

小威能！我更能！

初小組數學科第二名

台中市松竹國小

作者：朱湘鈺、等六名

指導教師：林進丁、邱明芳



一、研究動機

有一天，我最喜歡的卡通節目“北海小英雄”所開播的故事是有一位江湖客和水手們玩抓寶遊戲，結果水手們輸光了身上的錢。小威看了，心裏很不服氣，他想了整個晚上，突然大叫一聲說：「有了！」第二天，他終於贏了江湖客。

看完了卡通，我心裏一直不明白“小威到底用什麼方法贏了江湖客呢？於是到學校和幾位同學研究，大家也有相同的疑問，引起我們研究的興趣！老師聽了就指導我們進行下列的研究。

二、研究目的

- (一)從這個研究活動中，知道在本遊戲中得到勝利的條件和方法。
- (二)能在本遊戲中，歸納出得勝的規律性及公式。
- (三)使在遊戲中強化我們敏捷的思考力及心算能力。

三、活動材料

小石子晶瑩可愛，攜帶方便，不花錢買，取得容易，深受同學喜愛，我們決定以石頭當我們的遊戲材料。（爲了便於活動進行，我們將石子彩成各種顏色。）

四、研究過程

(一)活動方式：（抓寶3）

- 1.小石子最多只能取3粒，所以活動名稱我們定爲抓寶3。
- 2.以兩人遊戲爲限。
- 3.兩人猜拳，贏者先取1至3粒石子（可取1粒，可取2粒，可取3粒）相互輪流，直至最後一粒石子由誰取得者爲輸方。
- 4.選取小石子10至30粒（可視同學的心算能力，加以擴大或縮小石子粒數）。

(二)嘗試錯誤：

- 1.先拿10粒石子任意抓寶，記載結果，勝負大約各佔一半。
 - 2.將各種抓寶方式歸類、提出假設。
 - 3.依據假設，利用寒假時間和同學進行挑戰，看誰贏最多次？
- 我們統計了50次的抓寶結果，以下是我們的勝數一覽表：

姓名	劉文慈	劉安泰	朱湘鈺	林怡婷	李雅雯	黃建華
勝數	31	24	28	30	32	24

- 4.由此可知我們沒有辦法把握全勝，所以做尋找控制基數的研究。

(三)尋找控制基數：

以下是甲以 10 粒石子爲例，歸納出其勝利的抓寶實例（甲代表我方，乙代表對方）。

姓名 次別	方式		甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲
	1	10 ⁽¹⁾ →	9 ⁽¹⁾ →	8 ⁽¹⁾ →	7 ⁽¹⁾ →	6 ⁽¹⁾ →	5 ⁽¹⁾ →	4 ⁽³⁾ →	1
2	10 ⁽¹⁾ →	9 ⁽²⁾ →	7 ⁽²⁾ →	5 ⁽²⁾ →	3 ⁽²⁾ →	1			
3	10 ⁽¹⁾ →	9 ⁽³⁾ →	6 ⁽¹⁾ →	5 ⁽²⁾ →	3 ⁽²⁾ →	1			
4	10 ⁽¹⁾ →	9 ⁽¹⁾ →	8 ⁽³⁾ →	5 ⁽³⁾ →	2 ⁽¹⁾ →	1			
5	10 ⁽²⁾ →	8 ⁽¹⁾ →	7 ⁽²⁾ →	5 ⁽¹⁾ →	4 ⁽³⁾ →	1			
					3 ⁽²⁾ →	1			
					2 ⁽¹⁾ →	1			
					1 ⁽¹⁾ →	1			

結果：(1)由嘗試錯誤中知道控制基數不可能爲 4。

(2)由 1 ~ 5 中得知，小石子數目剩下 5 粒時，扣除最後一粒石子還餘 4，對方取 1，我取 3。對方取 2，我取 2。對方取 3，我取 1。

(3)由表中歸納出石子數若剩下 5 粒時，就控制了必勝因素。

(四)歸納其他基數：

我們推測除了 5 以外，應該還有其他的控制基數，以下是我們的抓寶實例：

次別 \ 姓名 方式	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲
1	10 ⁽¹⁾ →9	9 ⁽¹⁾ →8	8 ⁽³⁾ →5	5 ⁽²⁾ →3	3 ⁽²⁾ →1		
2	10 ⁽²⁾ →8	8 ⁽³⁾ →5	5 ⁽¹⁾ →4	4 ⁽³⁾ →1		由乙控制了基數	
3	10 ⁽³⁾ →7	7 ⁽²⁾ →5	5 ⁽³⁾ →2	2 ⁽¹⁾ →1		由乙控制了基數	
4	10 ⁽¹⁾ →9	9 ⁽²⁾ →7	7 ⁽²⁾ →5	5 ⁽¹⁾ →4	4 ⁽³⁾ →1		
5	10 ⁽¹⁾ →9	9 ⁽³⁾ →6	6 ⁽¹⁾ →5	5 ⁽²⁾ →3	3 ⁽²⁾ →1		

結果：(1)由 2 3 4 得知 10 粒石子數時，不能取 2 或 3 粒，
因為基數 5 容易被乙控制，所以 6、7、8 三數不是次高基數。

(2)由 1 4 5 中可知，其最初基數 5 的次高基數為 9。

(3)由 $9 - 5 = 4$ 中推測再高基數可能為 13。

驗證：以 14 粒小石子為例的抓寶實例：

次別	姓名		甲		乙		甲		乙		甲	
	方式	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲
1		14 ⁽¹⁾ →13	13 ⁽¹⁾ →12	12 ⁽³⁾ →9	9 ⁽²⁾ →7	7 ⁽²⁾ →5	5 ⁽³⁾ →2	2 ⁽¹⁾ →1				
2		14 ⁽²⁾ →12	12 ⁽³⁾ →9	9 ⁽¹⁾ →8	8 ⁽³⁾ →5	5 ⁽¹⁾ →4	4 ⁽³⁾ →1					
3		14 ⁽³⁾ →11	11 ⁽²⁾ →9	9 ⁽³⁾ →6	6 ⁽¹⁾ →5	5 ⁽²⁾ →3	3 ⁽²⁾ →1					
4		14 ⁽¹⁾ →13	13 ⁽²⁾ →11	11 ⁽²⁾ →9	9 ⁽²⁾ →7	7 ⁽²⁾ →5	5 ⁽²⁾ →3	3 ⁽²⁾ →1				
5		14 ⁽¹⁾ →13	13 ⁽³⁾ →10	10 ⁽¹⁾ →9	9 ⁽³⁾ →6	6 ⁽¹⁾ →5	5 ⁽¹⁾ →4	4 ⁽³⁾ →1				

結果：(1)由 2 3 5 得知 14 粒石子數時，不能取 2 或 3 粒，因為基數 9 容易被乙控制，所以 10、11、12 數不是再次高基數。

(2)由 1 4 5 可知，基數 9 的再高基數為 13。

(五)提出假設：

- 1 由最少基數 5 再加 4 等於 9。($9 - 5 = 4$)
- 2 以 9 為基數再加 4 等於 13。($13 - 9 = 4$)
- 3 由 1、2 依次類推，假設其他基數如下表：

控制基數	5	9	13	17	21	25	29	33
------	---	---	----	----	----	----	----	----	-------

(六)驗證：

以 30 粒石子、26 粒石子為例，(其餘實例見簿冊二)只要能把握住基數，則可獲勝。

次別	姓名		姓名		姓名		姓名	
	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	
1	30 ⁽¹⁾ →29	29 ⁽¹⁾ →28	28 ⁽³⁾ →25	25 ⁽²⁾ →23	23 ⁽²⁾ →21	21 ⁽³⁾ →18	18 ⁽¹⁾ →17	
	17 ⁽²⁾ →15	15 ⁽²⁾ →13	13 ⁽¹⁾ →12	12 ⁽³⁾ →9	9 ⁽²⁾ →7	7 ⁽²⁾ →5		
2	26 ⁽¹⁾ →25	25 ⁽²⁾ →23	23 ⁽²⁾ →21	21 ⁽³⁾ →18	18 ⁽¹⁾ →17	17 ⁽³⁾ →14	14 ⁽¹⁾ →13	
	13 ⁽²⁾ →11	11 ⁽²⁾ →9	9 ⁽¹⁾ →8	8 ⁽³⁾ →5	5 ⁽²⁾ →3	3 ⁽²⁾ →1		

(七)結論：

1. 若能事先把握控制基數數目，則取勝率達百分之一百。
2. 若數目多時，難免發生取數錯誤而失去應控制的基數，導致失敗，因此在多次嘗試中歸納其他方式。
3. 因各基數的差值都為4，如果與對方互取時，先控制其中一基數後（視石子粒數目而定）若對方取1，我則取3。對方取2我則取2。對方取3，我則取1。使雙方所取數的總和為4，則錯誤率降為0（例：石子數設為15粒、20粒）。

姓名	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲
(1) 抓寶方式	15 ⁽²⁾ →13	13 ⁽²⁾ →11	11 ⁽²⁾ →9	9 ⁽³⁾ →6	6 ⁽¹⁾ →5	5 ⁽³⁾ →2	2 ⁽¹⁾ →1
說明	先控制基數		2+2=4		3+1=4		3+1=4

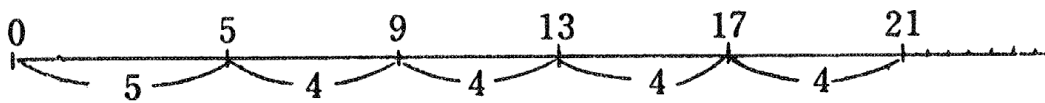
姓名	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲
(2) 抓寶方式	20 ⁽³⁾ →17	17 ⁽²⁾ →15	15 ⁽²⁾ →13	13 ⁽³⁾ →10	10 ⁽¹⁾ →9	9 ⁽¹⁾ →8	8 ⁽³⁾ →5
說明	先控制基數		2+2=4		3+1=4		1+3=4

4. 若對方已控制住某位基數時，除非對方已尋出規律性，否則我方取 1，只要對方不取 3，尚可控制住下一位基數。
 (例如下表，石子數設為 25 粒、18 粒)。

(1)	姓名	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲
	抓寶方式	25 ⁽³⁾ 22	22 ⁽¹⁾ 21	21 ⁽¹⁾ 20	20 ⁽²⁾ 18	18 ⁽¹⁾ 17	17 ⁽²⁾ 15	15 ⁽²⁾ 13
	說明		乙方控制	我方取 1	對方取 2	我方控制		2+2=4

(2)	姓名	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙
	抓寶方式	18 ⁽¹⁾ 17	17 ⁽¹⁾ 16	16 ⁽³⁾ 13	13 ⁽¹⁾ 12	12 ⁽¹⁾ 11	11 ⁽²⁾ 9	
	說明	乙方控制	我取 1	乙取 3	我取 1	乙方不取 3	我方控制	

5. 因每個控制基數的差都為 4，為了減少錯誤，把握先機，我們將它畫成數線圖，並歸納出另一公式：



(石子總數 - 5 (第一位控制基數)) ÷ 4 (雙方互取總和數) = 間隔數……餘數 (取數) ……………式(1)

- (1) 此餘數即為我方必須先取的數目，餘數為 0 表示此數即為控制基數。
- (2) 如果沒有餘數則請對方先取，使得之餘數再取之。或我方先取 1，只要對方不取 3，尚可控制下一位基數，所以需謹慎把握機會，先控制基數。
- (3) 如果由乙方先取，則將取過的數目當作石子總數，導入式 (1)。

驗證：(石子數設為 30 粒、17 粒，其餘見簿冊(三))

姓名	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲
抓寶方式	30 $\xrightarrow{(1)}$ 29	29 $\xrightarrow{(3)}$ 26	26 $\xrightarrow{(1)}$ 25	25 $\xrightarrow{(2)}$ 23	23 $\xrightarrow{(2)}$ 21	21 $\xrightarrow{(1)}$ 20	20 $\xrightarrow{(3)}$ 17
說明	$(30-5) \div 4 = 6 \dots 1$ 先取餘數		3+1=4		2+2=4		1+3=4

姓名	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙
抓寶方式	17 $\xrightarrow{(2)}$ 15	15 $\xrightarrow{(2)}$ 13	13 $\xrightarrow{(1)}$ 12	12 $\xrightarrow{(3)}$ 9	9 $\xrightarrow{(3)}$ 6	6 $\xrightarrow{(1)}$ 5	
說明				1+3=4		3+1=4	

姓名	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲
抓寶方式	17 $\xrightarrow{(2)}$ 15	15 $\xrightarrow{(2)}$ 13	13 $\xrightarrow{(1)}$ 12	12 $\xrightarrow{(2)}$ 10	10 $\xrightarrow{(1)}$ 9	9 $\xrightarrow{(3)}$ 6	6 $\xrightarrow{(1)}$ 5
說明	取2易被乙方控制		我方取1	對方不取3	我方控制		3+1=4

(六)推論與綜合：

1. 抓寶2：

(1)小石子最多只能取2粒，所以活動名稱我們定為抓寶2。

(2)石子數以取1至2粒為限，活動方式和抓寶3相同。

(3)尋找控制基數：

由抓寶3推出 $(3+1)+1=5$ 。(括弧內3為對方所取最多數，括弧內1為我方所取最少數)。

所以抓寶2的第一位控制基數為： $(2+1)+1=4$ (括弧內的2為對方所取最多數，括弧內的1為我方所取最少數)。

(4)雙方互取總和數：

由抓寶3推出 $(3+1)=4$ 。所以抓寶2的雙方互取總和數為 $(2+1)=3$ 。

(5)推出並假設其他控制基數：

控制基數	4	7	10	13	16	19	22
------	---	---	----	----	----	----	----	-------

(6)由抓寶 3 的式(1)推出抓寶 2 的迅求取數公式：

$$(\text{石子總數} - 4) \div 3 = \text{間隔數} \cdots \cdots \text{餘數} \cdots \cdots \text{式(2)}$$

驗證：(石子數設為 15 粒、11 粒，導入式(2)，餘見簿冊(四)。

↵	姓名	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲
	抓寶方式	15 $\xrightarrow{(2)}$ 13	13 $\xrightarrow{(1)}$ 12	12 $\xrightarrow{(2)}$ 10	10 $\xrightarrow{(2)}$ 8	8 $\xrightarrow{(1)}$ 7	7 $\xrightarrow{(2)}$ 5	5 $\xrightarrow{(1)}$ 4
	說明	$(15-4) \div 3 = 3 \cdots 2$ 取餘數		1+2=3		2+1=3		

↵	姓名	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙
	抓寶方式	11 $\xrightarrow{(2)}$ 9	9 $\xrightarrow{(2)}$ 7	7 $\xrightarrow{(1)}$ 6	6 $\xrightarrow{(2)}$ 4	4 $\xrightarrow{(2)}$ 2	2 $\xrightarrow{(1)}$ 1	
	說明		$(9-4) \div 3 = 1 \cdots 2$		1+2=3		2+1=3	

2. 抓寶 4 :

(1)小石子最多只能取 4 粒，所以活動名稱我們定為抓寶 4。

(2)石子數以取 1 至 4 粒為限，活動方式和抓寶 3，2 相同。

(3)尋找控制基數：

由抓寶 3，抓寶 2 推出抓寶 4 的第一位控制基數為：

$$(4+1)+1=6$$

(4)雙方互取總和數：

由抓寶 3，抓寶 2 推出雙方互取總和數為 $(4+1)=5$

(5)推出並假設其他控制基數：

控制基數	6	11	16	21	26	31	36
------	---	----	----	----	----	----	----	-------

(6)由抓寶 3、抓寶 2 的式(1)(2)推出抓寶 4 的迅求取數公式

$$(\text{石子總數} - 6) \div 5 = \text{間隔數} \cdots \cdots \text{餘數} \cdots \cdots \text{式(3)}$$

驗證：(石子數設為 25 粒，其餘詳見簿冊(五))

ウ	姓名	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲
	抓寶方式	25 ⁽⁴⁾ →21	21 ⁽³⁾ →18	18 ⁽²⁾ →16	16 ⁽⁴⁾ →12	12 ⁽¹⁾ →11	11 ⁽²⁾ →9	9 ⁽³⁾ →6
	說明	$(25-6) \div 5 = 3$4		3+2=5		4+1=5		2+3=5

ウ	姓名	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙
	抓寶方式	25 ⁽⁴⁾ →21	21 ⁽¹⁾ →20	20 ⁽³⁾ →17	17 ⁽¹⁾ →16	16 ⁽⁴⁾ →12	12 ⁽¹⁾ →11	11 ⁽³⁾ →8
	說明	乙方控制	我方取1	對方 不取4	我方控制		4+1=5	

五、實驗結果

經過反覆實驗、推論、驗證的結果，我們歸納出下列幾點：

(一) 抓寶數 + 1 = 雙方互取總和數。

(二) 雙方互取總和數 + 1 = 第一位控制基數。

(三) $(\text{石子總數} - \text{第一位控制基數}) \div \text{雙方互取總和數}$

= 間隔數.....餘數(開始的取數).....公式(一)

我們將以上幾點列成表格：

活動項目	基數 次數	控制基數			
		1	2	3	4 ……
抓寶 2	2	$(2+1+1)4$	$\xrightarrow{+3(2+1)} 7$	$\xrightarrow{+3} 10$	$\xrightarrow{+3} 13 \xrightarrow{+3} \dots$
抓寶 3	3	$(3+1+1)5$	$\xrightarrow{+4(3+1)} 9$	$\xrightarrow{+4} 13$	$\xrightarrow{+4} 17 \xrightarrow{+4} \dots$
抓寶 4	4	$(4+1+1)6$	$\xrightarrow{+5(4+1)} 11$	$\xrightarrow{+5} 16$	$\xrightarrow{+5} 21 \xrightarrow{+5} \dots$
抓寶 5	5	$(5+1+1)7$	$\xrightarrow{+6(5+1)} 13$	$\xrightarrow{+6} 19$	$\xrightarrow{+6} 25 \xrightarrow{+6} \dots$
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
抓寶		$(\blacksquare+1+1)\blacksquare+2$	$\xrightarrow{+\blacksquare+1} 2(\blacksquare+1)+1$	$\xrightarrow{+\blacksquare+1} 3(\blacksquare+1)+1$	$\xrightarrow{+\blacksquare+1} 4(\blacksquare+1)+1 \dots$

(四)由結果 3 的表格中我們得知第 n 次的控制基數為

$$n \times \text{雙方互取總和數} + 1 \quad \text{公式(二)}$$

(五)由抓寶 3 式(1)，抓寶 2 式(2)，抓寶 4 式(3)及結果 1、2 得知第一位控制基數減去雙方互取總和數都差 1，所以我們修正了公式(一)，使公式更簡化為：

$$(\text{石子數} - 1) \div \text{雙方互取總和數} = \text{間隔數} \dots \dots \dots \text{餘數}$$

公式(三)

驗證：(石子數設為 23 粒，其餘詳見簿冊(六))

姓名	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲
抓寶 2	23 ⁽¹⁾	22 ⁽²⁾	20 ⁽¹⁾	19 ⁽¹⁾	18 ⁽²⁾	16 ⁽²⁾	14 ⁽¹⁾
說明	$(23-1) \div 3 = 7 \dots \dots 1$						

姓名	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲
抓寶 3	23 ⁽²⁾	21 ⁽³⁾	18 ⁽¹⁾	17 ⁽²⁾	15 ⁽²⁾	13 ⁽¹⁾	12 ⁽³⁾
說明	$(23-1) \div 4 = 5 \dots \dots 2$						

姓名	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲
抓寶 4	23 ⁽²⁾ →21	21 ⁽³⁾ →18	18 ⁽²⁾ →16	16 ⁽²⁾ →14	14 ⁽³⁾ →11	11 ⁽⁴⁾ →7	7 ⁽¹⁾ →6
說明	$(23-1) \div 5 = 4 \dots\dots 2$						

六、討 論

(一)速算公式正確嗎？

我們從許多實例中，採用列表比較的方式提出其規律性，作為假設的依據，再將提出的假設加以驗證，並透過推論及歸納的活動，其獲得的速算公式也加以驗證，結果是正確的，那麼我們得到的公式也應該是正確的。

(二)如何應用到有關的數學問題？

經過我們從三上到四上的數學課本中，收集到許多可應用這個公式解答的數學問題如三上的餘數問題，四上的植樹問題，四上的分配問題等等 0（題目的收集及公式的應用詳見簿冊(t)）。

(三)公式整理：

1 (石子總數 - 1) ÷ 雙方互取總和數 = 間隔數……餘數 (取數) 。

2 $n \times$ 雙方互取總和數 + 1 ………第 n 次的控制基數。

評語：本作品對抓寶遊戲，說出尋找控制基數的方法，以贏得勝利，表達完整，操作熟練，難能可貴。