

# 有多少條路可以走

初小組數學科第一名

高雄前金國小

作者：黃家皇、李任翔

指導教師：許金菊

## 一、研究動機

有一天，上數學課的時候，老師發給我們一張圖如圖(-)，讓我們欣賞，並且說了一個有趣的故事。有一天活潑的小明，從家裏走到學校，他走3號道路，因為沿途可以看到很多有趣的事物。例如他走到池塘邊，可看到水裏的魚兒游來游去；再往前走到公園，可欣賞美好

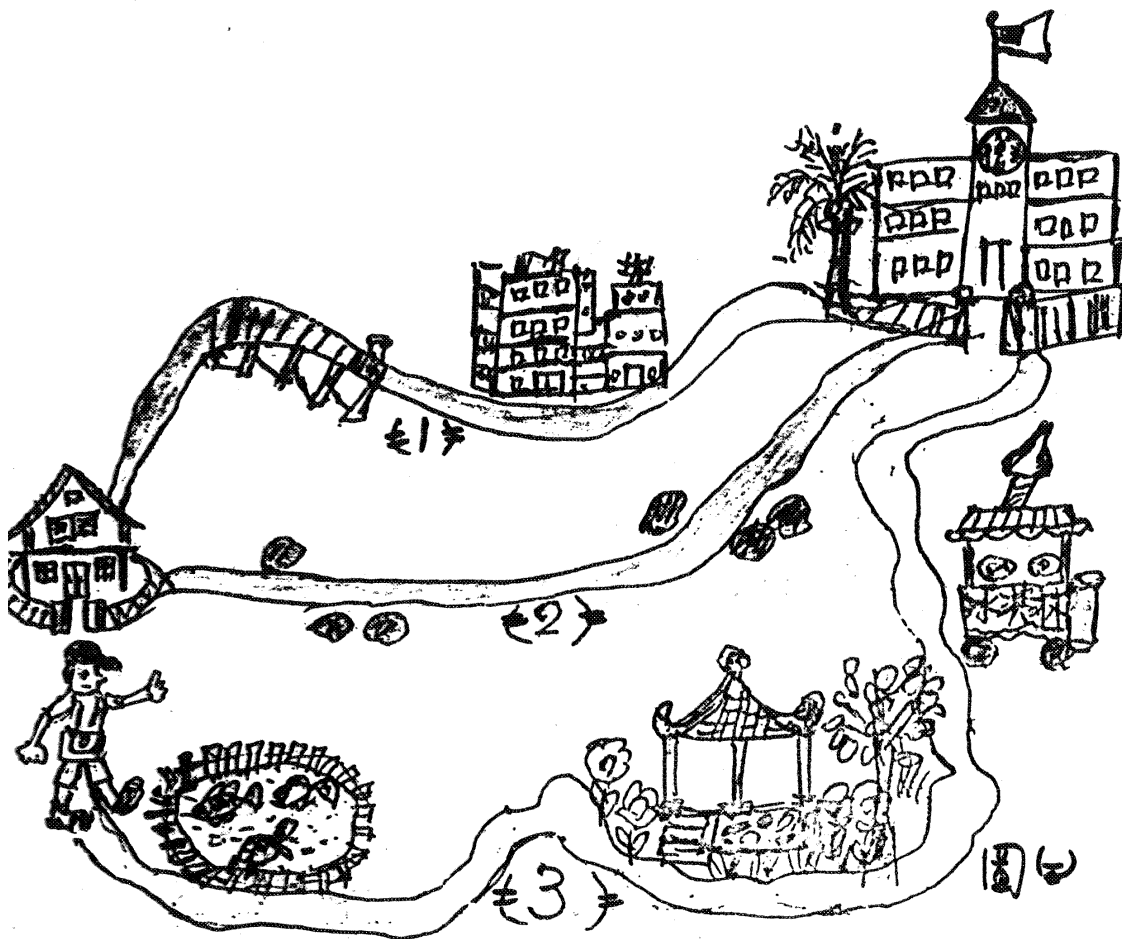


圖 一

的風景。然後經過冰淇淋店，可看到各式各樣的冰淇淋廣告，最後才走到學校。可是當小明走進校門時，忽然想起忘記帶直尺和細繩，所以就走近路回家，現在圖上標有三條道路 1、2、3，你們想一想，他應該走哪一條道路回家，才是最近的？有些同學說走 1 號道路，有些說走 2 號道路，更有些同學說走 3 號道路最近。後來老師指導我們，把準備好的直尺和細繩拿出來實際測量，結果大家異口同聲說：「走 2 號道路最近的。」老師笑著說：「你們很聰明，大家都答對了。所以大家要知道：把每一個地方看做一點，那麼，兩點之間的距離是直線段最短。」這時，我忽然想起一個問題說：「老師，從我家到學校不是直線段的道路，要經過幾個十字路口，轉幾個彎如圖二，那麼，我該怎麼走才是最近的路？」

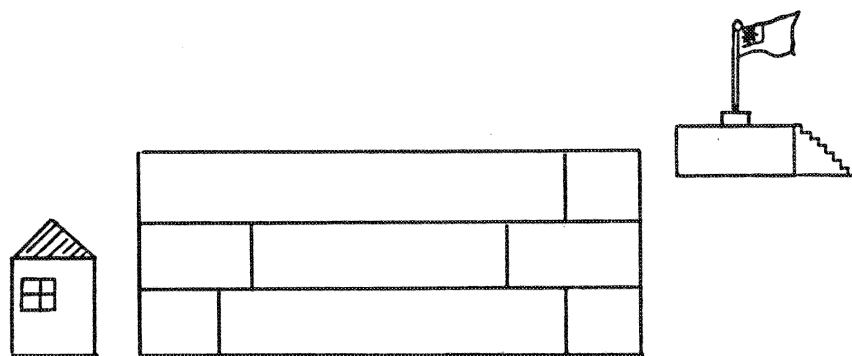


圖 (二)

## 二、研究過程

(一)老師笑著說：「現在大家來想一想，家皇同學所提出這個生活上的實際問題。首先，你們先想一想比較簡單的問題，把一個“田”字的左下角看做你的家，右上角看做學校（如圖(三)），你們從

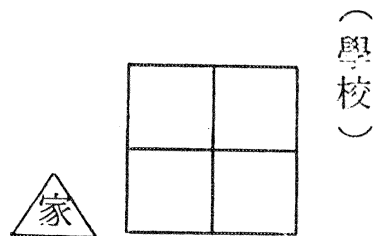
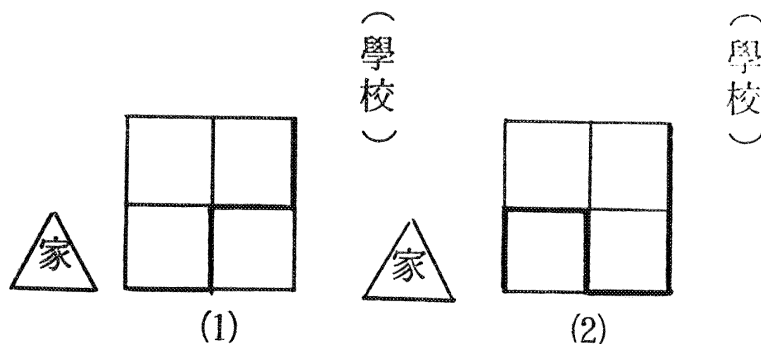


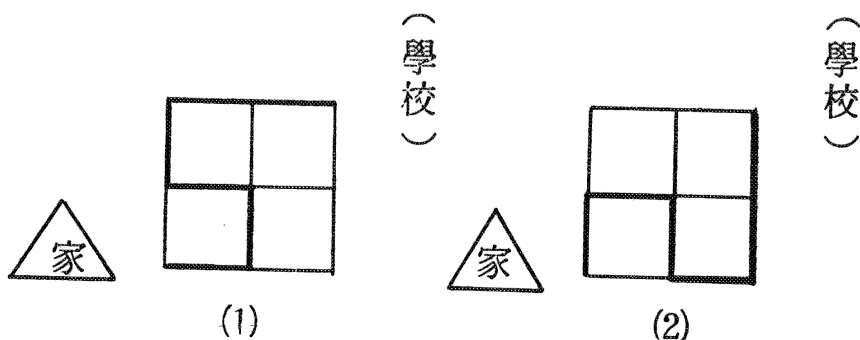
圖 (三)

家裏向學校開始走，應該怎麼走才是最近的路？老師發給我們一張圖畫紙，上面印了好幾個“田”字，叫我們用色筆畫出，應該怎樣走路線才是最近？

(二)大家開始畫的時候，我畫了兩個路線圖(如圖四)，第(1)個路線圖從家到學校，走二段橫路和二段直路。第(2)個路線圖從家到學校，走二段橫路和四段直路，所以我想第(1)個路線圖才是最近的路。我把畫好的圖拿去給老師看，老師很高興的說：「家皇，你的想法很正確」。然後老師就在黑板上，畫了好幾個“田”字，分組選幾位同學，到黑板上去畫，自己認為最近的路線。最後，任翔同學把這些路線圖分為圖(五)和圖(六)兩類：



(圖 四)



(圖 五)

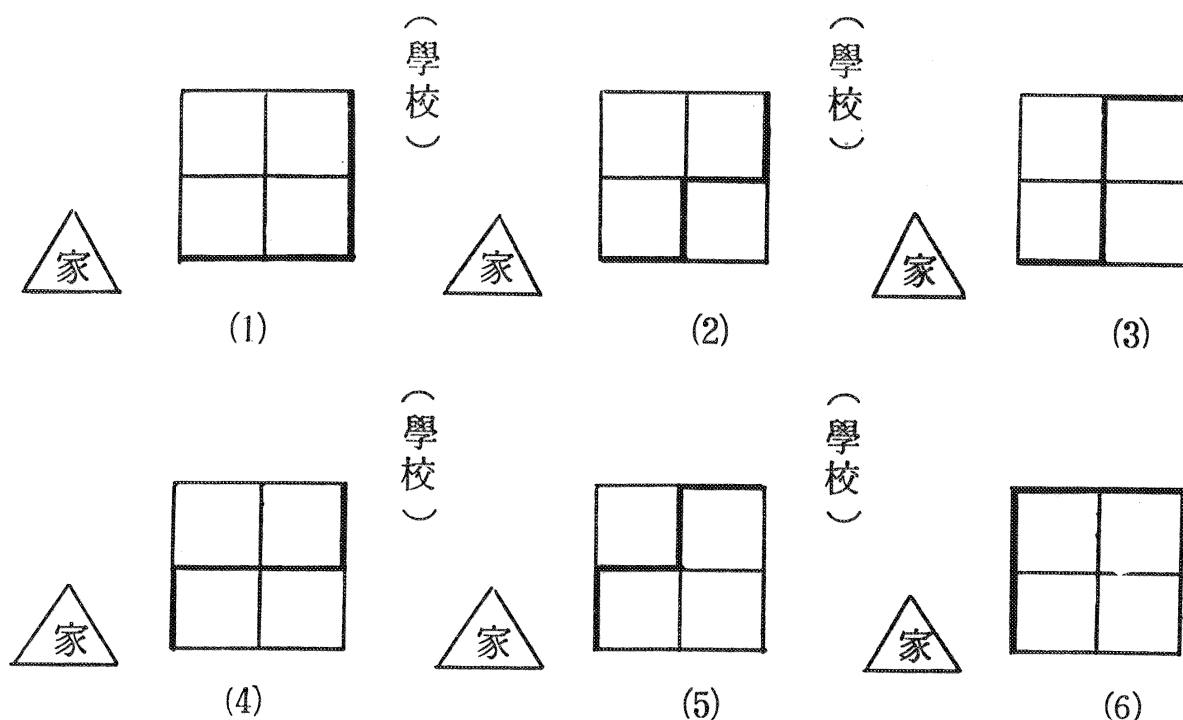


圖 (六)

在圖(五)中：第(1)路線圖，從家到學校，要走四段橫路二段直路。第(2)路線圖，從家到學校，要走四段直路，二段橫路。在圖六中：每一個路線圖，從家到學校都是二段橫路，二段直路。所以這些路線圖的走法，比圖五中路線圖的走法較近。

我們發現：

1. 從家裏走到學校最短的路線，要向上走或是向右走，如果向左走或是向下走，要到學校便要回頭走，這種走法不是最短路線。如果走的橫路或直路比二段少，就不能走到學校。如果走的橫路或直路比二段多，雖然可走到學校，但這不是最短的路程。

2. 所以圖(六)中，從家裏走到學校，最短的走法共有 6 種。

(三)後來我們想到一個問題：「從家裏到學校，最短路線有多少種走法？」如果我們要畫出所有的路線圖，再來計算它，那是很麻煩的事。例如從家裏到學校，要經過很多個十字路口，轉好幾個彎，如果要把所有的路線圖都畫出來，那是一件很困難的

事。我和任翔同學對這種問題很感興趣，所以我們利用課餘時間，請教老師。老師稱贊我們很有研究精神，接著說：「你要計算這個問題，首先要在道路的轉彎點（十字路口）標記符號，把家裏當作甲地，把學校當作乙地如圖(七)，由甲地到乙地的走法，全部列出來，你們再看一看各點的關係。

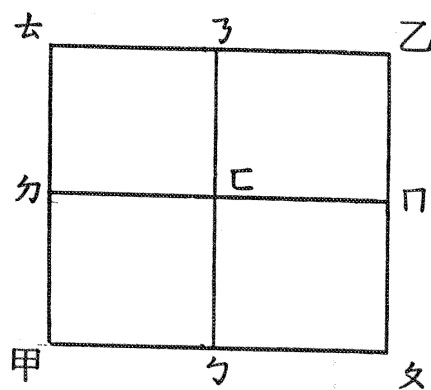


圖 (七)

我和任翔馬上列出所有的走法如下：

- (1) 甲→勿→女→口→乙
- (2) 甲→勿→C→口→乙
- (3) 甲→勿→C→去→乙
- (4) 甲→勿→C→口→乙
- (5) 甲→勿→C→去→乙
- (6) 甲→勿→去→去→乙

老師問我們：「由甲到C，有幾種走法？」

我馬上回答有二種方法，就是由甲→勿→C，和由甲→勿→C。老師再問「由甲到口，有幾種走法？」任翔回答說：有三種走法，就是甲→勿→C→口，甲→勿→女→口，甲→勿→C→口」。老師很高興的說：「你們都答對了。」上數學課時，老師叫我和任翔把我們的想法告訴同學，然後指導我們對這個問題應怎樣的計算。就是在甲地向右或是向上走的十字路口勿、女、勿、去各記上“1”如圖(八)，因為由甲地到這幾個十字路口，最短路程的走法只有一種，所以要記上“1”。老師叫我們想一想，要怎樣做才能算出答案來。我很快地回答說：「由甲地到C地的走法是  $1 + 1 = 2$ ，因為由勿或是勿，是走到C

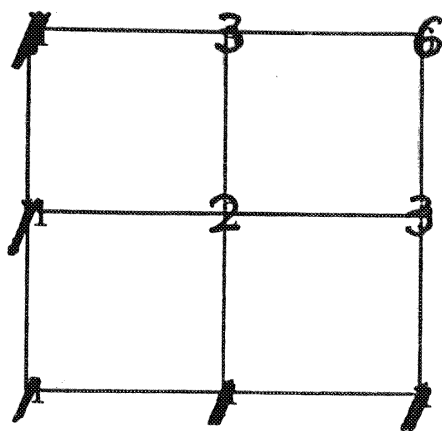


圖 (八)

的最近兩點，所以把這兩個地方的走法加起來，就表示由甲到乙的最短路程走法。」任翔也回答說：「由甲地到乙地的走法是  $1 + 2 = 3$ ，也就是把走到乙地的最近兩點甲和乙的走法加起來。」

栢仁同學也說：「同樣，由甲地到丙地的走法是  $2 + 1 = 3$ ，3種走法。而由甲地到乙地的走法是  $3 + 3 = 6$ ，也就是把走到乙地的最近兩點丙和甲的走法加起來。」

我們的結論是：

(1)在起點（家裏）和起點的兩邊道路的十字路口，各記上“1”

。

(2)每個十字路口的數字，是沿這條路走到這一點的最近一個或是兩個數字，相加起來的和。

(3)從起點到終點累加起來的和，就是最短路程的走法。

以後用這種方法來計算，從甲地到乙地的最短路程的走法，有多少種，實在很簡單又方便。這種方法，我們稱它為“累加法”。

### 三、研究問題的應用

(一)我們用這種累加法計算，從家皇家到學校如圖(九)，和從任翔家到學校如圖(十)，最短路程的走法各有幾種？

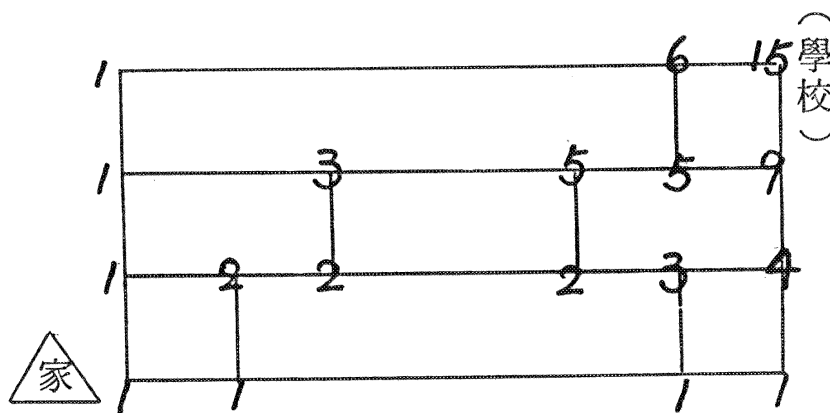


圖 (九)

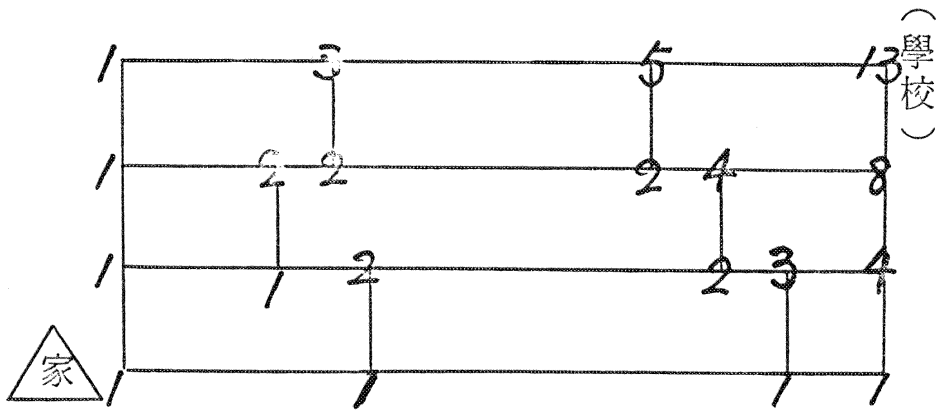


圖 (十)

我們用累加法計算的結果是：

1. 從家皇的家到學校最短路程的走法，共有 15 種。
2. 從任翔的家到學校，最短路程的走法，共有 13 種。

(二) 許栢仁同學和陳寬溢同學，從他們家到學校距離比較遠，經過的十字路口比較多，他們從家裏到學校的街道圖，如圖(十一)(栢仁家到學校)，圖(十二)(寬溢家到學校)。

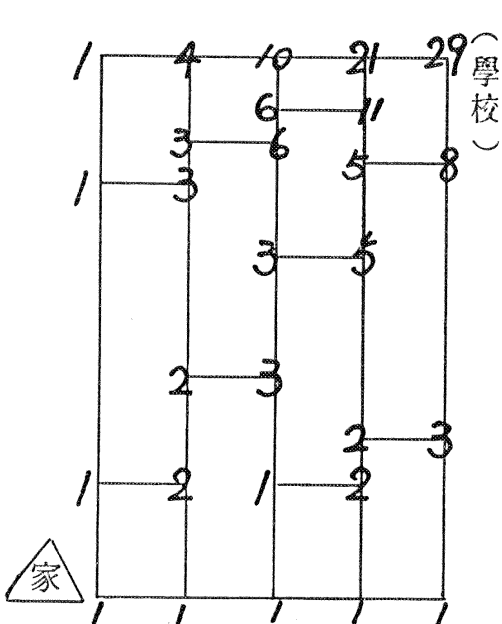


圖 (十一)

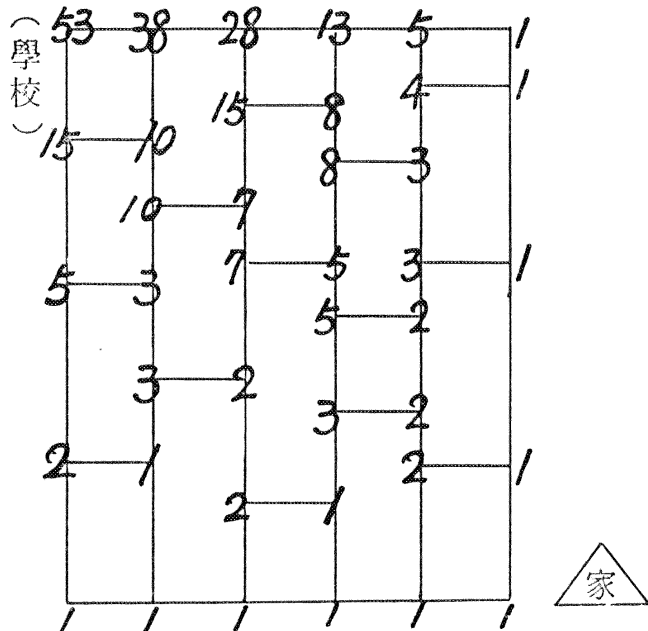


圖 (十二)

我們用累加法計算的結果是：

1. 從栢仁家到學校，最短路程的走法，共有 29 種。
2. 從寬溢家到學校，最短路程的走法，共有 53 種。

(三) 黃馨慧同學提出一個問題說：星期日的清晨，爸媽帶我到扶輪公園散步，從我家到扶輪公園一定要經過體育館如圖（十三），那麼，最短路程的走法，共有幾種？

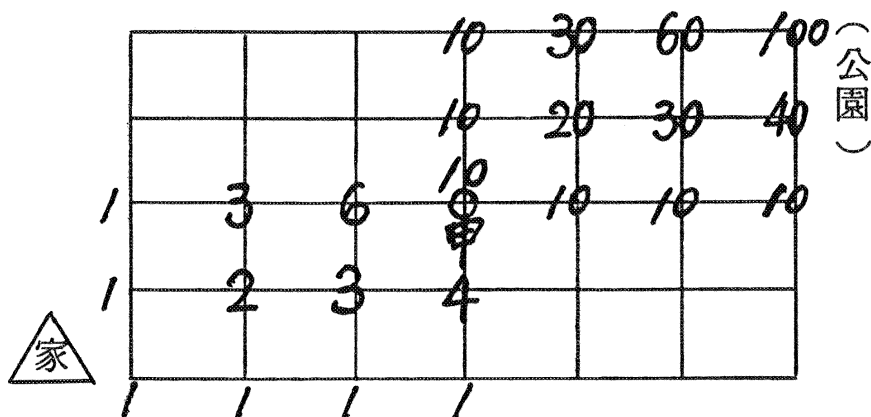


圖 (三)

我們的算法和結果是：

1. 把家當作起點，在起點的兩邊道路的十字路口，各記上“1”，依累加法算出，由家到體育館的最短走法有 10 種。
2. 把體育館當作甲點，而把甲點當作第二個起點，在第二個起點的兩邊道路的十字路口，各記上“10”。
3. 再用累加法計算，從家裏經過體育館到扶輪公園，最短路程的走法，共有 100 種。

(四) 蘇裕珺同學，每天早上從家裏到車站乘公車上學，一定要先經過餅店和加油站。她到車站的街道圖如圖（十四），我們來算一算從她家裏到車站，最短路程的走法共有幾種？

我們的算法和結果是：

1. 把家當作起點，在起點兩邊道路的十字路口，各記上“1”，依累加法算出，從家到甲點的最短走法有 6 種。
2. 把餅店當作甲點，而把甲點當作第二起點，在第二個起點兩邊道路的十字路口，各記上“6”，再算出到乙地的走法有



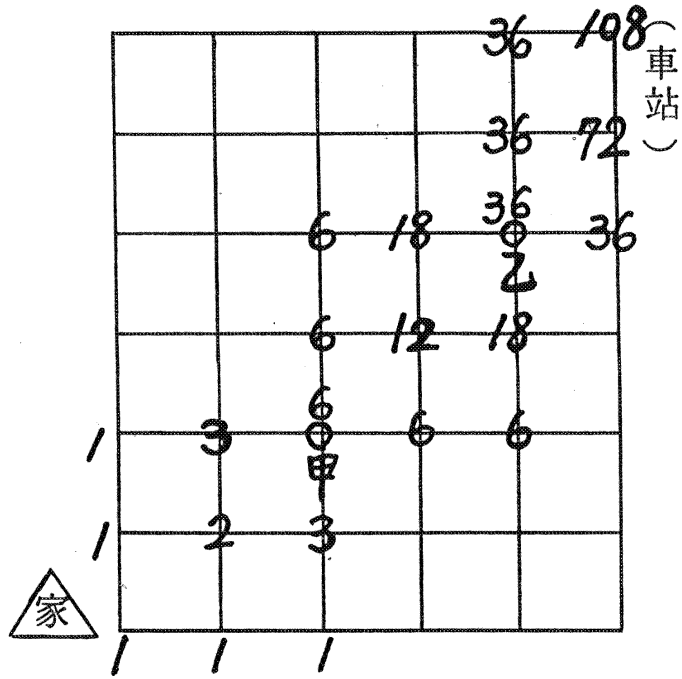


圖 (四)

36 種。

3. 把加油站當作乙點，再把乙點當作第三起點，在第三個起點兩邊道路的十字路口，各記上“36”。

4. 然後累加計算，從家裏經過餅店，再經過加油站到達車站，最短路程的走法，共有 108 種。

(五) 王博民有一天上學的時候，在途中遇到交通管制如圖(五)，只好繞道上學。那麼，從博民家到學校，最短路程的走法，共有幾種？

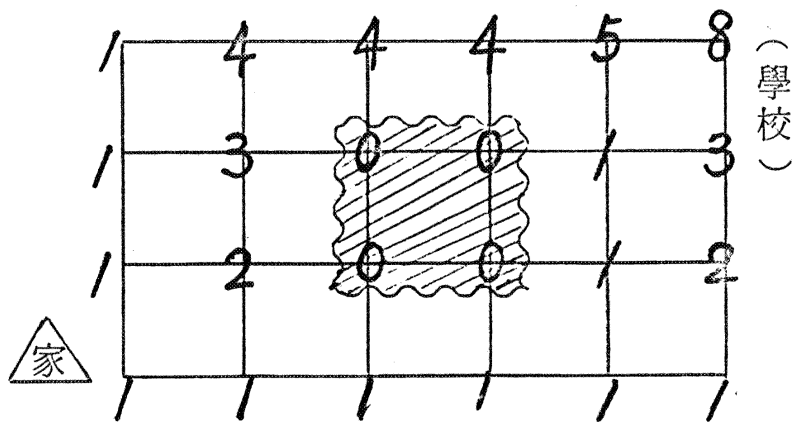


圖 (五)

我們的算法和結果是：

1. 在家的兩邊道路的十字路口各記上“1”。
2. 在交通管制區的十字路口各記上“0”。
3. 然後用累加法計算的結果，由家到學校的最短路程走法，共有8種。

(六)黃裕峯同學提出一個類似的問題說：我家離學校較遠，上個月中從我家到學校，途中遇到修路如圖(六)，也只好繞道上學。從我家到學校最短路程的走法，共有幾種？

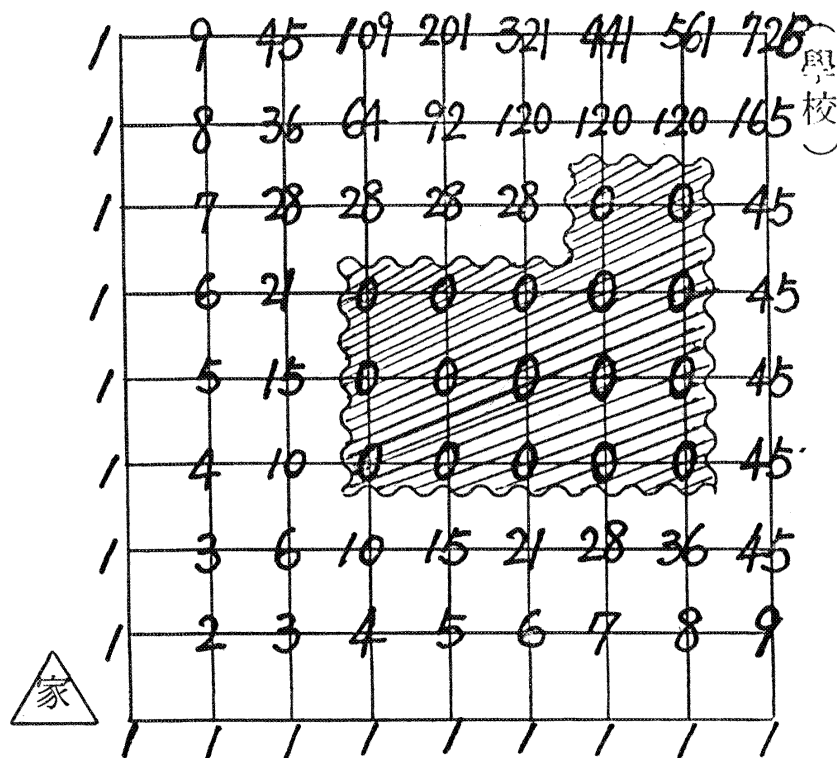


圖 (六)

我們計算的結果是：

按照上面問題，累加法的要領，算出從裕峯家到學校，最短路程的走法，共有726種。

(七)高志宏同學說：有一天中午，他在廚房裏看見一隻螞蟻，搬一塊小餅乾，沿著正六邊形瓷磚的接縫，從甲點搬到乙點如圖(七)，最短路程的走法，有多少種？

我們的算法和結果：

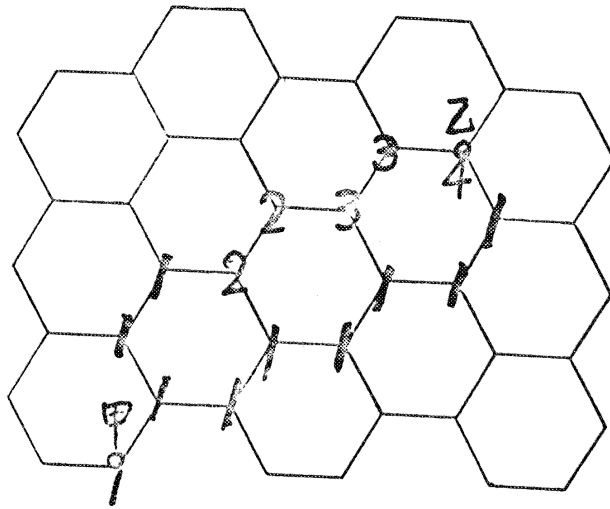


圖 (七)

1. 螞蟻只能向右走，不能向左走，可以向右上走或左上走，不能向右下走或左下走。
  2. 用累加法計算，螞蟻從甲點搬小餅乾沿著六邊形瓷磚的接縫，搬到乙點，最短路程的走法，共有 4 種。
- (六) 老師在黑板上畫了一個三角形（如圖十八），在圖上畫兩點，訂為甲點和乙點。假設：林祁宏同學抱著一個球，從甲點跑到乙點，那麼，最短路程的走法，共有幾種？

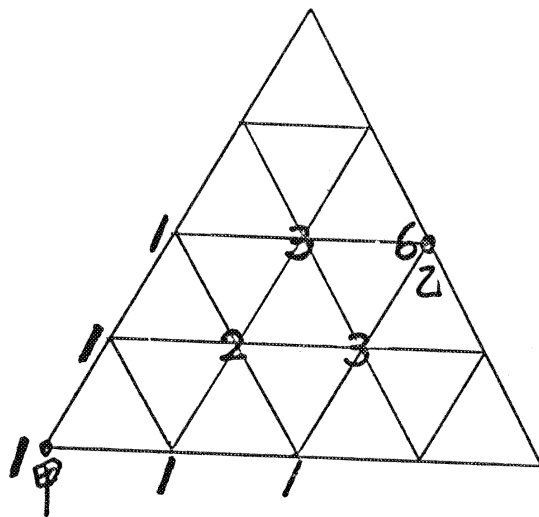


圖 (六)

我們討論的結果是：

- (1) 從甲點跑到乙點，最短路程的走法只能向右跑或向右上跑，不能向左跑或向左上跑。
  - (2) 從甲點跑到乙點，最短路程的走法，共有 6 種。
- (九) 秀婷同學在黑板上，畫了一個上學的街道圖如圖（十九），從家裏到學校該有多少條路可走？

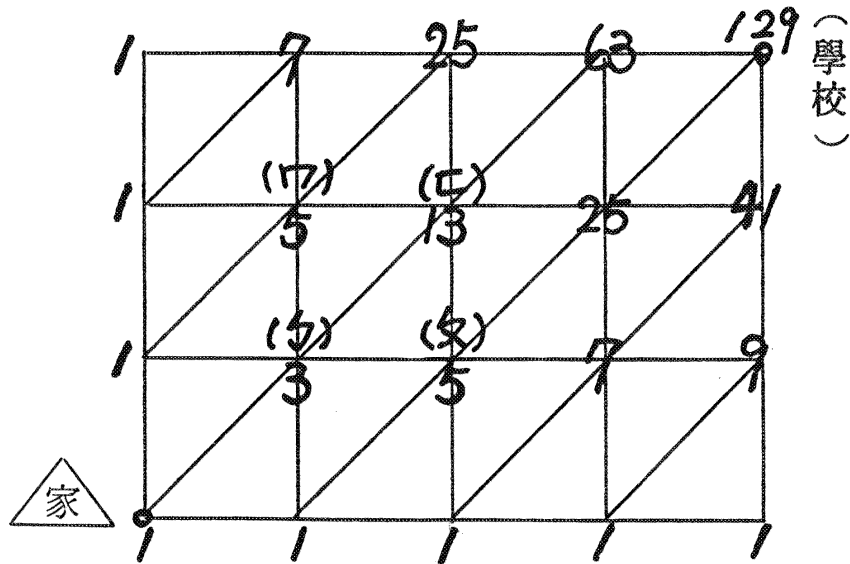


圖 (九)

老師看了這個圖形後，說明他的走法只能向上走或向右走，或是向右上走（對角線走）。我們聽了開始討論，結果我們想出一個算法：

1. 因為只能向上走，向右走或向右上走（對角線走），所以從家裏走到 $\cup$ 點有 3 種走法，而從 $\cup$ 點走到 $\sqcup$ 點也有 3 種走法： $(1)\cup \rightarrow \sqcup$   $(2)\cup \rightarrow \sqcup$   $(3)\sqcup \rightarrow \sqcup$ 。
2. 走到 $\cup$ 點有 3 種走法，走到 $\cup$ 點有 5 種走法，走到 $\sqcup$ 點有 5 種走法，所以從家裏走到 $\sqcup$ 點的走法，共有  $3 + 5 + 5 = 13$  種走法。
3. 每個十字路口的數字，是沿這條路走到這一點的三個數字，連加起來的和。
4. 按照這種方法計算，把每個十字路口的數字，累加起來的和，就是從家裏到學校的走法，共有 129 種走法。

(+)我們玩彈玻璃珠遊戲時，發現一個問題：每當玻璃珠從三角形的頂點落下，到最下面一排的槽裏時，我們總發現玻璃珠都是往中間落下的次數比較多，這是爲什麼呢？是不是和我們研究的問題有關呢？於是，我們就請教老師，老師告訴我們：「這個問題和累加法計算有關，你們想一想，這個玻璃珠在每個出口處，各經過多少種不同的路線？」

經老師指導後，我們想出了一個解決這個問題的辦法：

1. 在三角形落珠處兩邊的方格內，都記上“1”。
2. 其他每個方格內的數，就是它的左上方的數和右上方的數之和如圖（二十）。

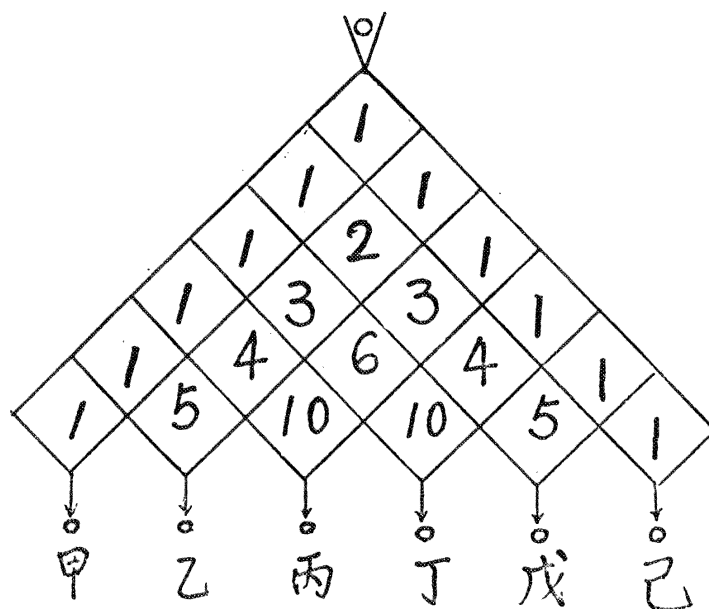


圖 (二十)

我們計算的結果：

- (1) 甲出口處只有 1 種路線。
- (2) 乙出口處有 5 種路線。
- (3) 丙出口處有 10 種路線。
- (4) 丁出口處有 10 種路線。
- (5) 戊出口處有 5 種路線。
- (6) 己出口處有 1 種路線。

最後我們發現：

越往中間數字越大

也就是玻璃珠往中間落下的次數，比較多的道理。

#### 四、結 論

指導老師的話：

你們想出的累加法，不但可以計算棋盤街道最短路程的走法，也可以計算各種街道網中，從一點到另一點有多少條不同路線的走法，實在很方便。關於這種最短路線的走法的問題，也可以用排列組合的方法（高中數學可學到）來計算，但用這種方法對有些問題，比用你們的累加法更難於解決。（例如圖十九，季婷同學所提出的街道圖問題）。而且這種累加法，也可以應用於計算立體交流道的走法，它的用途實在很廣。

評語：本作品是說明從甲地到乙地的最短路程的走法，可用累加法來計算十分便捷，敘述完整，思慮週詳，作者對本方法的使用熟練，值得鼓勵。