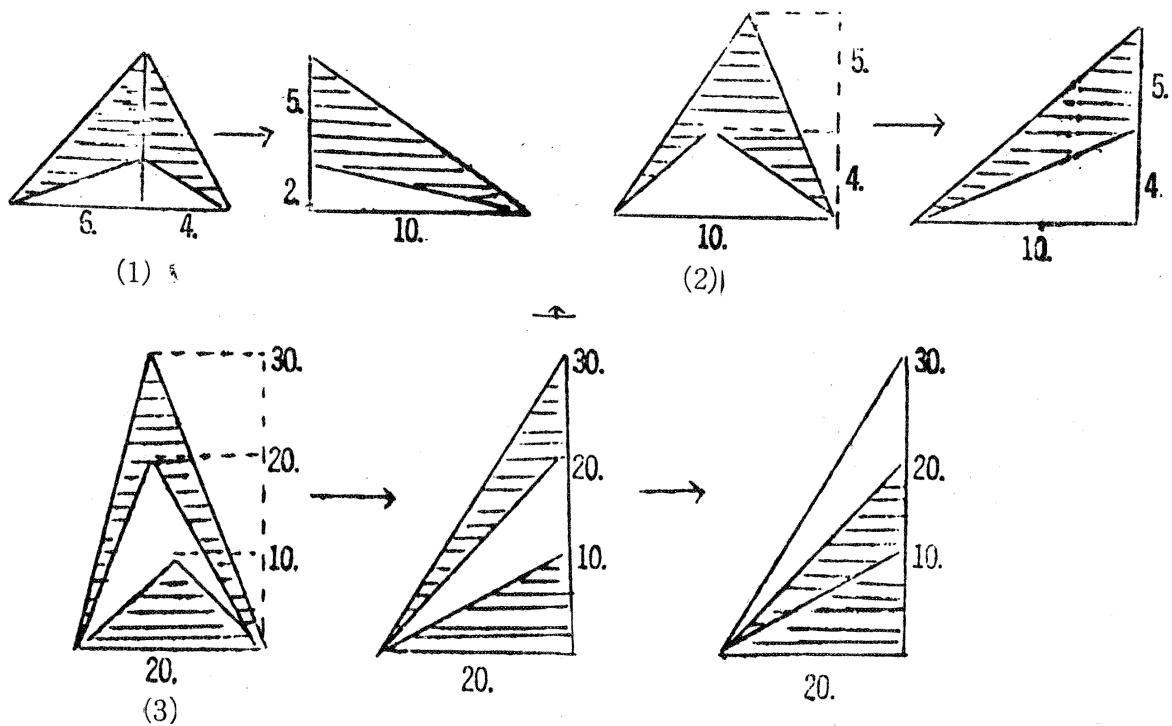
利用已學過同底同高面積相等的原理，把原來圖形加以變化：



我們觀察研究發現：

- (一)各斜線部分形狀雖異，面積都相等。
- (二)當變化到兩三角形都成直角三角形時，（兩邊相互垂直時），斜線部分為一底、高都很明顯的三角形。
- (三)這一三角形的面積，就是原斜線部分面積。

前述問題變化結果是：



因此把握底、高不變的原則，把原來圖形變換成直角三角形，便能很明顯的看出原來鏢形的面積。

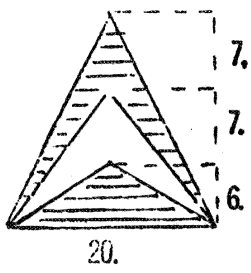
五、實驗推展

爲了瞭解這種移形換位的觀念，是不是能被同學們所接受應用，於是在老師的指導下，做了下面的實驗推展工作。

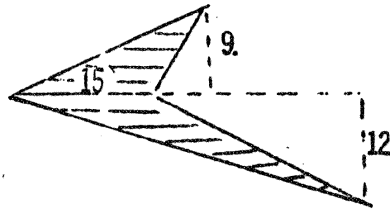
(一)實施測驗：製作試題，商借五年級和六年級各兩班的同學，分別在介紹這種觀念前舉行一次初測，在介紹這種觀念後舉行一次複測，並統計其使用時間，答題方法及答對題數，以推定其接受應用的程度，與實用價值。

試題內容如下：

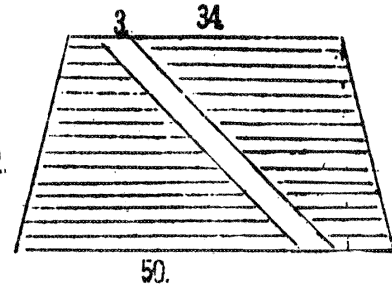
(1)



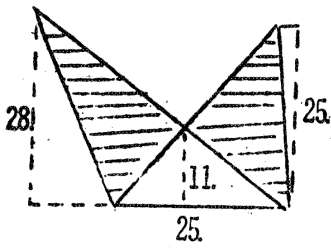
(2)



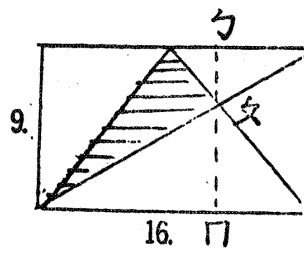
(3)



(4)

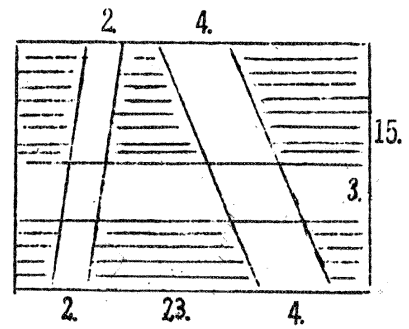


(5)

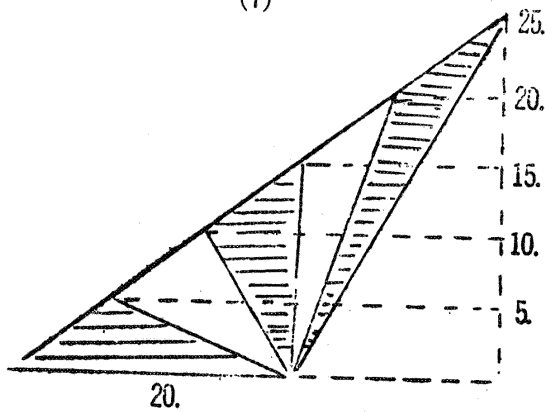


勺長為勺勺的2倍

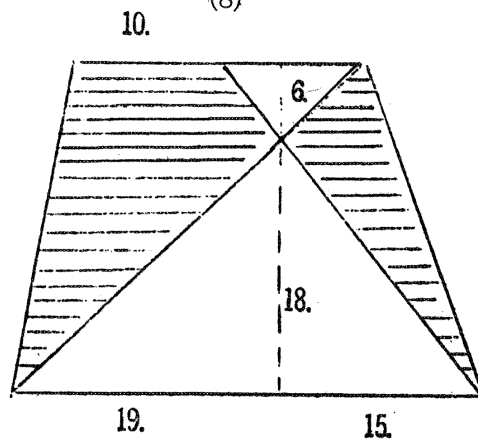
(6)



(7)

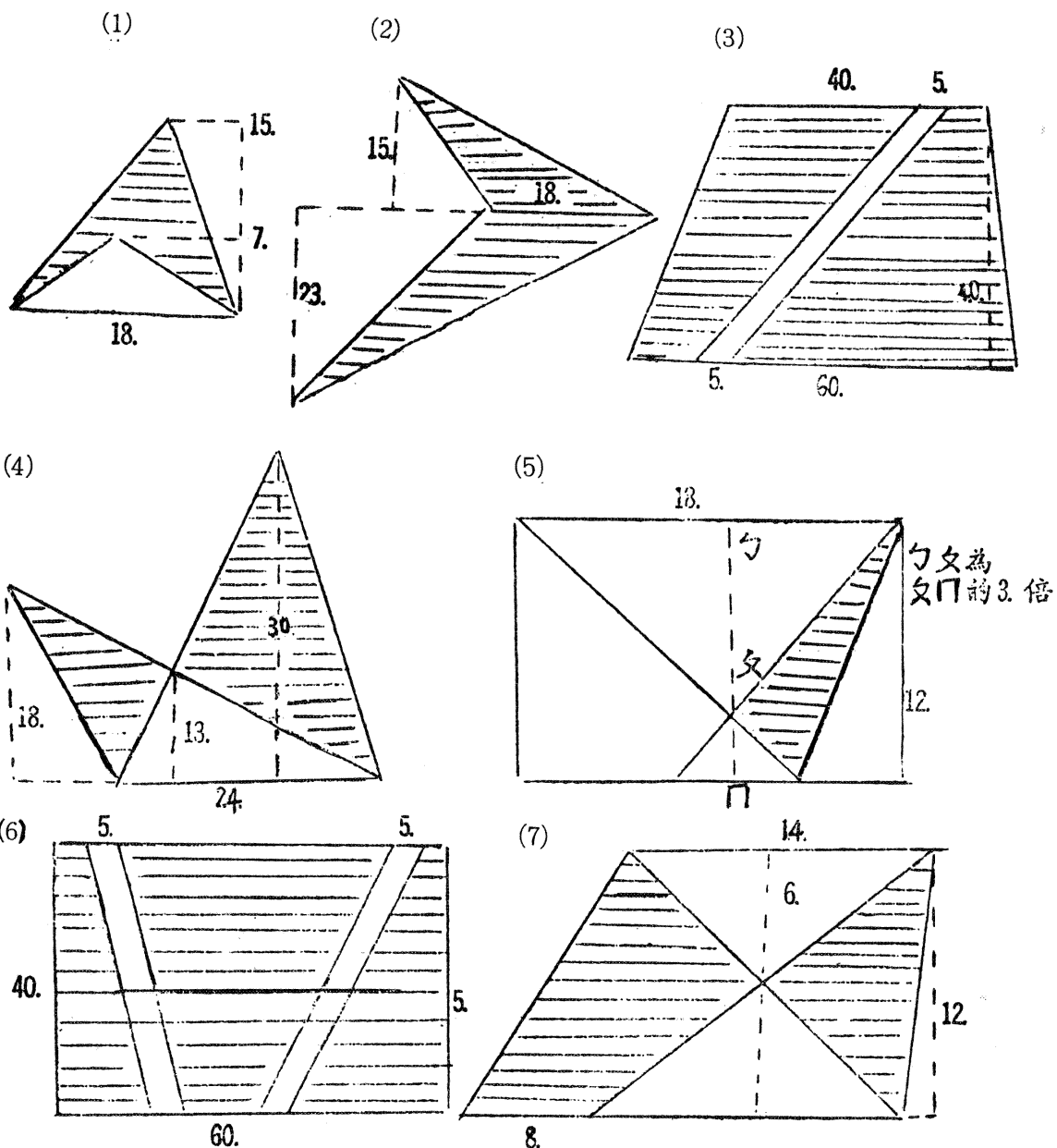


(8)

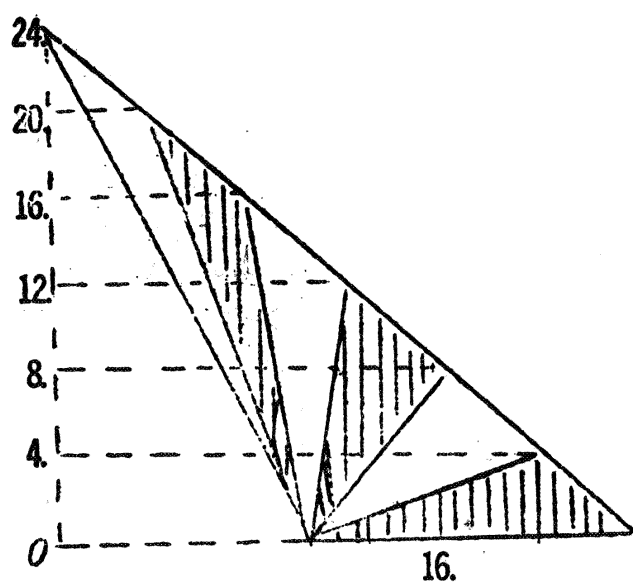


爲求實驗結果的精確，另外製作試題一份，給一、四兩班同學在複測時使用，另二、三兩班同學則仍使用初測試題，以研究同一試題前後兩次使用的影響。

試題 2 的內容如下：



(8)

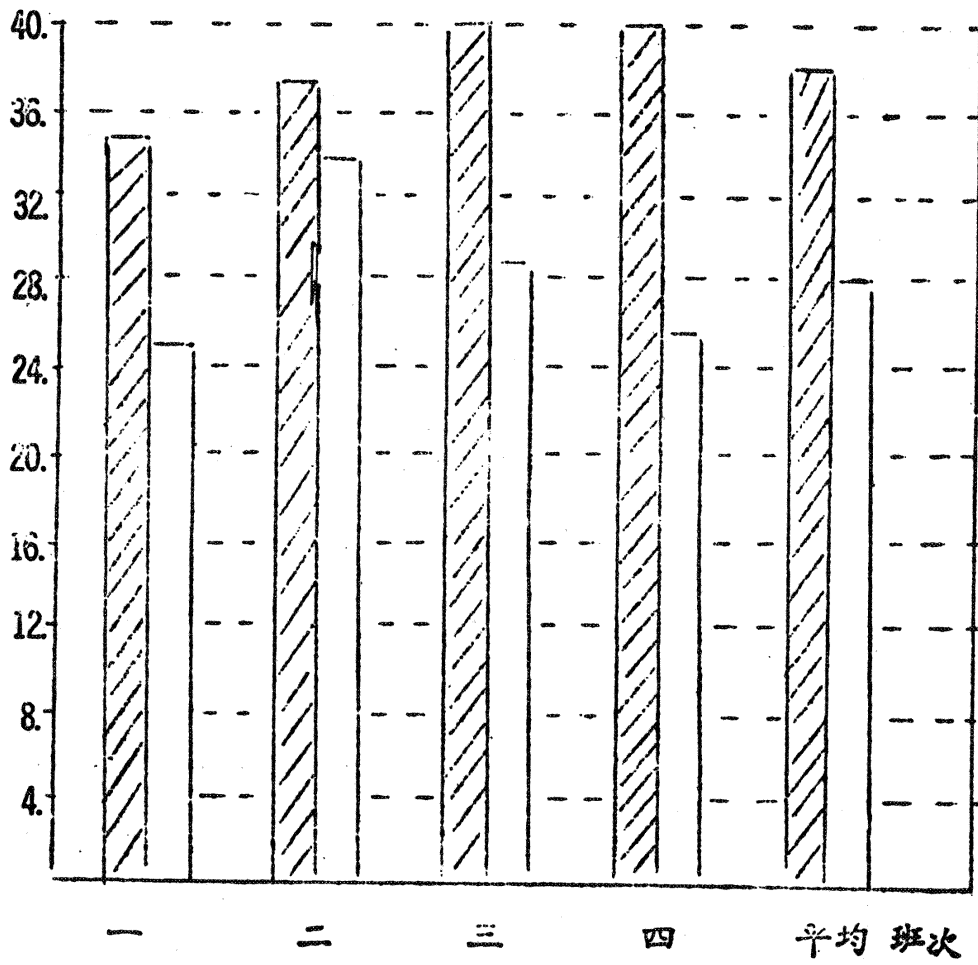



(二)測驗結果：

初測及複測的結果統計如下：

初複測各班使用時間比較圖

分



 
初測 複測

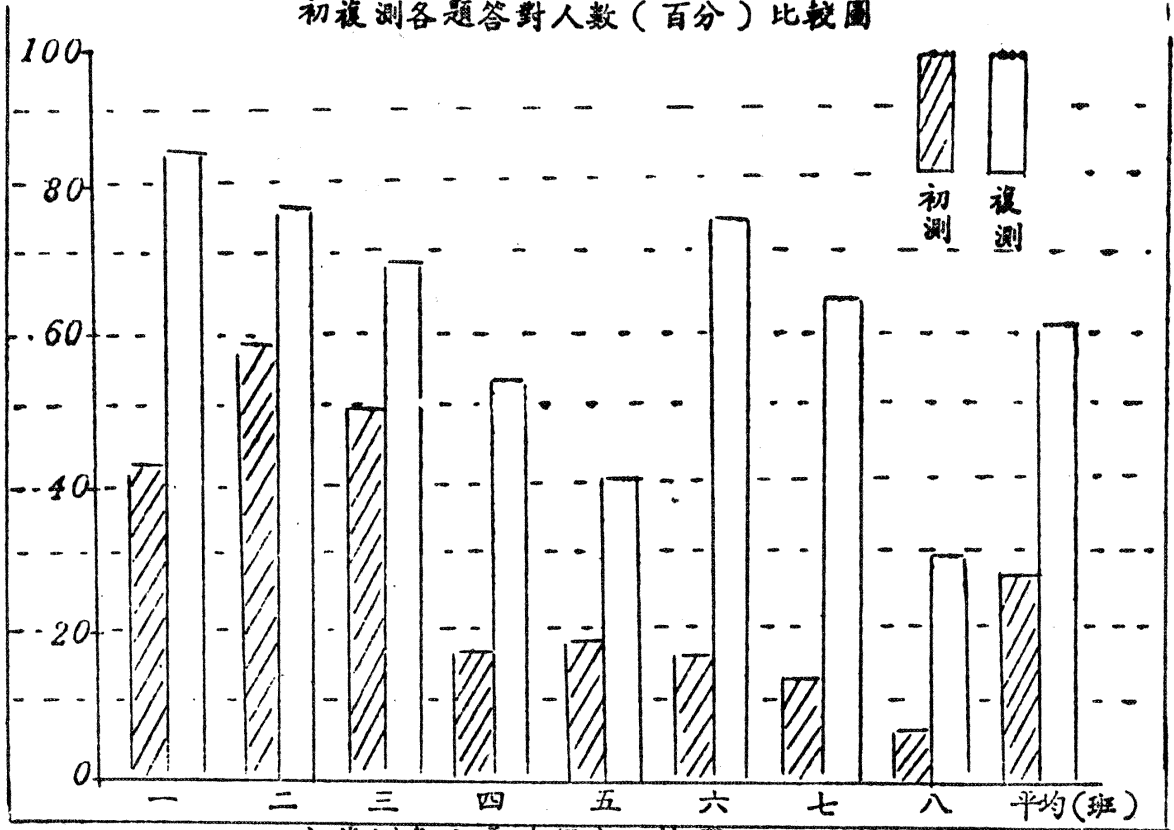
初測答對題數及答題方法統計表

題次 方法 班次	1		2		3		4		5		6		7		8		合計		平均 %
	ㄅ	ㄆ	ㄅ	ㄆ	ㄅ	ㄆ	ㄅ	ㄆ	ㄅ	ㄆ	ㄅ	ㄆ	ㄅ	ㄆ	ㄅ	ㄆ	ㄅ	ㄆ	
一	21	2	36		30		11		11		6		6		4		125	2	29.95
二	21	2	35		23	3	7		11	1	4	1	8	1	4		113	8	28.01
三	15	7	25	2	15	5	9	2	11		5	4	4		4		88	20	28.13
四	17	2	20	1	22	2	8		5		11	4	5	4	2		90	13	26.82
合計	74	13	116	3	90	10	35	2	38	1	26	9	23	5	14		416	43	
	87		119		100		37		39		35		28		14		459		
平均%	42.85		58.62		49.26		18.23		19.21		17.24		13.79		6.9		28.26		
備註	ㄅ：指用大三角形減小三角形的方法計算。 ㄆ：指用ㄅ法以外的方法算。																		

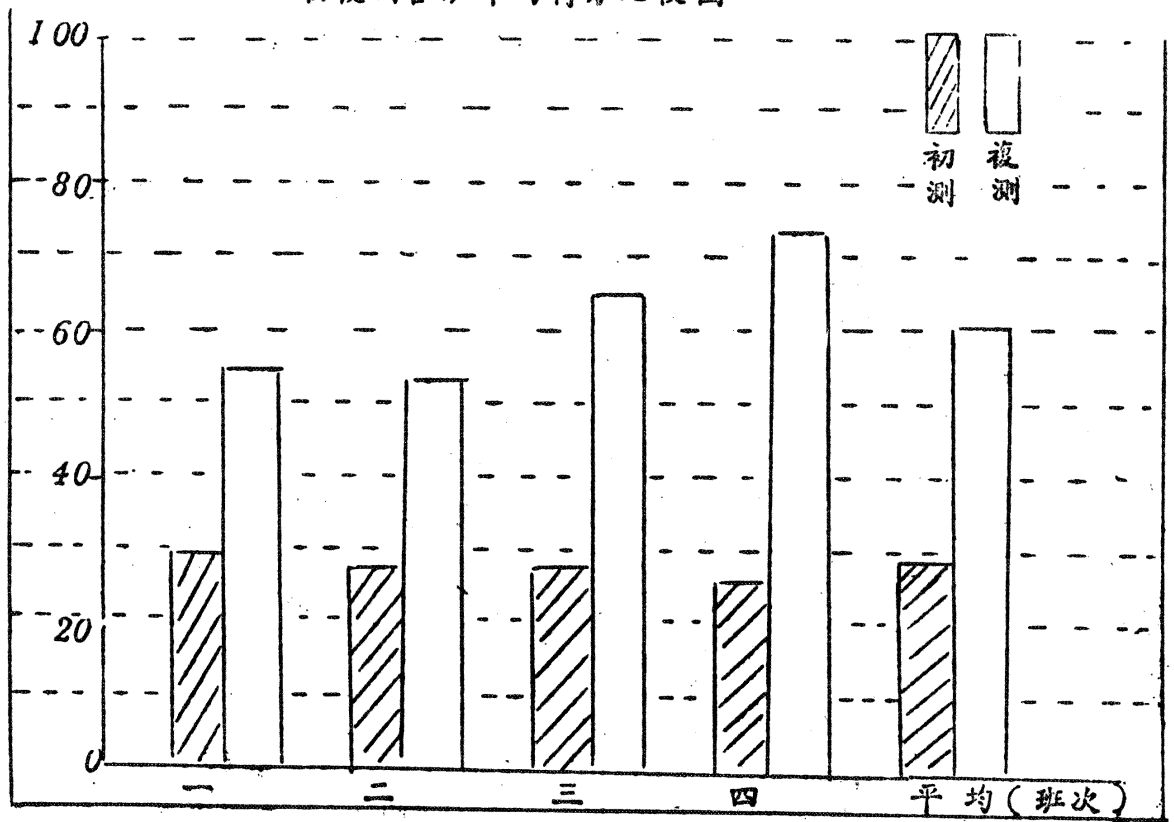
複測答對題數及答題方法統計表

題次 方法 班次	1		2		3		4		5		6		7		8		合計		平均 %
	ㄅ	ㄆ	ㄅ	ㄆ	ㄅ	ㄆ	ㄅ	ㄆ	ㄅ	ㄆ	ㄅ	ㄆ	ㄅ	ㄆ	ㄅ	ㄆ	ㄅ	ㄆ	
一	37		40		37	2	28		13		40		25		13		233	2	29.95
二	47	1	23	15	28	3	19	1	17	6	36	1	28		6	4	204	31	54.4
三	39	5	31	6	26	4	21		27	3	35		37	1	17	1	233	20	65.89
四	46		42		41		41		18		42		40		18		285		74.22
合計	166	6	136	21	132	9	109	1	75	9	153	1	130	1	54	5	955	53	
	172		157		141		110		84		154		131		59		1008		
平均%	84.73		77.34		69.46		54.19		41.38		75.86		64.53		29.06		62.07		
備註	ㄅ：指用新觀念的方法作答。 ㄆ：指用原來方法作答。																		

初複測各題答對人數(百分)比較圖



初複測各班平均得分比較圖



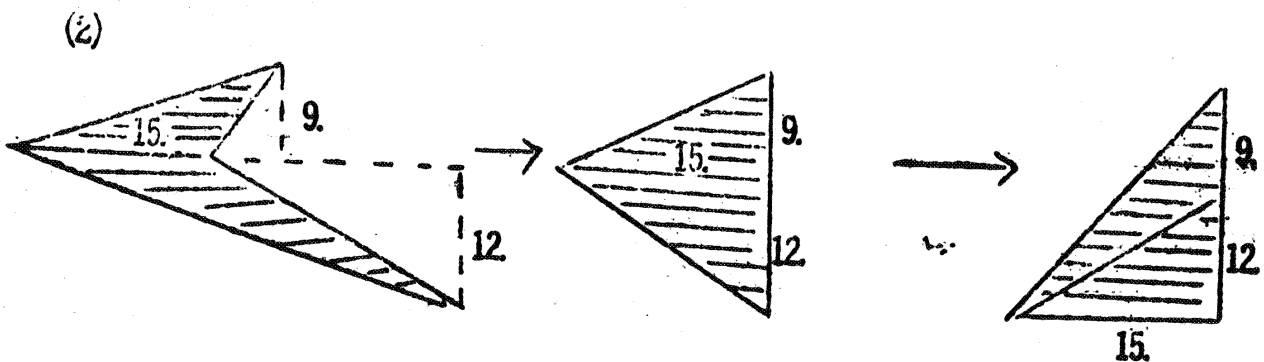
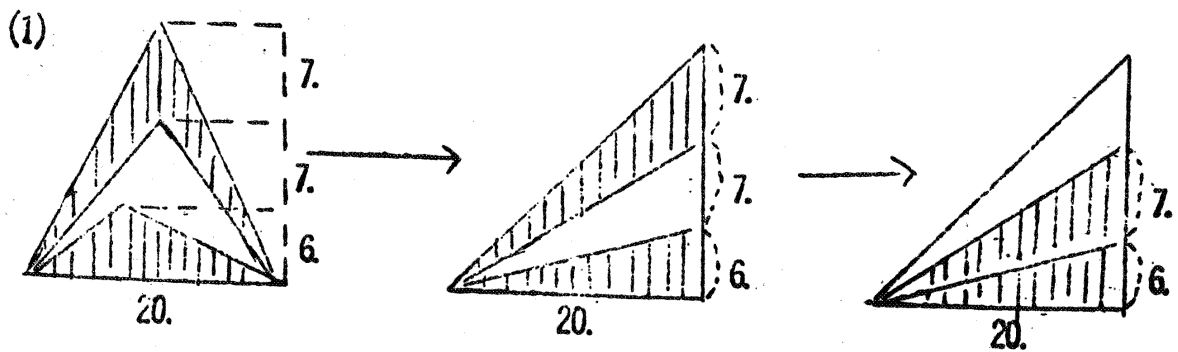
六、分析比較

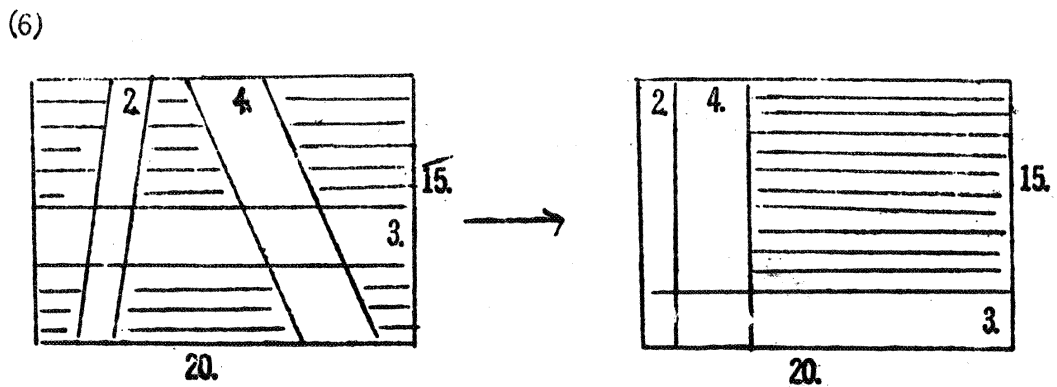
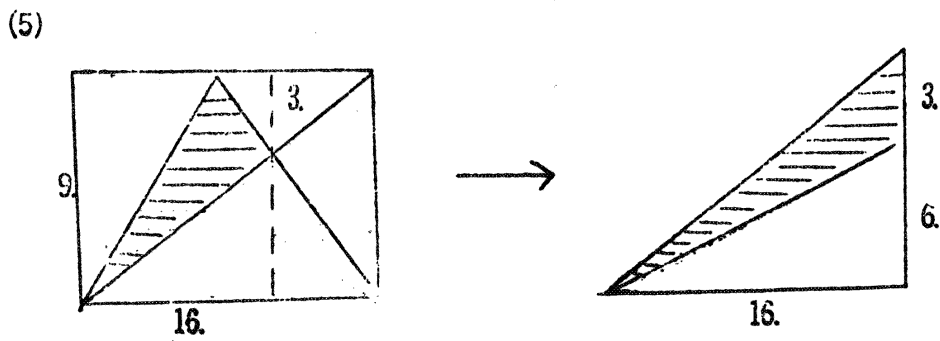
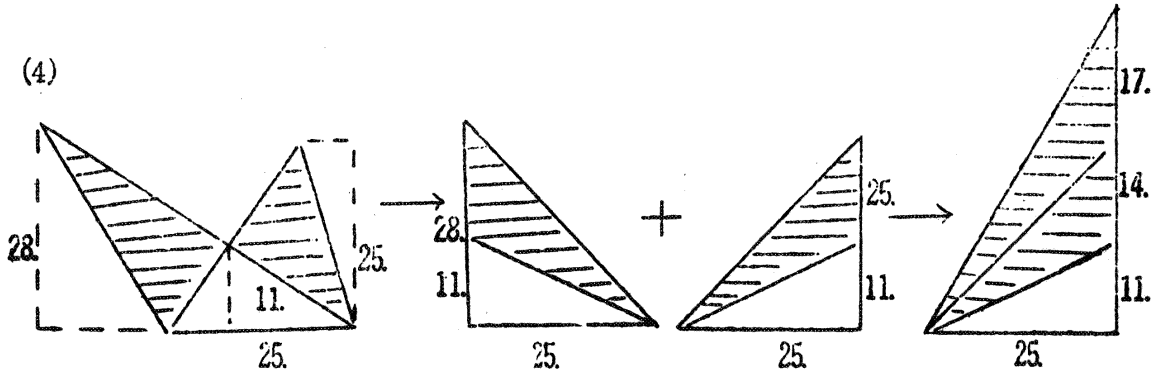
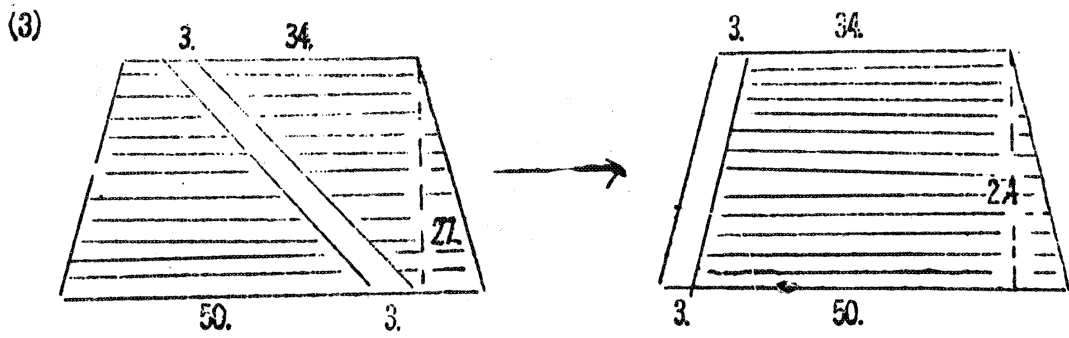
(一)介紹這種移形觀念前：

1. 花費時間平均：37.77 分。
2. 答對題數共 459 題，平均每人答對 2.26 題，占 28.26 %。
3. 答題方法：在答對的 459 題中，用大三角形減小三角形的有 416 題，占 90.63%，使用其他方法的 43 題，占 9.37 %。

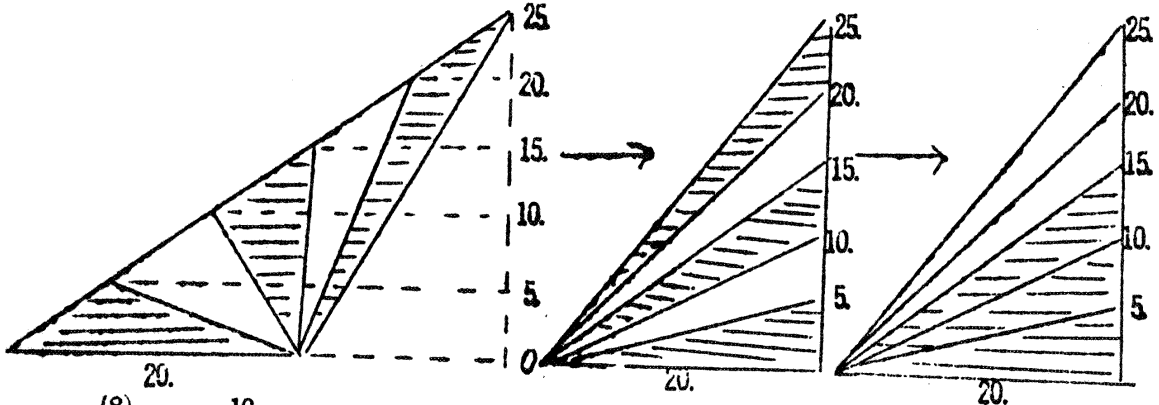
(二)介紹移形觀念後：

1. 花費時間平均 28.23 分，減少 9.54 分。
2. 答對題數共 1008 題，平均每人答對 4.97 題，占 62.07 % 比初測增加 549 題，增加率 119.61 %。
3. 作答方法，在答對的 1008 題中，用新觀念作答的 955 題占 94.74%，仍用舊方法作答的 53 題，占 5.26 %。
4. 能改變圖形如下：

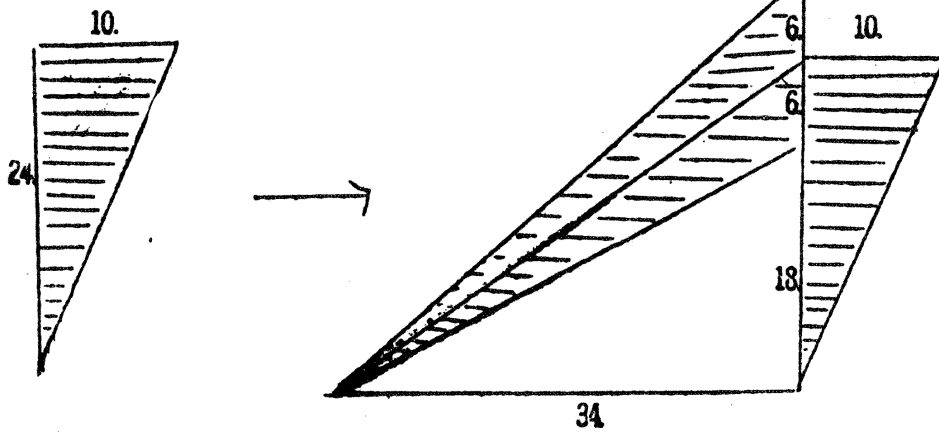
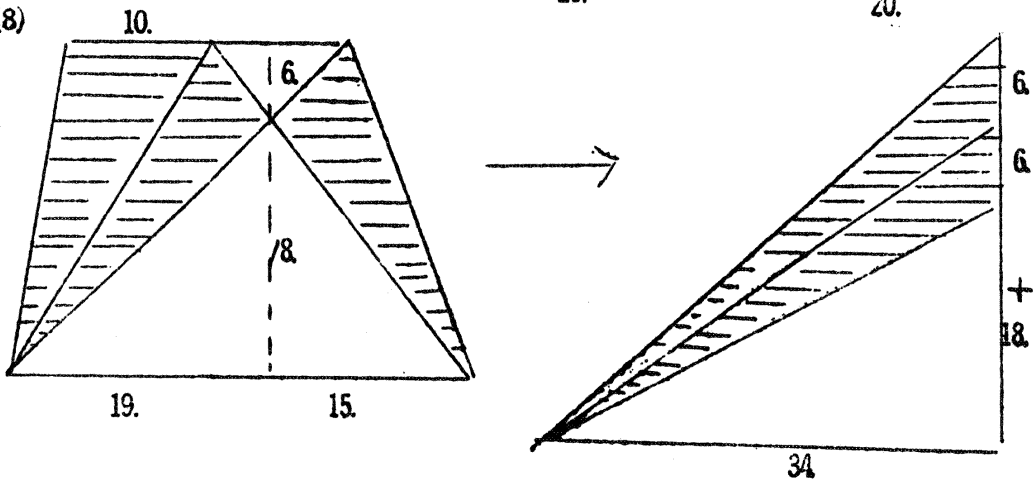




(7)



(8)



(三)實驗結果後發現：

1. 介紹移形觀念前僅9.37 %能應用結合律或裁併的方法作答，介紹移形觀念後，有94.74%的同學能用新觀念作答，並且多數能強化結合律的應用。可見此法能普遍被同學們接受應用。
2. 這種觀念能把複雜的圖形簡化，演算過程簡單，因此同學們作答時間減少，而正確率却大大提高，尤其是原先愈複雜的形體，增加得愈多。
3. 初測、複測時使用同一試題，對實驗並不會有影響。使用原試題的二班（二、三兩班）平均增113.1%，使用另一試題的二班（一、四兩班），平均增126.09%。
4. 同一種教材，施用在六年級及五年級同學身上，六年級同學接受應用的能力較高。
五年級平均增89.52%
六年級平均增154.98%

七、結 論

經實驗推展結果顯示：

- (一)移形換位的觀念能普遍受到同學們的歡迎，並被接受應用。
- (二)這種觀念增加同學們對結合律的認識與應用的能力。
- (三)這種觀念摒除同學們過去遇到複雜圖形，只知拼聚或裁減的習慣，進而能應用原理，突破形狀的拘束（限制），勇於改變圖形求得更快更好的方法。
- (四)移形換位的方法，不呆板，富挑戰性，能激發同學們的學習興趣對自己產生信心。

評語：本件對幾何圖形面積的計算有簡捷的方法，雖非創新，但對高小學生而言，頗值得鼓勵。