長方形的面積、周長與有趣的數

初小組數學科第三名

彰化縣民生國民小學

作　　者：王惠萱、李皚莉
蕭亦隆、張書銘
等十人
指導教師：蔡淑美、蔡玉瑟

一、研究動機

當我們在數學第七册第十三單元中，學到面積的意義與計算，老師給我們利用方格紙的疊合，來比較等周長的長方形面積，結果發現：一樣的周長，所圍成的長方形中，以正方形的面積爲最大。這時我們興起了疑問，爲什麼會形成這樣的結果呢？它們的面積有什麼關係？於是我們請教老師，展開了我們的研習活動，並從中發現了有趣的數。

二、研習內容與目的

㈠等周長的各種長方形之間的面積關係。
㈡等面積的各種長方形之間的周長關係。
㈢發現有趣的數。

三、研習方式

㈠分組研究——演算、觀察。
㈡共同討論——探討、分析。
㈢整理結果——綜合、歸納。
㈣提出報告——展出成果。

四、研習經過

㈠研習１：

問題：等周長的長方形，長寬差距的大小與面積關係是怎樣？

實例：

周　長	20	20	20	20	20	20	20	20	20
長	9	8	7	6	5	4	3	2	1
寬	1	2	3	4	5	6	7	8	9
面　積	9	16	21	24	25	24	21	16	9
差	7	5	3	1	1	3	5	7	

周長	24	24	24	24	24	24	以下對稱相同
長	11	10	9	8	7	6	
寬	1	2	3	4	5	6	
面積	11	20	27	32	35	36	
差	9	7	5	3	1		

發現：1.周長一樣，各種長方形面積，以長和寬完全相等的正方形的面積爲最大。而長和寬的差距越大，面積越小。長和寬的差距越小，面積越大。

2.每相鄰兩項面積差爲1，3，5，7，9……。

研習2：

問題：等周長的長方形，長寬差距大小和等寬長（正方形）的面積比較。

實例：

周長	20	20	20	20	20
長	9	8	7	6	5
寬	1	2	3	4	5
面積	9	16	21	24	25
差	16	9	4	1	

周長	24	24	24	24	24	24
長	11	10	9	8	7	6
寬	1	2	3	4	5	6
面積	11	20	27	32	35	36
差	25	16	9	4	1	

$$
\begin{aligned}
5\times5 &= 25\\
6\times4 &= (5+1)\times(5-1) = 25-1 = 5^2-1^2 = 24\\
7\times3 &= (5+2)\times(5-2) = 25-4 = 5^2-2^2 = 21\\
8\times2 &= (5+3)\times(5-3) = 25-9 = 5^2-3^2 = 16\\
9\times1 &= (5+4)\times(5-4) = 25-16 = 5^2-4^2 = 9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
6\times6 &= 36\\
7\times5 &= (6+1)\times(6-1) = 36-1 = 6^2-1^2 = 35\\
8\times4 &= (6+2)\times(6-2) = 36-4 = 6^2-2^2 = 32\\
9\times3 &= (6+3)\times(6-3) = 36-9 = 6^2-3^2 = 27\\
10\times2 &= (6+4)\times(6-4) = 36-16 = 6^2-4^2 = 20\\
11\times1 &= (6+5)\times(6-5) = 36-25 = 6^2-5^2 = 11
\end{aligned}
$$

發現：1. 周長一樣，當長方形的一邊長比正方形邊長多1，另一邊必是少1。如一邊多2，另一邊必定少2，……其他類推。

2. 由以上的結果，我們可以歸納爲一般式：

設ㄅ：代表正方形的邊長。

　ㄆ：代表長方形邊長與正方形邊長的差。

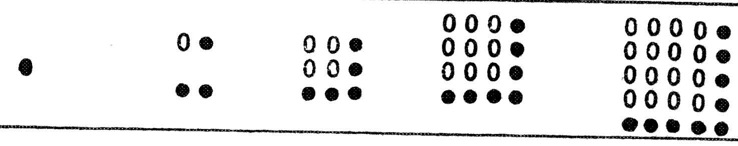
則長方形面積：　（ㄅ+ㄆ）×（ㄅ−ㄆ）$=$ㄅ^2 −ㄆ^2

3. 由這個公式可以驗證研習1的發現：

(1)等周長的長方形中以正方形的面積最大即ㄅ^2，且當長寬的差距越大，面積越小。

ㄅ^2 ＞（ㄅ^2 − 1^2）＞（ㄅ^2 − 2^2）＞（ㄅ^2 − 3^2）＞（ㄅ^2 − 4^2）………

(2)每相鄰兩項面積差爲1，3，5，7……

面　積	ㄅ^2	ㄅ$^2-1^2$	ㄅ$^2-2^2$	ㄅ$^2-3^2$	ㄅ$^2-4^2$	ㄅ$^2-5^2$
減　數	0	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2
減數差	1	3	5	7	9	
圖　示						

(二)研習3：

問題：等面積的長方形，長寬的差距與周長的關係怎樣？

實例：

面 積	100	100	100	100	100	100	100	100	100
長	1	2	4	5	10	20	25	50	100
寬	100	50	25	20	10	5	4	2	1
周 長	202	104	58	50	40	50	58	104	202
長差	98	46	8	10	10	8	46	98	

面 積	64	64	64	64	以下對稱相同
長	1	2	4	8	
寬	64	32	16	8	
周 長	130	68	40	32	
長差	62	28	8		

發現：面積一樣，各種長方形的周長中，以正方形爲最短，長和寬的差距越大，周長越長；長和寬的差距越小，周長越短。

研習4：

問題：等面積的長方形，長寬差距大小和等寬長（正方形）的周長比較。

實例：

面積	16	16	16
長	1	2	4
寬	16	8	4
周長	34	20	16
長差	18	④	

面積	36	36	36	36	36
長	1	2	3	4	6
寬	36	18	12	9	6
周長	74	40	30	26	24
長差	50	16	⑥	2	

發現：1.面積一樣，長方形的一邊長為正方形邊長的2倍，另一邊必為正方形邊長的一半。一邊為3倍，另一邊必為$\frac{1}{3}$倍，………其他類推。

2.長方形的邊長各為正方形邊長的2倍、$\frac{1}{2}$時，這兩個長方形的周長差，恰為正方形的邊長。

驗證：設ㄅ代表正方形的邊長

正方形的周長 $= \text{ㄅ} \times 4$

$= 4\,\text{ㄅ}$

長方形的周長 $= 2\,\text{ㄅ} \times 2 + \frac{1}{2}\,\text{ㄅ} \times 2$

$= 5\,\text{ㄅ}$

$5\,\text{ㄅ} - 4\,\text{ㄅ} = 1\,\text{ㄅ}$

㈢由以上發現的結果，來找出有趣的數。

研習5：

問題：連續三個整數的關係是怎樣？

由研習2發現的結果知

$(ㄅ+ㄆ)\times(ㄅ-ㄆ)=ㄅ^2-ㄆ^2$

$(5+1)\times(5-1)=5^2-1^2$

$6 \times 4 = 5^2-1$

4，5，6恰爲連續三個整數。

實例： 2 ， 3 ， 4

$(3-1) \qquad (3+1)$

$4\times2=(3+1)\times(3-1)=3^2-1$

3 ， 4 ， 5

$(4-1) \qquad (4+1)$

$5\times3=(4+1)\times(4-1)=4^2-1$

發現：三個連續整數，前後數相乘的積爲中間數的平方減1。

研習6：

問題：連續四個整數的關係又怎樣？

實例：

$$\underbrace{2,\overbrace{3,4}^{3\times4=12},5}_{2\times5=10}$$

$(3\times4)-(2\times5)=2$

$$\underbrace{3,\overbrace{4,5}^{4\times5=20},6}_{3\times6=18}$$

$(4\times5)-(3\times6)=2$

驗證：設連續四個整數爲

$ㄅ,\ ㄅ+1,\ ㄅ+2,\ ㄅ+3$

$$\underbrace{ㄅ,\ \overbrace{ㄅ+1,\ ㄅ+2}^{ㄅ^2+3ㄅ+2},\ ㄅ+3}_{ㄅ^2+3ㄅ}$$

$$\begin{array}{r} ㄅ+1 \\ \times\ ㄅ+2 \\ \hline +2ㄅ+2 \\ ㄅ^2+1ㄅ \quad \\ \hline ㄅ^2+3ㄅ+2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} ㄅ+3 \\ \times\ ㄅ \\ \hline ㄅ^2+3ㄅ \end{array}$$

所以（ㄅ＋1）×（ㄅ＋2）－ㄅ×（ㄅ＋3）＝2

發現：四個連續整數，中間第二，第三兩數的乘積比前後第一，第四兩數的乘積大2，也可以說是將兩個積數視爲另一組連續三數中的前後數。

研習7：

問題：連續四個整數的乘積怎樣？

由研習2，5，6發現的結果知

實例：

$$\underbrace{2\times\overbrace{3\times4}^{12}\times5}_{10}\qquad\qquad\underbrace{3\times\overbrace{4\times5}^{20}\times6}_{18}$$

$$=10\times12\qquad\qquad=18\times20$$

$$=11^2-1\qquad\qquad=19^2-1$$

發現：連續四整數的乘積，一定是某數的平方減1；又該某數即是：前後兩數乘積與中間兩數乘積的中間數。

研習8：

問題：由1開始連續奇數的和怎樣？

由研習1，2知：與正方形邊長差距逐漸差大，面積逐漸變小。兩相鄰二項面積爲1，3，5，7，9……，恰爲連續的奇數，這些數累進的和爲

實例：

連續奇數	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
累進和		4	9	16	25	36	49	64	81	100
平方數		2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2

$$
\begin{array}{ll|l}
1+3 & =4=2^2 & (3+1)\div 2=2 \\
1+\boxed{3}+5 & =9=\boxed{3}^2 & (5+1)\div 2=3 \\
1+3+5+7 & =16=4^2 & (7+1)\div 2=4 \\
1+3+\boxed{5}+7+9 & =25=\boxed{5}^2 & (9+1)\div 2=5 \\
1+3+5+7+9+11+36 & =6^2 & (11+1)\div 2=6
\end{array}
$$

$$1+3+5+\boxed{7}+9+11+13=49=\boxed{7}^2$$

$$1+3+5+7+9+11+13+15=64=8^2$$

$$1+3+5+7+\boxed{9}+11+13+15+17=81=\boxed{9}^2$$

$$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=100=10^2$$

發見：由1開始的一組連續奇數的和，一定是某數的平方，又該某數爲該組連續奇數的首末兩數的平均數。若該組爲奇數項時，該數爲中間數。

五、結　語

啊！原來數是這麼的有趣，透過研習活動，我們知道：長方形面積，等周長時，以正方形的面積爲最大；等面積時，以正方形的周長爲最小。由它們的關係，歸納出一個公式——

$$(ㄅ+ㄆ)\times(ㄅ-ㄆ)=ㄅ^2-ㄆ^2\quad,$$

並且發現了三個連續整數的關係，前後數相乘洽爲中間數的平方減1；四個連續整數的乘積，一定是平方數減1；由1開始連續奇數的累進和爲平方數。

我們有這幾個小小的發現，眞叫人興奮，更增加了學習數學的信心。我們還要繼續研究，希望能有更多更有趣的發現。

評語：從實際計算歸納出

①等周長的長方形，長寬差距的大小與面積的關係。

②等面積的長方形，長寬的差距與周長的關係。

③連續整數之間的關係，本作品雖創意不多，但說明完整，仍值得鼓勵。