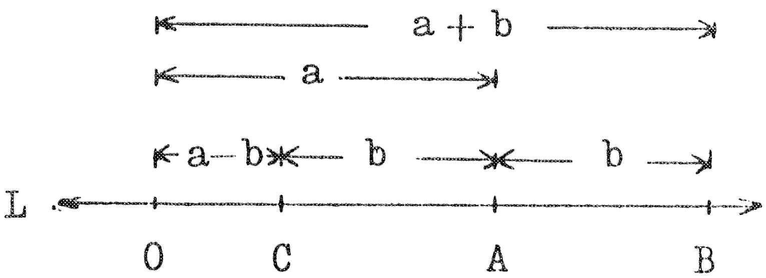
用直尺與圓規作正n邊多邊形的探討
國中教師組數學科第三名

屏東縣立至正國民中學　　作　者：李繼興

一、研究動機

在國中數學課程教材中我們所研究的幾何學乃是利用直尺與圓規來作圖，並研究一些幾何學的基本性質，在國中數學第五冊裏曾討論正n邊多邊形（$n \geq 3 \quad n \in N$）的定義及基本性質。因此如果我們在直尺與圓規的限制下，是否可作任意正n邊多邊形（$n \geq 3 \quad n \in N$），為了探討此問題，我們首先看幾個對於基本幾何學作圖的最基本代數運算，即已知兩個綫段長a與b（根據一已給"單位"綫段量度而來）很容易作出$a+b$，$a-b$，ra（$r \in Q$），a/b與ab 等諸綫段的長（有時為了討論方便與不失一般性，我們可假設$a>b$）。

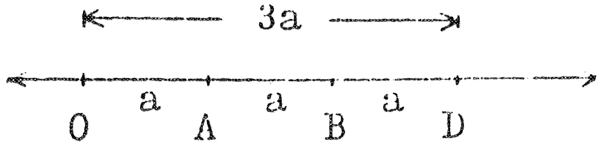
1.作$a+b$與$a-b$綫段的長：作一直綫L，在綫L上取$\overline{OA}=a$，$\overline{AB}=b$，於是$\overline{OB}=\overline{OA}+\overline{AB}=a+b$，同樣就$a-b$而言，取$\overline{AC}=b$，但此次與$\overrightarrow{AB}$的方向相反，於是$\overline{OC}=\overline{OA}-\overline{AC}=a-b$（如圖一）。



2.作ra：為了探討此題，我們先作3a的長與$\frac{1}{3}$a的長

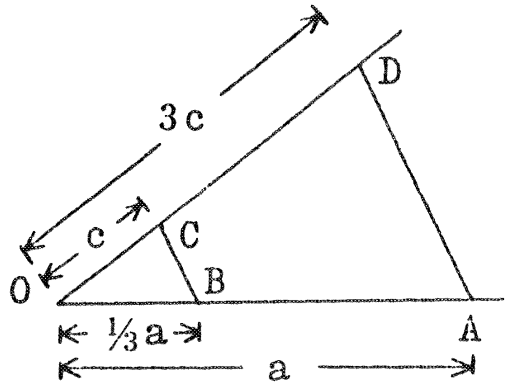
(1)作3a：我們只要簡單將$a+a+a$加起來就行（如圖二），同理我們亦可作pa綫段的長，$p \in Z$（正、負只是方向

問題）。



（圖二）

(2)作$\frac{1}{3}$a：我們在直線L上取$\overline{OA}$＝a，過O點作另一直線M，在直線M上任取綫段長$\overline{OC}$＝c（c≠O），並作$\overline{OD}$＝3$\overline{OC}$＝3c，連結A與D，作一直綫通過C點且平行



（圖三）

$\overline{AD}$交$\overline{OA}$於B點（如圖三），則$\overline{OB}=\frac{1}{3}$a，因爲

$\triangle OBC \backsim \triangle OAD$

$$\therefore \quad \frac{\overline{OB}}{a}=\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}=\frac{1}{3} \qquad \therefore \overline{OB}=\frac{1}{3}a$$

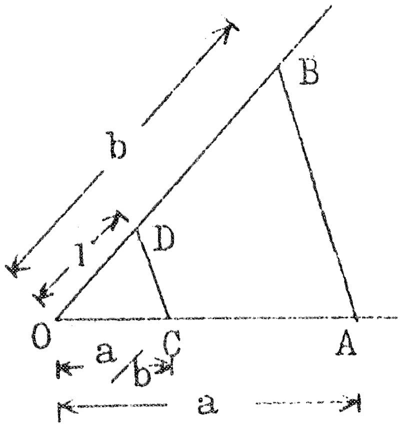
以同樣的方法，我們可以作出一個綫段長爲$\frac{1}{q}$a，其中$q \in Z$，$q \neq 0$

(3)由(2)我們可得綫段的長爲$\frac{1}{q}$a，再由(1)的運算施於pa，於是我們就可以作出一個綫段長爲ra其中$r=\frac{p}{q}$（$q \neq 0$，$p, q \in Z$）

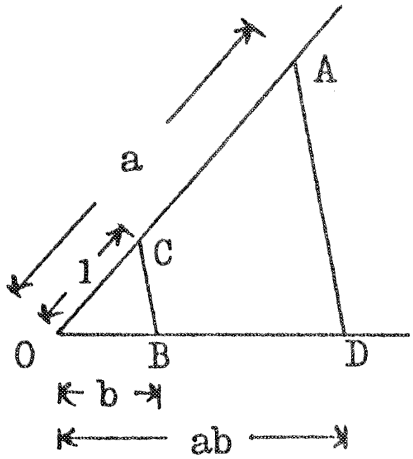
3.作a／b與ab綫段的長

(1)作任一角∠O，在∠O的兩邊取$\overline{OB}$＝b，$\overline{OA}$＝a，再在$\overrightarrow{OB}$上取$\overline{OD}$＝1作通過D點且平行$\overline{AB}$的直綫，交$\overrightarrow{OA}$於C

點，於是$\overline{OC}=\dfrac{a}{b}$（如圖四）



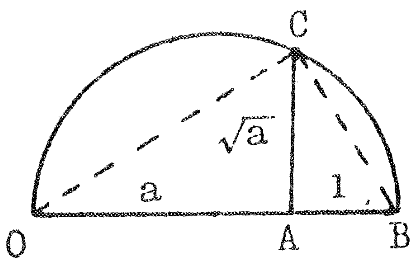
（圖四）



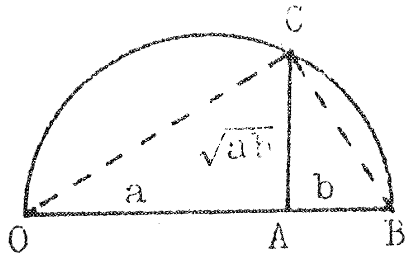
（圖五）

(2)作任一角∠O，在∠O的兩邊取$\overline{OB}=b$，$\overline{OA}=a$，再在$\overrightarrow{OA}$上取$\overline{OC}=1$作通過A點且平行$\overline{BC}$的直線交$\overrightarrow{OB}$於D點，則$\overline{OD}=ab$（如圖五）

如果已知一個線段長爲a，僅用直尺與圓規，我們亦可作出線段長爲$\sqrt{a}$（如圖六），在一直線L上取$\overline{OA}=a$，$\overline{AB}=1$，以$\overline{OB}$爲直徑作一半圓，過A點作$\overline{OB}$的垂直線$\overleftrightarrow{AC}$，交此半圓於C點，根據平面上幾何定理$\triangle OAC\backsim\triangle CAB$　$\therefore \overline{OA}:\overline{AC}=\overline{AC}:\overline{AB}$　$\therefore \overline{AC}=\sqrt{a}$，同理，如果我們已知二個線段長a與b，則僅用直尺與圓規亦可作出線段之長爲$\sqrt{ab}$（如圖七）



（圖六）

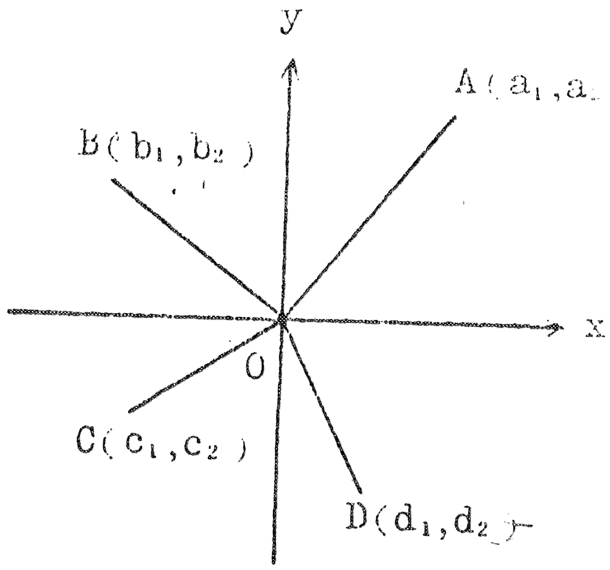


（圖七）

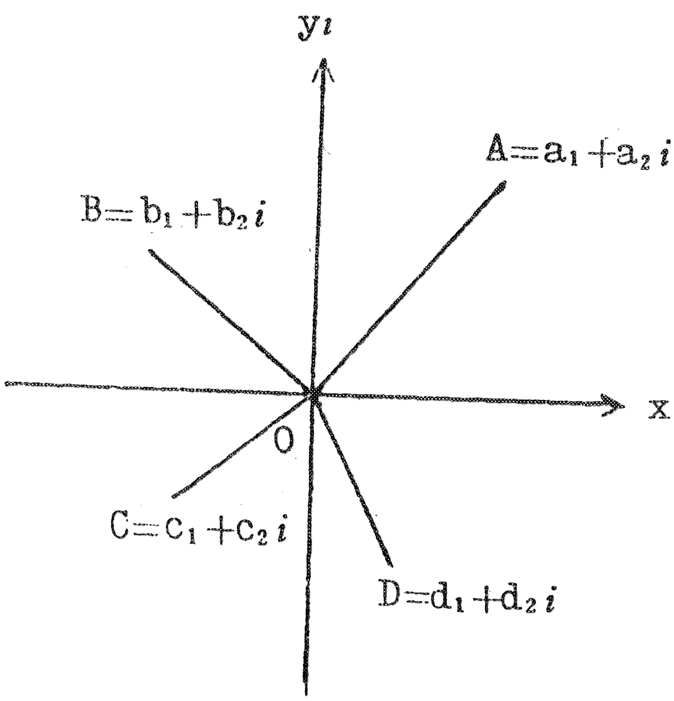
二、研究目的

對已知綫段的長，僅限於使用直尺與圓規，經由有限次的有理的代數運算（即對已知量的加、減、乘、除之四則運算）或開平方根，求作一般正 n 邊多邊形的條件（ $n \geq 3$ ， $n \in N$ ）

三、研究內容



（圖八）



（圖九）

1.在一般直角坐標系平面上任一點P恰有一個（ x ， y ）與之對應反之，對於每個（ x ， y ）在平面上亦恰有一點P與之對應，在複數系中，對於每一個複數 z 均可寫成 $z = x + yi$ 的形式，其中 x ， $y \in R$ ， $i = \sqrt{-1}$ x 爲 z 的實數部， y 爲 z 的虛數部，如果在直角坐標系中將 y 軸今以虛軸替代，則（圖八）可化爲（圖九）。因此，在直角坐標系中，任一點 P（ x ， y ）均可化爲 $P = x + yi$ 。因此，

實數部 x 落在 X 軸上，純虛數 yi 則落在 Y 軸上，由此想法推論之，我們可得一個複數平面，因此，在複數平面上的任一點恰有一複數與之對應。反之，對於每一複數在複數平面上，恰有一點與之對應。

現在，我們討論內接於單位圓上正 n 邊多邊形 x 的情形。我們知道正 n 邊多邊形的各頂點，即方程式 $z^n-1=0$ 的諸根，各頂點的坐標 x，y 被視爲複數 $z=x+yi$ 的實數部與虛數部，而且這個方程式 $z^n-1=0$ 必有一根 $z_0=1$（$n\geq 3$ $n\in N$）。

當 $n=3$ 時 $z^3-1=0$ $(z-1)(z^2+z+1)=0$

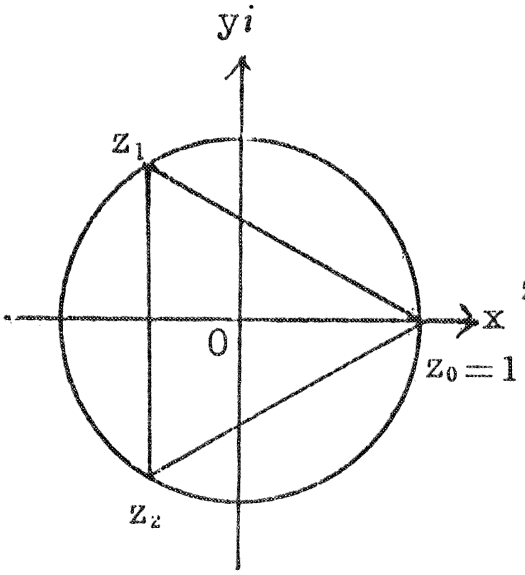
得三根爲 $z_0=1$

$$z_1=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ , } z_2=\frac{-1}{2}+\frac{-\sqrt{3}}{2}i$$

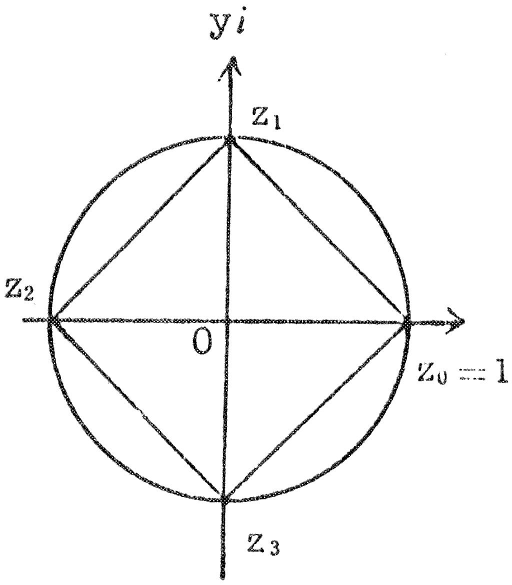
當 $n=4$ 時 $z^4-1=0$ $(z+1)(z-1)(z-i)(z+i)=0$

得四個根爲 $z_0=1$ $z_1=i$ $z_2=-1$ $z_3=-i$

如果我們在複數平面上描繪這些點，分別得到一個正三角形與一個正方形，且這兩個圖形都可內接於單位圓上（如圖十、十一）

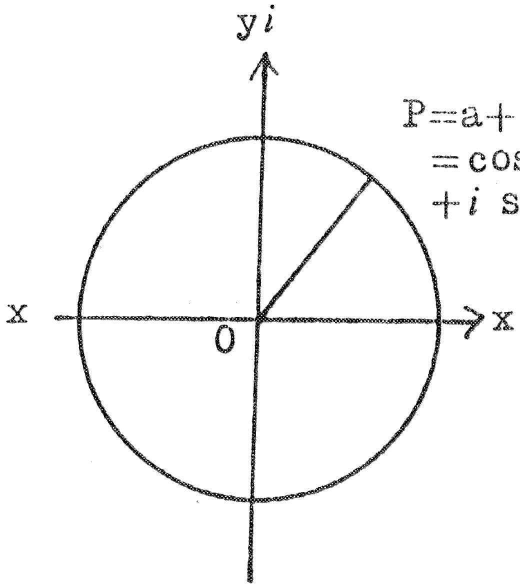


（圖十）

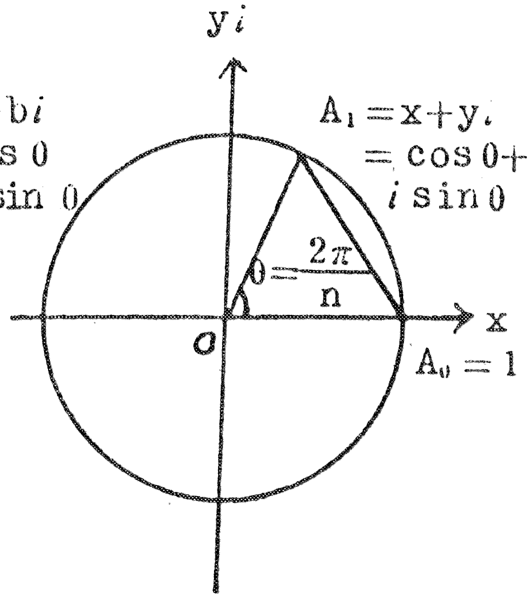


（圖十一）

若任一點 $P = a + bi$ 落在單位圓上，則 $P = a + bi = \cos\theta + i\sin\theta$ 其中 $a = \cos\theta$ ，$b = \sin\theta$ ，$0 \leq \theta < 2$
2π（如圖十二）。



（圖十二）



（圖十三）

若 A_1 爲正 n 邊ㄅ邊形的頂點，且 A_1 落在單位圓上，若

$A_1 = x + yi = \cos\theta + i\sin\theta$ 其中，$\theta = \dfrac{2\pi}{n}$ $x = \cos\theta$

，$y = \sin\theta$ 則 $\overline{A_0A_1}$ 爲正邊多邊形一邊的長（如圖十三）。

因此，由方程式 $z^n - 1 = 0$ 我們只要能用有限個有理的代數運算或開平方根將 $\cos\theta$ 表示出來，就可作出正 n 邊多邊形的圖，其中 $\theta = \dfrac{2\pi}{n}$（$n \geq 3$ ，$n \in N$）。

2. $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \quad \therefore \cos\theta = \pm\dfrac{\sqrt{2 + 2\cos 2\theta}}{2}$

（正、負取決於 θ 的範圍）

當 $n = 4$ 時 $\quad \theta = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{n}{2} \quad \cos\theta = 0$

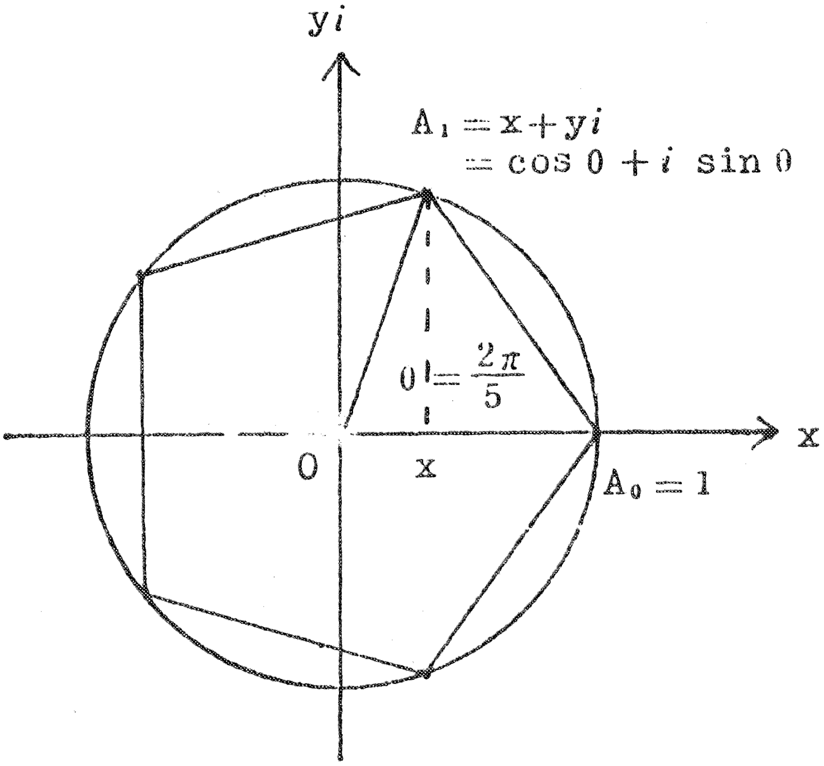
$n = 8$ 時 $\quad \theta = \dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4} \quad \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$n = 16$ 時　$\theta = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$　$\cos\theta = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$n = 32$ 時　$\theta = \frac{2\pi}{32} = \frac{\pi}{16}$　$\cos\theta = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$

由數學歸納法知　當 $n = 2^m$ 時，正 n 邊多邊形均可作圖（

（$m \geq 2$，$m \in N$）



（圖十四）

3. 當 $n = 3$ 時　$\theta = \frac{2\pi}{3}$　$\cos\theta = -\frac{1}{2}$

當 $n = 5$ 時　$\theta = \frac{2\pi}{5} = \frac{360°}{5} = 72°$

$\therefore 5\theta = 2\pi$　$\therefore \sin 5\theta = \sin 2\pi = 0$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta + 10i^2\cos^3\theta\sin^2\theta + 10i^3\cos^2\theta\sin^3\theta + 5i^4\cos\theta\sin^4\theta + i^5\sin^5\theta = (\cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta) + i(\sin^5\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos^4\theta\sin\theta) =$

$\cos 5\theta + i \sin 5\theta$

$\therefore \sin 5\theta = \sin^5\theta - 10\cos^2\theta \sin^3\theta + 5\cos^4\theta \sin\theta$

$= \sin^5\theta - 10(1-\sin^2\theta)\sin^3\theta + 5$

$+ 5(1-\sin^2\theta)^2 \sin\theta$

$= 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta = 0$

$\therefore \sin\theta(16\sin^4\theta - 20\sin^2\theta + 5) = 0$

$\because \sin\theta = \sin 72° \neq 0 \quad \therefore 16\sin^4\theta - 20\sin^2\theta + 5 = 0$

$\therefore \sin^2\theta = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{8} \quad \because \sin\theta = \sin 72° > \sin 45° > 0$

$\therefore \sin^2\theta > \dfrac{1}{2} \quad \therefore \sin^2\theta = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8} \quad \cos^2\theta = \dfrac{3-\sqrt{5}}{8}$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} \ \left(\theta = \dfrac{2\pi}{5}\right)$

當 $n = 17$ 時　$\theta = \dfrac{2\pi}{17}$　令 $w = \cos\theta + i\sin\theta \quad \therefore w^{17} = 1$

$w^k = (\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$

$k = 1, 2, 3 \cdots\cdots 16$

$z^{17} - 1 = (z-1)$

$(z^{16} + z^{15} + z^{14} + \cdots\cdots + z^2 + z + 1) = 0$

$\therefore$ 當 $z \neq 1$ 時　$z^{16} + z^{15} + z^{14} + \cdots\cdots + z^2 + z + 1 = 0$

則 w^k 爲 $z^{16} + z^{15} + z^{14} + \cdots\cdots + z^2 + z + 1 = 0$ 之諸根，且

w^k 在此單位圓上，$k = 1, 2, 3 \cdots\cdots 15, 16$（如圖十五）

$w^k + w^{17-k} = (\cos\theta + i\sin\theta)^k$

$+ (\cos\theta + i\sin\theta)^{17-k}$

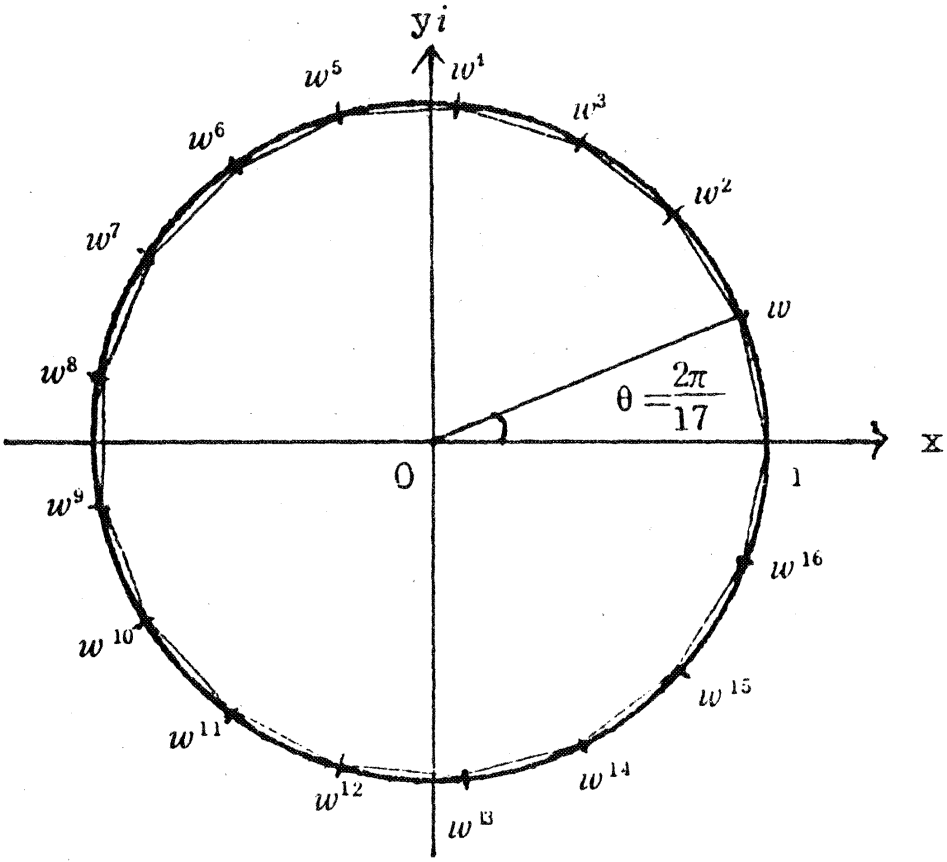
$= (\cos k\theta + i\sin k\theta)$

$+ [\cos(17-k)\theta + i\sin(17-k)\theta]$

$= (\cos k\theta + i\sin k\theta)$

$+ [\cos(-k\theta) + i\sin(-k\theta)]$

$= 2\cos k\theta \qquad k = 1, 2, 3 \cdots\cdots 16$



（圖十五）

令 $\alpha_1 = w + w^2 + w^4 + w^8 + w^9 + w^{13} + w^{15} + w^{16}$

$= 2(\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 8\theta)$

$\alpha_2 = w^3 + w^5 + w^6 + w^7 + w^{10} + w^{11} + w^{12} + w^{14}$

$= 2(\cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 6\theta + \cos 7\theta)$

$\beta_1 = w + w^4 + w^{13} + w^{16} = 2(\cos\theta + \cos 4\theta)$

$\beta_2 = w^2 + w^8 + w^9 + w^{15} = 2(\cos 3\theta + \cos 8\theta)$

$\gamma_1 = w^3 + w^5 + w^{12} + w^{14} = 2(\cos 3\theta + \cos 5\theta)$

$\gamma_2 = w^6 + w^7 + w^{10} + w^{11} = 2(\cos 6\theta + \cos 7\theta)$

$\alpha_1 + \alpha_2 = w + w^2 + w^3 + w^4 + \cdots\cdots + w^{14} + w^{15} + w^{16}$

$= -1$

$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = (w + w^2 + w^4 + w^8 + w^9 + w^{13} + w^{15} + w^{16}) \cdot$

$(w^3 + w^5 + w^6 + w^7 + w^{10} + w^{11} + w^{12} + w^{14})$

$= w^4 + w^6 + w^7 + w^8 + w^{11} + w^{12} + w^{13} + w^{15} +$

$w^5 + w^7 + w^8 + w^9 + w^{12} + w^{13} + w^{14} + w^{16} +$

$w^7+w^9+w^{10}+w^{11}+w^{14}+w^{15}+w^{16}+w+$
$w^{11}+w^{13}+w^{14}+w^{15}+w+w^2+w^3+w^5+w^{12}$
$+w^{14}+w^{15}+w^{16}+w^2+w^3+w^4+w^6+w^{16}+$
$w+w^2+w^3+w^6+w^7+w^8+w^{10}+w+w^3+$
$w^4+w^5+w^8+w^9+w^{10}+w^{12}+w^2+w^4+w^5$
$+w^6+w^8+w^{10}+w^{11}+w^{13}$
$=4(w+w^2+w^3+w^4+\cdots\cdots+w^{14}+w^{15}+w^{16})$
$=4(-1)=-4$

$\therefore$ α_1與α_2爲方程式 $t^2+t-4=0$ 之二根

$$t=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$$

$\because \cos 3\theta+\cos 5\theta+\cos 6\theta+\cos 7\theta$

$$=\cos\frac{6}{17}\pi+\cos\frac{10}{17}\pi+\cos\frac{12}{17}\pi+\cos\frac{14}{17}\pi$$

$$=\cos\frac{6}{17}\pi-\cos\frac{3}{17}\pi+\cos\frac{10}{17}\pi+\cos\frac{12}{17}\pi<0$$

$\therefore \alpha_2<0$ $\quad\because \alpha_1\cdot\alpha_2<0$ $\quad\therefore \alpha_1>0$

$$\therefore \alpha_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\qquad \alpha_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$

同理 $\beta_1+\beta_2=w+w^2+w^4+w^8+w^9+w^{13}+w^{15}+w^{16}$
$=\alpha_1$

$\beta_1\cdot\beta_2=(w+w^4+w^{13}+w^{16})(w^2+w^8+w^9+w^{15})$
$=w+w^2+w^3+w^4+\cdots\cdots+w^{15}+w^{16}=-1$

$\beta_1=w+w^4+w^{13}+w^{16}=2(\cos\theta+\cos 4\theta)$

$$=2\left(\cos\frac{2\pi}{17}+\cos\frac{8\pi}{17}\right)>0$$

$\beta_2=w^2+w^8+w^9+w^{15}=2(\cos 2\theta+\cos 8\theta)$

$$=2\left(\cos\frac{4\pi}{17}+\cos\frac{16}{17}\pi\right)$$

$$=2\left(\cos\frac{4\pi}{17}-\cos\frac{\pi}{17}\right)<0$$

$\because\ \alpha_1=\beta_1+\beta_2$, $\beta_1\cdot\beta_2=-1$

$\therefore\ \beta_1$與β_2爲$t^2-\alpha_1 t-1=0$ 之二根

$$\therefore\ \beta_1=\frac{\alpha_1+\sqrt{\alpha_1^2+4}}{2}=\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}$$

$$\beta_2=\frac{\alpha_1-\sqrt{\alpha_1^2+4}}{2}=\frac{-1+\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}$$

$$\gamma_1+\gamma_2=w^3+w^5+w^{12}+w^{14}+w^6+w^7+w^{10}+w^{11}$$
$$=\alpha^2$$

$$\gamma_1\cdot\gamma_2=(w^3+w^5+w^{12}+w^{14})($$
$$(w^6+w^7+w^{10}+w^{11})$$
$$=w+w^2+w^3+\cdots\cdots+w^{15}+w^{16}=-1$$

$$\gamma_1=2(\cos 3\theta+\cos 5\theta)=2\left(\cos\frac{6\pi}{17}+\cos\frac{10}{17}\pi\right)$$

$$=2\left(\cos\frac{6\pi}{17}-\cos\frac{7\pi}{17}\right)>0$$

$$\gamma_2=2(\cos 6\theta+\cos 7\theta)=2\left(\cos\frac{12}{17}\pi+\cos\frac{14}{17}\pi\right)$$

$$<0$$

$\because\ \gamma_1$與γ_2爲方程式 $t^2-\alpha_2 t-1=0$ 的二根 且$\gamma_1>0$

$\gamma_2<0$

$$\therefore 得\ \gamma_1=\frac{\alpha_2+\sqrt{\alpha_2^2+4}}{2}=\frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{2}$$

$$\gamma_2=\frac{\alpha_2-\sqrt{\alpha_2^2+4}}{2}=\frac{-1-\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{2}$$

令 $z_1=2\cos\theta$ $z_2=2\cos 4\theta$

$\therefore\ z_1+z_2=2(\cos\theta+\cos 4\theta)=\beta_1$

$z_1\cdot z_2=4\cos\theta\ \cos 4\theta=2(\cos 3\theta+\cos 5\theta)$

$=\gamma_1$

$\therefore z_1$與z_2爲方程式 $t^2-\beta_1 t+\gamma_1=0$ 之二根

且$z_1>z_2$

$$\therefore z_1=2\cos\theta=\frac{\beta_1+\sqrt{\beta_1^2-4\gamma_1}}{2}$$

$$\cos\theta=\frac{\beta_1+\sqrt{\beta_1^2-4\gamma_1}}{4}$$

$$\therefore \cos\theta=\frac{1}{16}\{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2(1-\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}}\}$$

∴正三角形、正五邊形、正十七邊形均可用直尺與圓規作圖

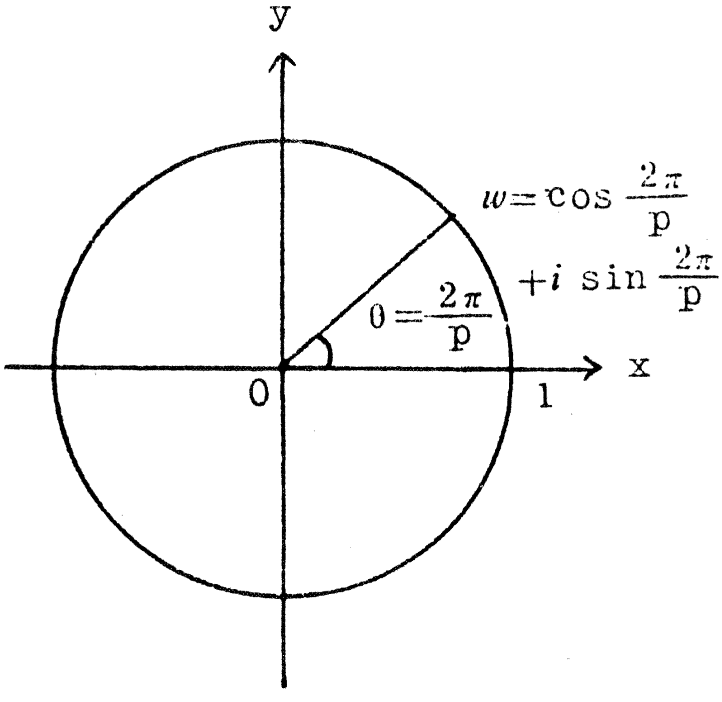
4.由3的討論，我們知當$n=3,5,17$時，均可用直尺與圓規作圖

$n=3$時 $n=3=2+1=2^{2^0}+1$

$n=5$時 $n=5=4+1=2^{2^1}+1$

$n=17$時 $n=17=16+1=2^4+1=2^{2^2}+1$

現在我們來研究一個正p邊多邊形，且p爲奇質數時，此



（圖十六）

正 p 邊多邊形可用直尺與圓規作圖時，p 必呈何者形式？

令 $w=\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}$ 則 $1, w, w^2, w^3, \cdots\cdots w^{p-1}$

必爲此正 p 邊多邊形相異 p 個頂點（如圖十六）。

∵ w 只可用直尺與圓規作圖，由 Galois 理論知〔Q (w) : Q〕$=2^k$ 其中Q爲有理數，k 爲某個正整數。

但 w 是 $\frac{x^p-1}{x-1}=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots\cdots+x^3+x^2+x+1$ 的根

令 $f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots\cdots+x^3+x^2+x+1=\frac{x^p-1}{x-1}$

$$\therefore f(x+1)=\frac{(x+1)^p-1}{(x+1)-1}=\frac{x^p+px^{p-1}+\binom{p}{2}x^{p-2}+\binom{p}{2}x^{p-3}+\cdots\cdots+\binom{p}{2}x^2+px+1-1}{x}$$

$$=x^{p-1}+px^{p-2}+\binom{p}{2}x^{p-2}+\binom{p}{3}x^{p-3}+\cdots\cdots$$

$$+\binom{p}{3}x^2+\binom{p}{2}x+p$$

其中 $\binom{p}{k}=\frac{p(p-1)(p-2)\cdots\cdots(p-k+1)}{k!}$

$0\leq k\leq p$

∵ p 爲質數由愛森斯坦法則（Eisentein's Criterion）知 f (x+1) 在Q〔x〕中爲不可約多項式 ∴ f(x) 在 Q〔x〕中亦不可約多項式 ∴〔Q (w) : Q〕$=p-1=2^k$

$\therefore p=2^k+1$ k 爲某個正整數

$3=2^{2^0}+1$，$5=2^{2^1}+1$，$17=2^{2^2}+1$，因此我們再來探討 k 是否爲 2^m 的形式（$m\geq 0$，$m\in Z$）。設 $k\neq 2^m$（$m\geq 0$，$m\in Z$，$k>0$）則 k 必有一個奇數的因數，設此

奇因數為 $a>0$，令 $k=ab$　$p=2^k+1=(2^b)^a+1=(t+1)(t^{a-1}-t^{a-2}+t^{a-3}-t^{a-4}+\cdots\cdots+1)$ 其中 $t=2^b$，$\therefore p$ 為合成數，但 p 為質數，$\therefore k=2^m$（$m\geq 0$，$m\in Z$），由上述討論知當 p 為奇質數，且正 p 邊多邊形可用直尺與圓規作圖時，p 必為　$p=2^{2^m}+1$ 的形式（$m\geq 0$，$m\in Z$）（此為一般所謂費瑪質數Fermat prime number）

5.我們現在再來探討當 $p=2^{2^m}+1$（$m\geq 0$，$m\in Z$）正 p 邊多邊形可用直尺與圓規作圖時，正 p^2 邊多邊形是否可用直尺與圓規作圖？

令　$\phi=\cos\dfrac{2\pi}{p^2}+i\sin\dfrac{2\pi}{p^2}$

$w=\cos\dfrac{2\pi}{p}+i\sin\dfrac{2\pi}{p}$　　$\therefore \phi^{p^2}=1$

$w^p-1=0$　　$\phi^p-w=0$

$\phi^p-1\neq 0$

令 $f(x)=1+x^p+x^{2p}+x^{3p}+\cdots\cdots+x^{p(p-1)}=\dfrac{x^{p^2}-1}{x^p-1}$

$\therefore f(\phi)=1+w+w^2+w^3+\cdots\cdots+w^{p-1}=0$

$\therefore \phi$ 為 $f(x)$ 的根

令 $f(x+1)=1+(1+x)^p+(1+x)^{2p}+(1+x)^{3p}$
$+\cdots\cdots+(1+x)^{p(p-1)}$
$=\dfrac{(x+1)^{p^2}-1}{(x+1)^p-1}\equiv\dfrac{x^{p^2}}{x^p}\equiv x^{p(p-1)}\pmod{p}$

由Eisenteni's Criterion 知 $f(x+1)$ 在 $Q[x]$ 為不可約多項式　$\therefore f(x)$ 在 $Q[x]$ 為不可約多項式　$\therefore [Q(\phi):Q]=p(p-1)$　　$\because p$ 為奇數　$\therefore$不存在某個正整數 k，使 $p(p-1)=2^k$ 由Galois 理論知，正 p^2 多邊形為不可用直尺與圓規作圖。

當 $p=2^{2^m}+1$（$m\geq 0$，$m\in Z$）時，正 p 邊多邊形可用直尺與圓規作圖，正 p^2 邊多邊形不可用直尺與圓規作圖。

同理，我們亦可知當$P=2^{2^m}+1$（$m\geq 0$，$m\in Z$）正p邊多邊形可用直尺與圓規作圖時，$\alpha\geq 2$，$\alpha\in N$正p^{α} 邊多邊形不可用直尺與圓規作圖

6.現在我們再來探討：當正n邊多邊形與正m邊多邊形皆可用直尺與圓規作圖，且m與n互質時，正mn邊多邊形是否可用直尺與圓規作圖？

為了討論方便與不失一般性，我們均假設正n邊多邊形與正m邊多邊形的內接於單位圓上。

$\therefore \cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ 與 $\cos\dfrac{2\pi}{m}+i\sin\dfrac{2\pi}{m}$ 分別為正n邊多邊形與正m邊多邊形上的一個頂點，$\therefore \cos\dfrac{2\pi}{n}$，$\sin\dfrac{2\pi}{n}$，$\cos\dfrac{2\pi}{m}$，$\sin\dfrac{2\pi}{m}$ 均為可用直尺與圓規作圖的長度，$\because$ m與n互質 $\therefore$存在二個整數s, t 使得$ns+mt=1$

$$\therefore \frac{1}{mn}=\frac{s}{m}+\frac{t}{n}$$

$$\therefore \cos\frac{2\pi}{mm}=\cos\left(\frac{2\pi}{m}\cdot s+\frac{2\pi}{n}\cdot t\right)$$

$$=\cos\left(\frac{2\pi}{m}\cdot s\right)\cos\left(\frac{2\pi}{n}\cdot t\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{m}\cdot s\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\cdot t\right)$$

由數學歸納法知，當$\cos\theta$與$\sin\theta$可用直尺與圓規作圖的長，則$\cos k\theta$與$\sin k\theta$ 亦可用直尺與圓規作圖的長度，故$\cos\dfrac{2\pi}{mn}$也可用直尺與圓規作圖的長度。

由上述的討論知，當正n邊多邊形與正m邊多邊形皆可用直尺與圓規作圖，且m與n互質時則正mn邊多邊形亦可用直尺與圓規作圖。

同理，由數學歸納法知，當正n_1多邊形……正n_k 多邊形均可用直尺與圓規作圖時，且n_i與n_j 互質，當$i \neq j$時，則正n_1 n_2 n_3 …… n_k 多邊形亦可用直尺與圓規作圖。

7.當正n邊多邊形可用直尺與圓規作圖，d爲n的因數（$d \geq 3$，$d \in N$）正d邊多邊形是否可用直尺與圓規作圖？

因d爲n的因數，∴存在某一個整數r，使得$n = dr$，因爲正n邊多邊形可用直尺與圓規作圖，故在已作出之正n邊多邊形上，每隔r個頂點作一直綫，即得一個正d邊多邊形，由此可知，當正n邊多邊形可用直尺與圓規作圖，且d爲n的因數（$d \geq 3$，$d \in N$），則正d邊多邊形亦可用直尺與圓規作圖。

由上述2. 3. 4. 5. 6. 7.的討論，我們可得到一個結論：
一個正n邊多邊形可用直尺與圓規作圖時，則其邊數n必呈下列形式：

$n = 2^k \times p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots\cdots \quad k \geq 0 \quad k \in Z$，

p_1，p_2，p_3，……均爲相異的費瑪質數

四、分析與討論

1.在研究4的討論中，我們得$P = 2^{2^m} + 1$的形式的費瑪質數（$m \geq 0$，$m \in Z$）一般以$F_m = 2^{2^m} + 1$來表示之。

$m = 0 \quad F_0 = 2^{2^0} + 1 = 2 + 1 = 3$

$m = 1 \quad F_1 = 2^{2^1} + 1 = 4 + 1 = 5$

$m = 2 \quad F_2 = 2^{2^2} + 1 = 16 + 1 = 17$

$m = 3 \quad F_3 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$

$m = 4 \quad F_4 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65536 + 1 = 65537$

$m = 5 \quad F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967296 + 1$

$= 4294967297 = 641 \times 6700417$

∴由此可見F_m不恒爲質數，即費瑪質數不恒爲質數

2.現在我們來討論正7邊多邊形不可用直尺圓規作圖：

令 $z=\cos\theta+i\sin\theta \quad \theta=\frac{2\pi}{7} \quad \therefore z^7=1$

$\therefore 1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6$ 爲此正邊形相異 7 個頂點

$z\neq 1 \quad \therefore \frac{z^7-1}{z-1}=z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+i=0$

令 $f(x)=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=\frac{x^7-1}{x-1}$

$f(z)=z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$

$\therefore z$ 爲 $f(x)$ 的根

$\therefore f(x+1)=\frac{(x+1)^7-1}{(x+1)-1}$

$=\frac{x^7+7x^6+21x^5+35x^4+35x^3+21x^2+7x+1-1}{x}$

$=x^6+7x^5+21x^4+35x^3+35x^2+21x+7$

由Eisentein's Criterion 知 $f(x+1)$ 在 $Q[x]$ 爲不可多項式

$\therefore f(x)=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ 在 $Q[x]$ 爲不可約多項式

$\therefore [Q(z):Q]=6$ 但不存在一個正整數 r，使得 $2^r=6$，由Galois 理論知正 7 邊多邊形不可用直尺與圓規作圖。

【另證】利用一元三次方程式來證明正 7 邊形不可用直尺與圓規作圖

令 $z=\cos\theta+i\sin\theta \quad \theta=\frac{2\pi}{7} \quad \therefore z\neq 0$

$\therefore \frac{1}{z}=\cos\theta-i\sin\theta \quad \therefore z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$

$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$

$\therefore z^3+z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}=0$

$\therefore (z+\frac{1}{z})^3+(z+\frac{1}{z})^2-2(z+\frac{1}{z})-1=0$ ……(1)

令 $\alpha=z+\frac{1}{z}$ $\therefore$ 上式(1)可改寫為 $\alpha^3+\alpha^2-2\alpha-1=0$ …

……………………………………(2)

若(2)式有有理數根，令其根為 $\frac{t}{s}$，$(s, t)=1$

$(s, t\in Z, s\neq 0)$

$\therefore (\frac{t}{s})^3+(\frac{t}{s})^2-2(\frac{t}{s})-1=0$

$\therefore t^3+st^2-2s^2t=s^3=t(t^2+st-2s)=s^3$

$\therefore (s, t)\neq 1$ 但 $(s, t)=1$

$\therefore \alpha$ 無有理數根 $\therefore$ 知 $\cos\theta$ 為無理數

$\therefore \alpha^3+\alpha^2-2\alpha-1=(\alpha+\frac{1}{3})^3-\frac{7}{3}(\alpha+\frac{1}{3})-\frac{7}{27}=0$

令 $\beta=\alpha+\frac{1}{3}$

$\therefore$ (2)式可改寫為 $\beta^3-\frac{7}{3}\beta-\frac{7}{27}=0$ ……………………………(3)

當正7邊多邊形可用直尺與圓規作圖時，則 $\cos\theta$，$\sin\theta$ 均可用直尺與圓規作圖的長度，即 $\cos\theta$ 與 $\sin\theta$ 均可用有限次的有理的代數運算或開平方根求得。

$\therefore$ 當正7邊多邊形可用直尺與圓規作圖時，α 與 β 均可用有限次的有理的代數運算或開平方根求得。

由一元三次方程式 $y^3+py+q=0$ 的卡丹公式（Crdanis formula）知

$D=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ $A=-\frac{q}{2}+\sqrt{D}$ $B=-\frac{q}{2}-\sqrt{D}$

則其三個根分別為 $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$，$\sqrt[3]{A}\ w+\sqrt[3]{B}\ w^2$，

$\sqrt[3]{A} \quad w^2 + \sqrt[3]{B} \quad w$，其中 $w = \dfrac{-1+\sqrt{3i}}{2}$ 當 $D < 0$ 時，

其三個根爲相異三個實根，則得

$$A = -\frac{q}{2} + \sqrt{-D}\ i = \rho\ (\ \cos\phi + i\ \sin\phi\ )$$

其中 $\rho = \sqrt{\left(-\dfrac{q}{2}\right)^2 + (-D)} = \sqrt{-\dfrac{p^3}{27}}$

$$B = -\frac{q}{2} - \sqrt{-D}\ i = \rho\ (\ \cos\phi - i\ \sin\phi\ )$$

$\cos\phi = \dfrac{-\dfrac{q}{2}}{\rho} = -\dfrac{q}{2} \Big/ \sqrt{-\dfrac{p^3}{27}}$ 且相異三個實數根爲

$$y_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} \qquad y_1 = 2\sqrt{\rho} \quad \cos\frac{\rho}{3}$$

$$y_2 = \sqrt[3]{A} \quad w + \sqrt[3]{B} \quad w^2 = 2\sqrt[3]{\rho} \quad \cos\frac{\phi + 2\pi}{3}$$

$$y_3 = \sqrt{A} \quad w^2 + \sqrt[3]{B} \quad w = 2\sqrt[3]{\rho} \quad \cos\frac{\phi + 4\pi}{4}$$

由(3)知 $\beta^3 - \dfrac{7}{3}\beta - \dfrac{7}{27} = 0$ 　令 $p = -\dfrac{7}{3}$ 　$q = -\dfrac{7}{27}$

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\frac{49}{108} < 0$$

$$\therefore \sqrt{-D} = \frac{7\sqrt{3}}{18} \qquad \rho = \frac{7\sqrt{7}}{27} \qquad \therefore \sqrt[3]{\rho} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\therefore \cos\phi = 4\cos^3\frac{\phi}{3} - 3\cos\frac{\phi}{3} = -\frac{q}{2} \Big/ \sqrt{-\frac{p^3}{27}}$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{14} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

令 $\gamma = \cos\dfrac{\phi}{3}$ 　$\therefore$(4)式可改寫爲 $4\gamma^3 - 3\gamma - \dfrac{\sqrt{7}}{14} = 0$

由方程式$\beta^3-\frac{7}{3}\beta-\frac{7}{27}=0$之相異三個實根爲

$$\beta_1=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=2\sqrt[3]{\rho}\quad\cos\frac{\phi}{3}$$

$$\beta_2=\sqrt{A}\quad w+\sqrt{B}\quad w^2=2\sqrt{\rho}\quad\cos\frac{\phi+2\pi}{3}$$

$$\beta_3=\sqrt{A}\quad w^2+\sqrt{B}\quad w=2\sqrt{\rho}\quad\cos\frac{\phi+4\pi}{3}$$

$$\therefore\ \beta_1=\frac{2\sqrt{7}}{3}\quad\cos\frac{\phi}{3},\ \beta_2=\frac{2\sqrt{7}}{3}\quad\cos\frac{\phi+2\pi}{3}$$

$$\beta_3=\frac{2\sqrt{7}}{3}\quad\cos\frac{\phi+4\pi}{3}$$

如果γ可化成有限次的有理式的代數運算或開平方根，則β_1，β_2，β_3 亦可化成有限次的有理式的代數運算或開平方根。

連續使用一元三次方程式卡丹公式的解，我們可知γ無法化成有限次的有理的代數運算或開平方根，故β_1，β_2，β_3無法經有限次的有理的代數運算或開平方根求得，故α，β 無法用有限次的有理的代數運算或開平方根求得，故正7邊多邊形無法用直尺與圓規作圖。

3.現在我們再來討論正三角形可用直尺與圓規作圖，但正九邊形却不可用直尺與圓規作圖。

若正九邊形可用直尺與圓規作圖，則$\theta=\frac{2\pi}{9}$可用直尺與圓規作圖。$\therefore\cos\frac{2\pi}{9}$亦可用直尺與圓規作圖。$\because\cos\theta=4\cos^3\frac{\theta}{3}-3\cos\frac{\theta}{3}$，$\therefore\cos\frac{2\pi}{3}=4\cos^3\frac{2\pi}{9}-3\cos\frac{2\pi}{9}=-\frac{1}{2}$

令 $\beta = \cos\dfrac{2\pi}{9}$ ，　∴上式可改寫為 $4\beta^3 - 3\beta + \dfrac{1}{2} = 0$

$\therefore 8\beta^3 - 6\beta + 1 = 0$

令 $f(x) = 8x^3 - 6x + 1$

$\therefore f(x+1) = 8(x+1)^3 - 6(x+1) + 1$

$= 8x^3 + 24x^2 + 18x + 3$

由愛森斯坦法則（Eisentein's Criterion）知 $f(x+1)$ 為在 $Q[x]$ 中不可約多項式

∴ $f(x)$ 在 $Q[x]$ 中不可約多項式

$\therefore [Q(\beta):Q] = 3$，但不存在一個整數 γ，使 $2^{\gamma} = 3$

由 Galois 理論知正九邊形不可用直尺與圓規作圖。

【另證】利用一元四次方程式與一元三次方程式來證明正九邊形不可用直尺與圓規作圖

令 $z = \cos\dfrac{2\pi}{9} + i\sin\dfrac{2\pi}{9}$　$\therefore z \neq 0$

$\therefore z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\dfrac{2\pi}{9} = 2\cos\theta$　$\left(\theta = \dfrac{2\pi}{9}\right)$

$\therefore z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

$\therefore z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z^3} + \dfrac{1}{z^4} = 0$

$\therefore \left(z + \dfrac{1}{z}\right)^4 + \left(z + \dfrac{1}{2}\right)^3 - 3\left(z + \dfrac{1}{z}\right)^2 - 2\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$

$+ 1 = 0$ ……………………………………………………(6)

令 $\alpha = z + \dfrac{1}{z}$　∴上式(6)可改寫為 $\alpha^4 + \alpha^3 - 3\alpha^2 - 2\alpha + 1$

$= 0$ ……………………………………………………(7)

若令(7)式有現數的根，即 $\alpha \in Q$　則令 $\alpha = \dfrac{t}{s}$，

其中 $(s, t) = 1$　$s, t \in Z$，　$s \neq 0$

$\therefore (\frac{t}{s})^4 + (\frac{t}{s})^3 - 3(\frac{t}{s})^2 - 2(\frac{t}{s}) + 1 = 0$

$\therefore t^4 + st^3 - 3t^2s^2 - 2ts^3 + s^4 = 0$

$\therefore t^4 = s(-t^3 + 3t^2s + 2ts^2 - s^3)$

但$\because (s, t) = 1 \quad \therefore (s, t^4) = 1$

$\therefore$知α無有理數根　$\therefore$知$\cos\frac{2\pi}{9}$爲無理數根

$\therefore \alpha^4 + \alpha^3 - 3\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$

$\therefore (\alpha + \frac{1}{4})^4 - \frac{27}{8}(\alpha + \frac{1}{4})^2 - \frac{3}{8}(\alpha + \frac{1}{4}) + \frac{333}{256} = 0 \cdots (8)$

令$y = \alpha + \frac{1}{4}$ $\therefore$上式(8)可改寫爲$y^4 - \frac{27}{8}y^2 - \frac{3}{8}y + \frac{333}{256} = 0 \cdots (9)$

利用一元四次方程式的解法，取適當的μ值使

$y^4 + y^2\mu + \frac{\mu^2}{4} = [(\frac{27}{8} + \mu)y^2 + \frac{3}{8}y + \frac{\mu^2}{4} - \frac{333}{256}]$

$\therefore (y^2 + \frac{\mu}{4})^2 = [(\frac{27}{8} + \mu)y^2 + \frac{3}{8}y + \frac{\mu^2}{4} - \frac{333}{256}]$在上式

中左邊式子爲完全平方的條件爲

$(\frac{3}{8})^2 - 4(\frac{27}{8} + \mu)(\frac{\mu^2}{4} - \frac{333}{256}) = 0$

$\therefore \frac{9}{64} - 4(\frac{27}{32}\mu^2 - \frac{8991}{2048} + \frac{\mu^3}{4} - \frac{333}{256}\mu) = 0$

$\therefore \mu^3 + \frac{27}{8}\mu^2 - \frac{333}{64}\mu - \frac{8919}{512} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$

再利用卡丹公式（Cardanis formula）求μ的解

再由(10)式　$\mu^3 + \frac{27}{8}\mu^2 - \frac{333}{64}\mu - \frac{8919}{512} = 0$

$\therefore (\mu + \frac{9}{8})^3 - \frac{576}{64}(\mu + \frac{9}{8}) - \frac{4464}{512} = 0$

$\therefore (\mu + \frac{9}{8})^3 - 9(\mu + \frac{9}{8}) - \frac{279}{32} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$

令 $S = \mu + \frac{9}{8}$　∴上式⑾可改爲 $S^3 - 9S - \frac{279}{32} = 0$ ……⑿

$p = -9 \quad q = -\frac{279}{32} \quad D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\frac{32751}{4096} < 0$

∴知⑿式有三個相異實數根

$$A = -\frac{q}{2} + \sqrt{-D} \quad i = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$$

$$B = -\frac{q}{2} - \sqrt{-D} \quad i = \rho(\cos\phi - i\sin\phi)$$

其中 $\rho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \sqrt{27}$

$$\cos\phi = -\frac{q}{2} / \sqrt{\frac{-p^3}{27}} = \frac{\frac{279}{64}}{\sqrt{27}} = \frac{31\sqrt{3}}{64}$$

∴我們知⑿式　$S^3 - 9S - \frac{279}{32} = 0$　之相異三個實數根爲

$$S_1 = \sqrt[3]{\rho} \quad \cos\frac{\phi}{3} = \sqrt{3} \quad \cos\frac{\phi}{3}$$

$$S_2 = \sqrt[3]{\rho} \quad \cos\frac{\phi + 2\pi}{3} = \sqrt{3} \quad \cos\frac{\phi + 2\pi}{3}$$

$$S_3 = \sqrt[3]{\rho} \quad \cos\frac{\phi + 4\pi}{3} = \sqrt{3} \quad \cos\frac{\phi + 4\pi}{3}$$

∵ $\cos\phi = 4\cos^3\frac{\phi}{3} - 3\cos\frac{\phi}{3} = \frac{31\sqrt{3}}{64}$ ………………⒀

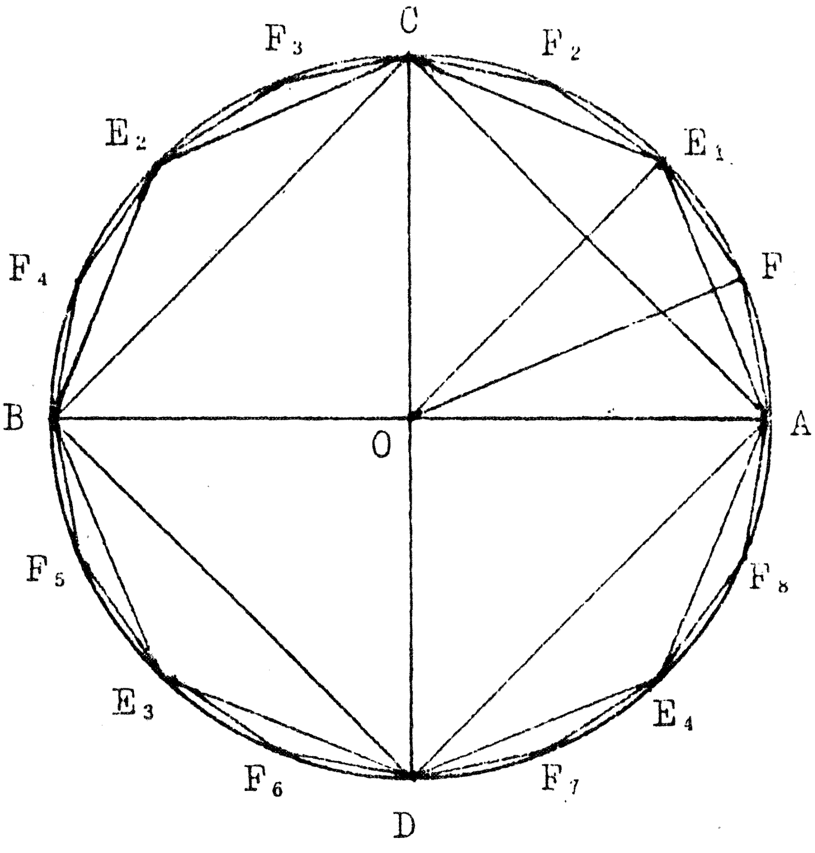
令 $\gamma = \cos\frac{\phi}{3}$

∴上式⒀可改寫爲 $4\gamma^3 - 3\gamma - \frac{31\sqrt{3}}{64} = 0$ ……………⒁

如果 γ 可化成有限次的有理式的代數運算或開平方根，則 S_1，S_2，S_3，μ，y，α 均可用有限次的有理的代數運算或開平方

根求得，但我們連續使用卡丹公式解(14)之γ解。我們知γ無法用有限次的有理代數運算或開平方求得，故S_1，S_2，S_3，μ，y，α 均無法用有限次的有理代數運算或開平方根求得，故我們知正九邊形無法用直尺與圓規作圖。

五、作　圖



（圖十七）

1.正方形、正八邊形、正十六邊形的作圖：

作法：(1)以$\overline{AB}$ 爲直徑，作一圓（設其圓心爲O）。

(2)過O點作$\overline{AB}$的垂直線$\overleftrightarrow{CD}$交圓O於C，D 二點，連結$\overline{AC}$，$\overline{CB}$，$\overline{BD}$，$\overline{DA}$則得一正方形ABCD。

(3)作∠AOC的角平分綫$\overrightarrow{OE_1}$交圓O於E_1點連結$\overline{AE_1}$，以$\overline{AE}_1$爲正多邊形一邊的長A爲其一個頂點，則可得正八邊形$AE_1CE_2BE_3DE_4$

(4)作∠AOE_1的角平分綫$\overrightarrow{OF}_1$交圓於F_1點連結$\overline{AF}_1$，

以$\overline{AF_1}$爲一正多邊形一邊的長A爲其一個頂點，則可得正十六邊形$AF_1E_1F_2CF_3E_2F_4BF_5E_3F_6DF_7EF_8$

證明：

∵ $\overline{AB}$爲圓O的直徑，且$\overline{CD}$爲過O點且垂直$\overline{AB}$，

∴ $\overline{CD}$亦爲圓O的直徑

∴ $\angle AOC=\angle COB=\angle BOD=\angle DOA=90°$

∴ $\overline{AC}=\overline{BC}=\overline{BD}=\overline{DA}$

∴ $\angle ACB=\angle CBD=\angle BDA=\angle DAC=90°$

∴ 四邊形ABCD爲正方形

爲了討論方便，以下均討論$\theta=\dfrac{2\pi}{n}=\dfrac{360°}{n}$，即可證明此多邊形爲正n邊多邊形，其中$\theta$爲正n邊多邊形任一邊的兩個頂點與圓心O所夾的圓心角，如圖（十七）之$\angle AOE_1$，$\angle AOF_1$. 由上述的作圖知$\angle AOE_1=\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{2\pi}{8}$，∴知$AE_1CE_2BE_3DE_4$爲一個正八邊形，$\angle AOF_1=\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{2\pi}{16}$，∴知$AF_1E_1F_2CF_3E_2F_4BF_5E_3F_6DF_7E_4F_8$爲正十六邊多邊形。

2.正三角形與正六邊形的作圖：

作法：(1)以$\overline{OA}$爲半徑，O爲圓心，作一圓O。

(2)以A爲一正多邊形的一個頂點，$\overline{OA}$爲一個正多邊形一邊的長，則可得一個正六邊形$AA_1A_2A_3A_4A_5$

(3)連結$\overline{AA_2}$，$\overline{A_2A_4}$，$\overline{A_4A}$，則可得一個正三角形$\triangle AA_2A_4$

證明：∵$\overline{OA}=\overline{OA_1}=\overline{AA_1}$ ∴$\triangle OAA_1$爲正三角形

∴$\angle AOA_1=60°=\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{6}$ ∴$AA_1A_2A_3A_4A_5$爲正六邊形，由正多邊形的性質知$\angle AOA_1=\angle A_1OA_2$

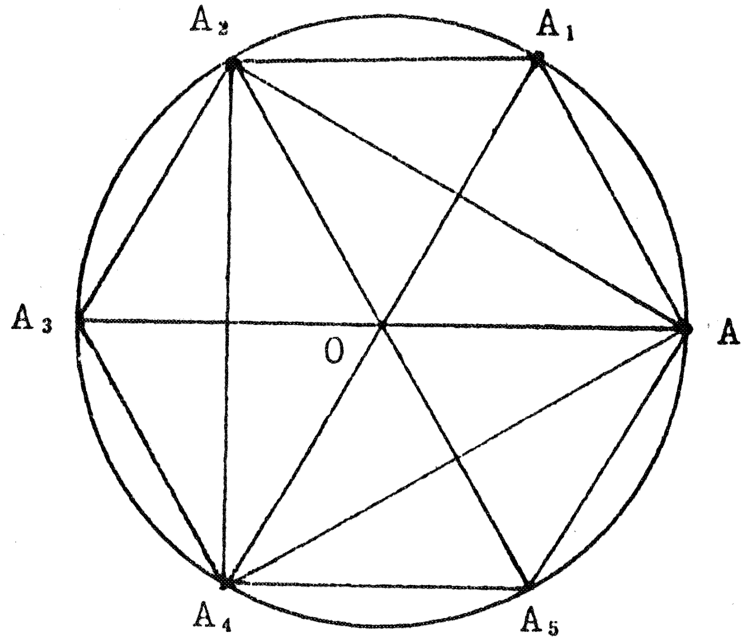
$= \angle A_2OA_3 = \angle A_3OA_4 = \angle A_4OA_5 = \angle A_5OA = 60°$

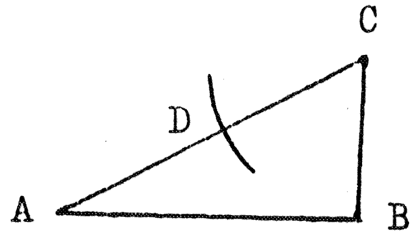
$\therefore \angle AOA_2 = \angle AOA_1 + \angle A_1OA_2 = 120° = \dfrac{360°}{3} =$

$\dfrac{2\pi}{3}$ $\therefore \triangle A\ A_2\ A_4$ 爲正三角形（如圖十八）

3.正五邊形與正十邊形的作圖：

作法：(1)作直角三角形$\triangle ABD$，使$\overline{AB} = 2\,\overline{BC}$（如圖十九）





（圖十九）

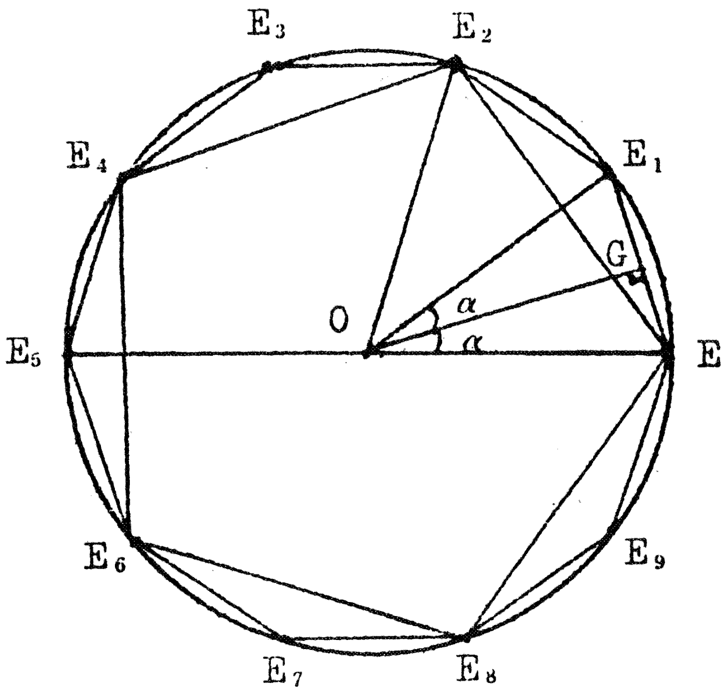
（圖十八）

(2)以C爲圓心，$\overline{BC}$爲半徑劃一弧，交$\overline{AC}$於D點。

(3)作一綫段$\overline{OE} = \overline{AB}$，以O爲圓心，$\overline{OE}$ 爲半徑，作一圓O。

(4)以E爲一多邊形的一個頂點，$\overline{AD}$ 爲一個多邊形一邊的長，則可得一個正十邊多邊形$E\ E_1\ E_2 \cdots\cdots E_7\ E_8\ E_9$（如圖二十）

(5)連結$\overline{EE_2}$，$\overline{E_2E_4}$，$\overline{E_4E_6}$，$\overline{E_6E_8}$，$\overline{E_8E}$，則可得一個正五邊形$E\ E_2\ E_4\ E_6\ E_8$（如圖二十）



（圖二十）

證明：令 $\theta = \angle EOE_1$ ，$\because \triangle ABC$ 爲直角三角形，且

$\overline{AB} = 2\,\overline{BC} \quad \therefore AC = \dfrac{\sqrt{5}}{2}AB \quad \therefore AD = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}AB$

作 $\overrightarrow{OG}$ 平分 $\angle EOE_1$ 交 $\overline{EE_1}$ 於G點，令 $\alpha = \angle GOE =$

$\dfrac{1}{2}\angle EOE_1 = \dfrac{1}{2}\theta \quad \therefore \overline{E_1G} = \dfrac{1}{2}\overline{EE_1} \quad \because \overline{OE} = \overline{AB}$

$\therefore \overline{E_1E} = \overline{AD} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\overline{AB} = \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\overline{OE}$

$\therefore \sin\alpha = \dfrac{\overline{E_1G}}{\overline{OE_1}} = \dfrac{\overline{E_1G}}{\overline{OE}} = \dfrac{\overline{EG}}{\overline{OE}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\overline{EE_1}}{\overline{OE}}\right)$

$= \dfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$

當 $O < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，且 $\sin\alpha = \dfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$

則$\alpha = 18°$　$\therefore \angle EOE_1 = \theta = 18° \times 2 = 36° = \frac{2\pi}{10}$

$\therefore$知多邊形$E\ E_1\ E_2\ E_3 \cdots\cdots E_7\ E_8\ E_9$ 爲正十邊多邊形

多邊形$E\ E_2\ E_4\ E_6\ E_8$爲正五邊多邊形。

4.正十七邊形的作圖：

作法：(1)作$\overleftrightarrow{OA} \perp \overleftrightarrow{OB}$ 且相交於O點，以O點爲圓心，取適當的長度爲半徑，作一圓O交$\overrightarrow{OA}$於A點，交$\overrightarrow{OB}$ 於B點。

(2)令$\overline{OC} = \frac{1}{4}\overline{OA}$，以C點爲圓心，$\overline{CB}$爲半徑，作一圓C交$\overleftrightarrow{OA}$於D，E二點。

(3)以D點爲圓心，$\overline{DB}$爲半徑，作一圓D交$\overrightarrow{OA}$ 的相反射綫於F點。

(4)以E點爲圓心，$\overline{EB}$爲半徑，作一圓E，交$\overrightarrow{OE}$ 於G點。

(5)作$\overline{AF}$之中點H，以$\overline{AH}$ 爲半徑，作一圓H，交$\overrightarrow{OB}$的相反射綫於 I 點。

(6)在$\overrightarrow{OI}$ 上取一點K，使$\overline{OK} = 2\ OI$，以K點爲圓心，$\overline{OG}$爲半徑，作一圓K交$\overrightarrow{OA}$於L點。

(7)在$\overrightarrow{OA}$上取一點P，使$\overline{Oc} = \frac{1}{4}\overline{GL}$，過P點作$\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{OB}$交圓O於M，N二點。

(8)連結$\overline{AM}$，$\overline{AN}$ 在圓O上以A點爲一個正多邊形的頂點，$\overline{AN}$ 爲一個正多邊形一邊的長，則我們可得一個正十七邊形（如圖二十一）。

證明：爲了討論與證明方便，我們可設$\overleftrightarrow{OB}$爲X軸，$\overleftrightarrow{OA}$ 爲Y軸，O爲原點（O，O），且圓O爲單位圓，$\therefore$A，B，C等三點的坐標分別爲A（0，1），B（-1，0），

$C(0, \frac{1}{4})$，∴圓C的方程式爲 $x^2 + (y - \frac{1}{4})^2 = 1 + (\frac{1}{4})^2 = \frac{17}{16}$

∴D，E二點的坐標分別爲 $D(o, d)$，$E(o, e)$

其中 $d = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$ ，$e = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$

圓D的方程式爲 $x^2 + (y - d)^2 = 1 + d^2$

$= 1 + \frac{18 + 2\sqrt{17}}{16} = \frac{34 + 2\sqrt{17}}{16}$

∴F點的坐標爲 $F(o, f)$，其中

$$f = \frac{1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4}$$

圓E的方程式爲 $x^2 + (y - e)^2 = 1 + e^2$

$= 1 + \frac{18 - 2\sqrt{17}}{16} = \frac{34 - 2\sqrt{17}}{16}$

∴G點的坐標爲 $G(o, g)$，其中

$$g = \frac{1 - \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}$$

∵H爲 $\overline{AF}$ 之中點

∴H的坐標爲 (o, h) 其中 $h = \frac{1+f}{2}$

圓H的方程式爲 $x^2 + (y - h)^2 = (1 - h)^2$

$= 1 - 2h + h^2$

∴ I 點坐標爲 (i, o)

∴ $i^2 + (0 - h)^2 = i^2 + h^2 = 1 - 2h + h^2$

$$\therefore i^2 = 1 - 2h = 1 - 2\left(\frac{1+f}{2}\right) = -f$$

$$\therefore i = \sqrt{-f} = \frac{\sqrt{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}}{2}$$

∴K點坐標為 (k, o)

其中 $k = 2i = \sqrt{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$

圓K的方程式為 $(x-k)^2 + y^2 = g^2$

∴L點坐標為 $L(o, \ell)$　其中 $(o-k)^2+\ell^2 = g^2$

∴ $k^2+\ell^2 = g^2$

$$\therefore \ell^2 = g^2 - k^2 = \left(\frac{1-\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}\right)^2 - \left(\sqrt{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{16}\left[18-2\sqrt{17}+34-2\sqrt{17}-2(1-\sqrt{17})(\sqrt{34-2\sqrt{17}})\right]-(1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}})$$

$$= \frac{1}{16}\left[52-4\sqrt{17}-2(1-\sqrt{17})(\sqrt{34-2\sqrt{17}})\right]+(1+\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}})$$

$$= \frac{1}{16}\left[68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2(1-\sqrt{17})(\sqrt{34-2\sqrt{17}})\right]$$

$$\therefore \ell = \frac{1}{4}\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2(1-\sqrt{17})(\sqrt{34-2\sqrt{17}})}$$

∴ $\overline{GL}$ 的長度為 $\overline{GL} = |g| + \ell = \ell + |g| = \ell - g$

$$\overline{GL} = \frac{1}{4}\left[-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2(1-\sqrt{17})(\sqrt{34-2\sqrt{17}})}\right]$$

$$\therefore \overline{OP} = \frac{1}{4}\overline{GL} = \frac{1}{16}\left[-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2(1-\sqrt{17})(\sqrt{34-2\sqrt{17}})}\right]$$

∴P點坐標爲（o，p），其中

$$P=\frac{1}{16}\left[-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2(1-\sqrt{17})(\sqrt{34-2\sqrt{17}})}\right]$$

M，N二點坐標分別爲（m，p）與（n，p），其中

$m^2+p^2=1$，$n^2+p^2=1$

令$\theta=\angle NOP$　∴ $\cos\theta=\frac{\overline{OP}}{\overline{ON}}=\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}=\overline{OP}$

$$\therefore\cos\theta=\frac{1}{16}\left[-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2(1-\sqrt{17})(\sqrt{34-2\sqrt{17}})}\right]$$

∴當$0<\theta<\frac{\pi}{2}$時知$\theta=\frac{2\pi}{17}$

∴知以A點爲正多邊形的頂點，$\overline{AN}$ 爲正多邊形一邊的長，在圓O上可得一個正十七邊多邊形。

六、結　論

1. $F_m=2^{2^m}+1$（$m\geq 0$，$m\in Z$）爲費瑪質數不恒爲質數。
2. 正n邊多邊形可用直尺與圓規作圖時，作圖的條件爲n可表示下面的形式　$n=2^k\,p_1p_2p_3\cdots\cdots p_r$，其中$n\in N$，$n\geq 3$，$k\in Z$，$p_1,p_2,p_3,\cdots\cdots,p_r$均爲相異的費瑪數。
3. 當正m邊多邊形與正n邊多邊形可用直尺與圓規作圖時，且m，n互質時，則正m，n邊多邊形亦可用直尺與圓規作圖。
4. 當正n邊多邊形可用直尺與圓規作圖時，且d爲n的因數（$d\geq 3$，$d\in N$），則正d邊多邊形亦可用直尺與圓規作圖。

評語：對直尺、圓規作n邊形有完整的了解與分析。