簡易操作實驗法—突破學習障礙—
國中教師組 數學科特別獎第二名

宜蘭縣立東光國民中學　　　　　　　　　　　作　　者：林政雄

一、研究動機

有鑒於國小學生剛升入國中對於立體觀念之生疏二年級學生在“開方”學習上失去信心及國三學習低成就者在邏輯推理上之困遇引發了研究動機。

二、研究目的

如何利用簡便的輔助教具讓學生促實際操作領悟學理進而達成學習的效果，以期達到教學目的。

三、課本依據

1.國民中學數學：第一册第一章1－1長度與重量，1－3面積，1－4體積與容積。

2.國民中學數學：第三册第二章開方與方根。

3.國民中學數學：第五册

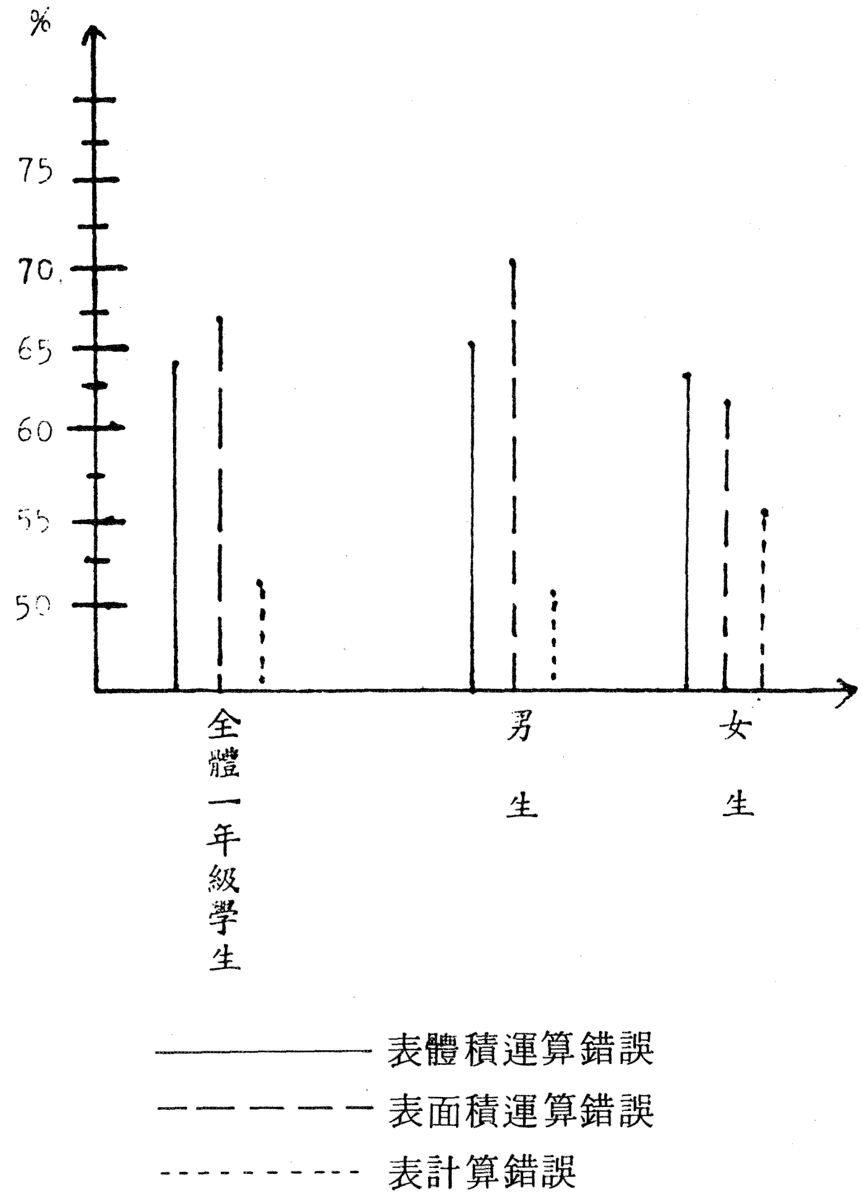
四、實驗器材

1.電子計算機2.製圖儀器3.米達尺4.壓克力板5.吸卡紙6.木材7.模型紙。

五、研究過程

從一三年級第一次學習評量上，及二年級第二次學習評量測驗獲悉如下：

一年級統計圖表



一年級全體學生

體積運算不會 64.365％　　表面積運算不會 66.51％

計算錯誤 50.28％

一年級男生

體積運算不會 65％　　表面積運算不會 69.80％

計算錯誤 50.15％

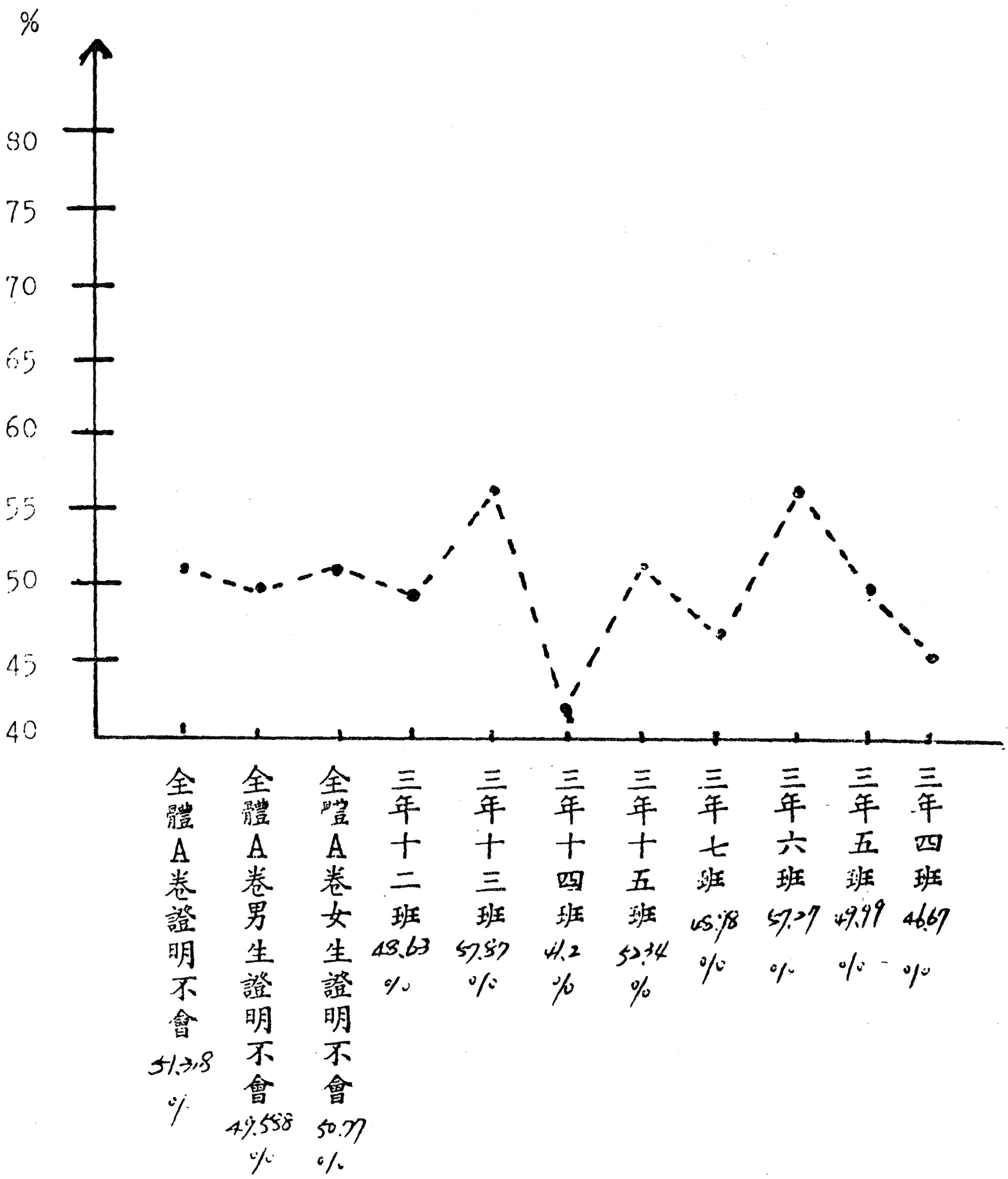
一年級女生

體積運算不會 63.57％　　表面積運算不會 62.51％

計算錯誤 55.01％

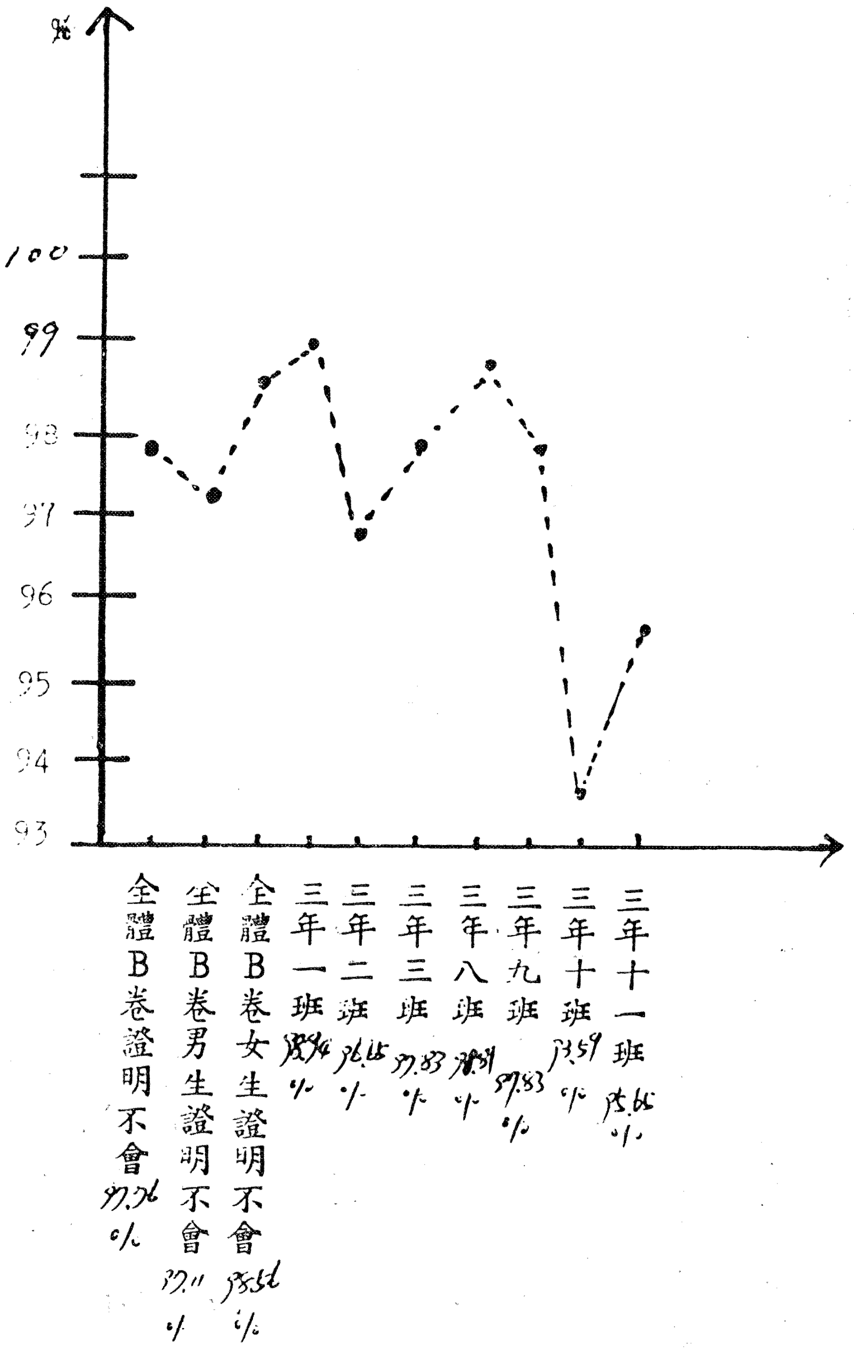
三年級證明題不會證明之統計圖表

A卷



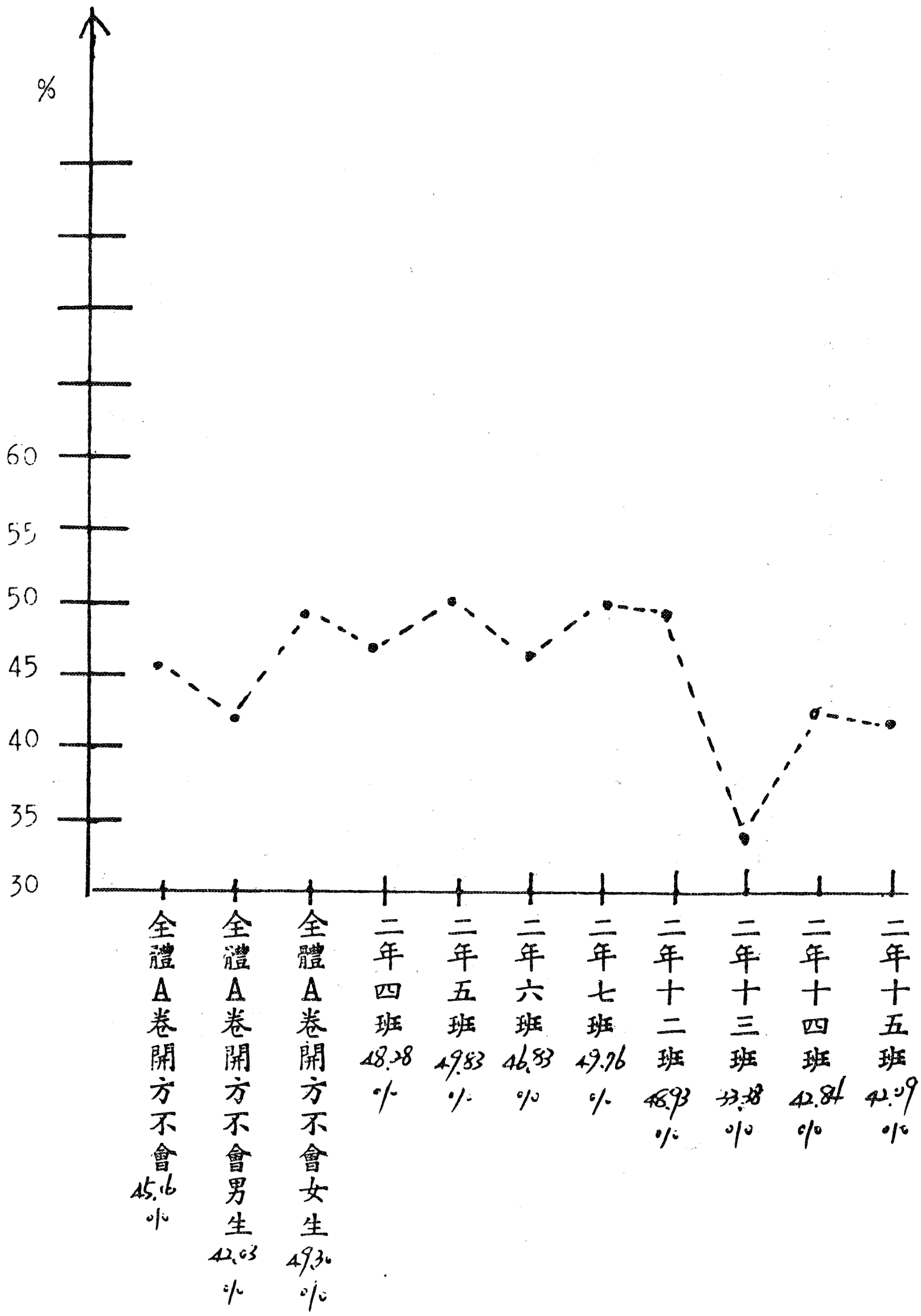
三年級

B　卷

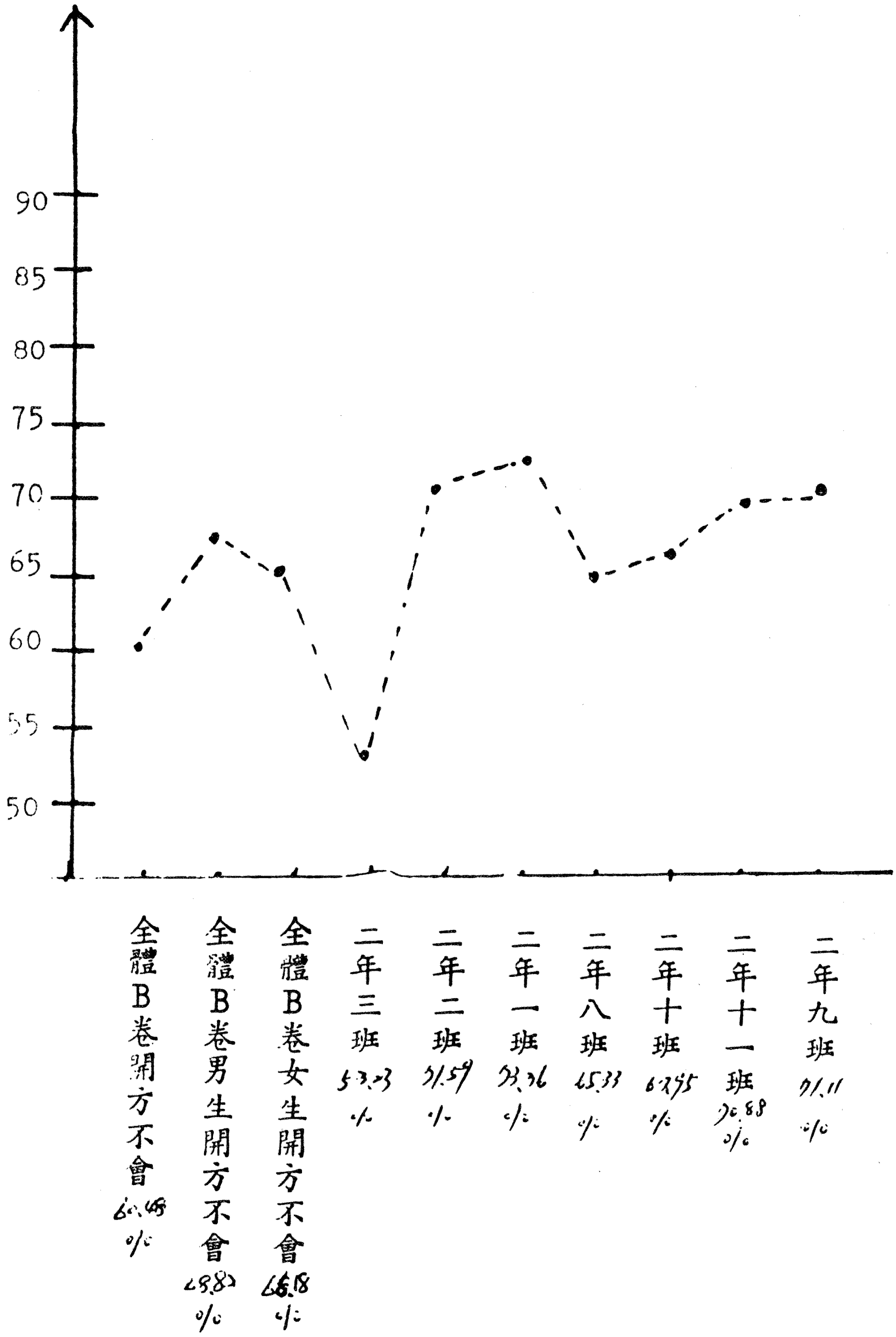

%
100
99
98
97
96
95
94
93
全體B卷證明不會 97.76 %
全體B卷男生證明不會 97.11 %
全體B卷女生證明不會
三年一班
三年二班
三年三班 97.83 %
三年八班
三年九班 97.83 %
三年十班
三年十一班

二年級

A 卷



%
60
55
50
45
40
35
30
全體A卷開方不會 45.16 %
全體A卷開方不會男生 42.03 %
全體A卷開方不會女生 49.30 %
二年四班 48.38 %
二年五班 49.83 %
二年六班 46.83 %
二年七班 49.76 %
二年十二班 48.93 %
二年十三班 33.38 %
二年十四班 42.84 %
二年十五班 42.09 %

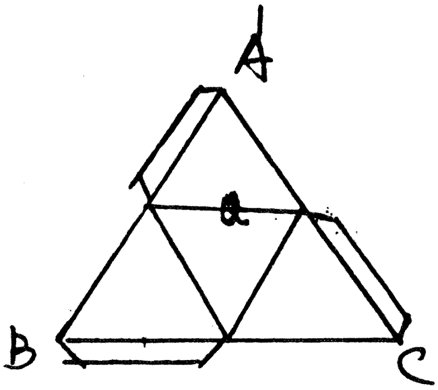

90
85
80
75
70
65
60
55
50
全體B卷開方不會 60.45 %
全體B卷男生開方不會 68.82 %
全體B卷女生開方不會 65.18 %
二年三班 53.23 %
二年二班 71.59 %
二年一班 73.36 %
二年八班 65.33 %
二年十班 67.75 %
二年十一班 70.88 %
二年九班 71.11 %

六、針對學習困難設計突破模式

1.克服不懂表面積關念 —— 模型製作

對於表面積，學習上的困難，宜讓學生實際操作立體模型之製作，從實體之製作上領悟表面積來源如：

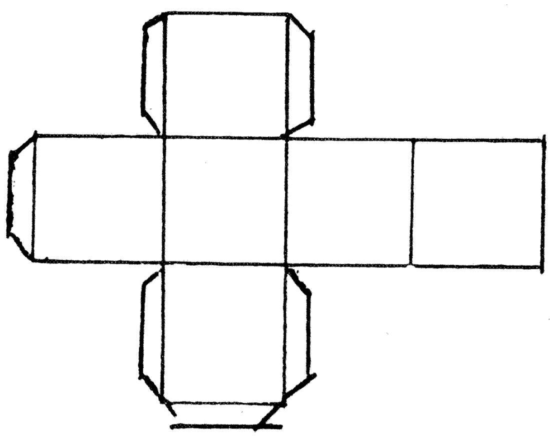
(1)正四面體製作：首先於模型紙上定下如此稿式則得正三角錐每邊長爲 a 單位，其表面積是由 4 個正三三角形圍成之封閉區域，故表面積



$= a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a \times \frac{1}{2} \times 4$

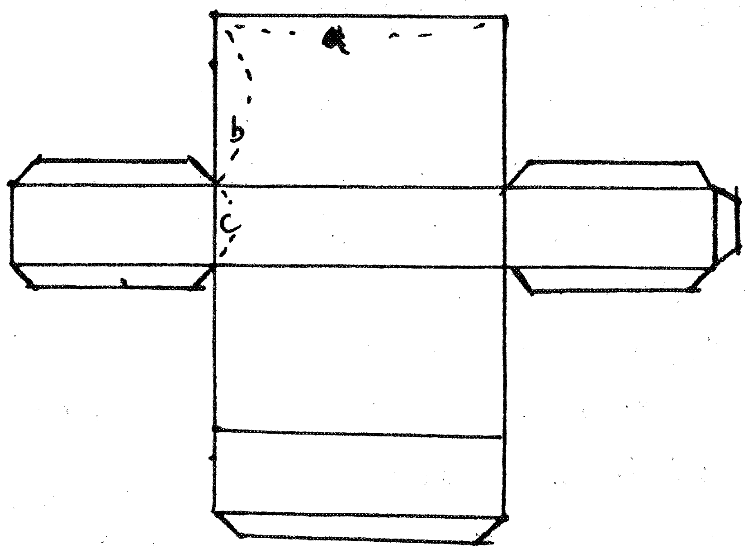
$= \sqrt{3}\ a^2$ 平方單位。

(2)正方體之製作，第一步先在模型紙上定下如下圖之稿式即可製成正方體，設正方體每邊爲 a 單位即可讓學生從製作中領悟其表面積 $= a \times a \times 6 = 6a^2$ （平方單位）



(3)長方體之製作，在模型紙上打下如下圖之稿圖，學生們很容易可體會表面積公式之由來，設長方體之長 a 單位，寬 b 單位，高 c 單位，則表面積 $= 2ab + 2bc + 2ca$

$= 2(a \times b + b \times c + c \times a)$ （平方單位）

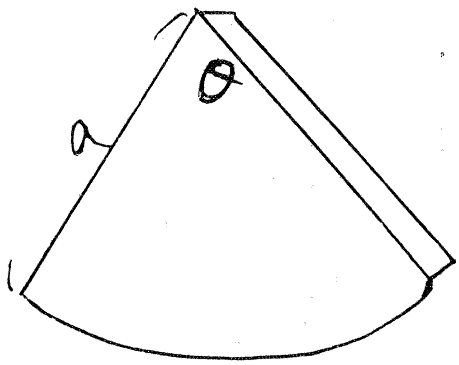


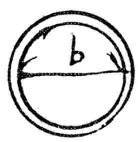
(4)圓錐體之製作，如下圖先打在模型紙上製圓錐體學生即可從稿圖上瞭解表面積之來源

$$= a \times a \times \pi \times \frac{\theta}{360} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \pi$$

$$= a^2\pi \times \frac{\theta}{360} + \frac{b^2}{4}\pi \quad \text{平方單位}$$

0（設扇形半徑為 a 單位，θ 表扇形角度，下底圓之直徑為 b 單位）

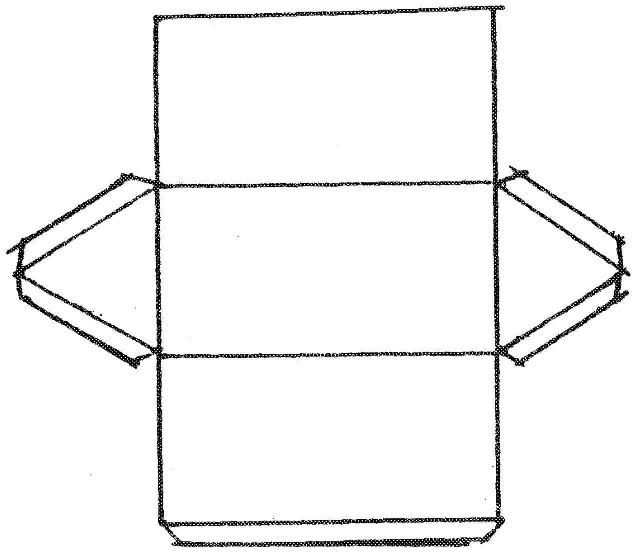




(5)三角柱之製作：在模型紙上定下如下圖之稿設三角柱高為 a 單位，寬 b 單位，學生即可知其表面積

$$= a \times b \times 3 + a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a \times 2$$

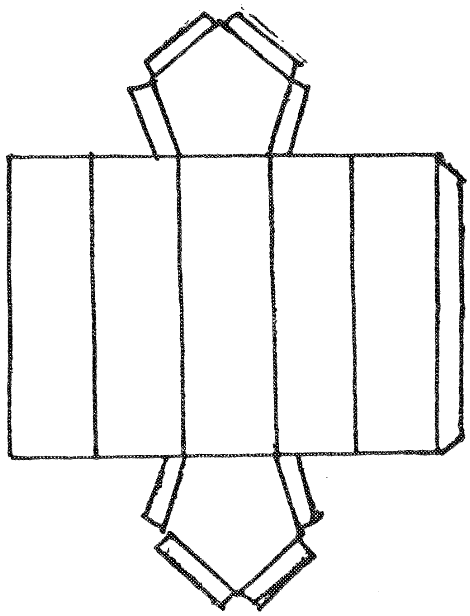
$$= (3ab + \sqrt{3}a^2) \quad (\text{平方單位})$$



(6)五角柱之製作在模型紙上先打好如下圖，設正五邊形邊長 a 單位，柱高 b 單位，學生即可瞭解五角柱表面積爲

$$= a \times b \times 5 + \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \times \frac{a}{2} \times a \times \frac{1}{2}\right) \times 5 \times 2$$

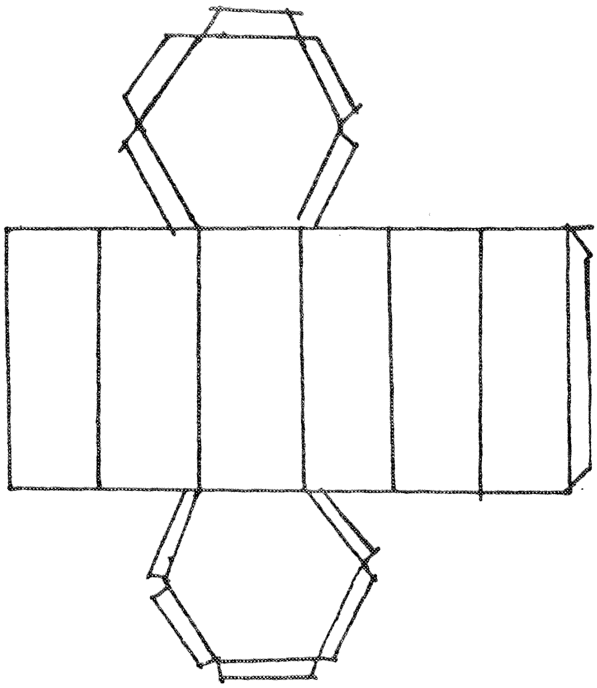
（$r = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,a$）（r 表正五邊形外接圓之半徑）



(7)正六角柱之製作，在模型紙上打好如下圖之稿（設六角柱邊長為 a 單位高 b 單位）學生即可迅速推出表面積

$$= a \times b \times 6 + \left(a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a \times \frac{1}{2} \times 6 \right) \times 2$$

$$= \left(6ab + 3\sqrt{3}a^2 \right) \quad \text{平方單位}$$

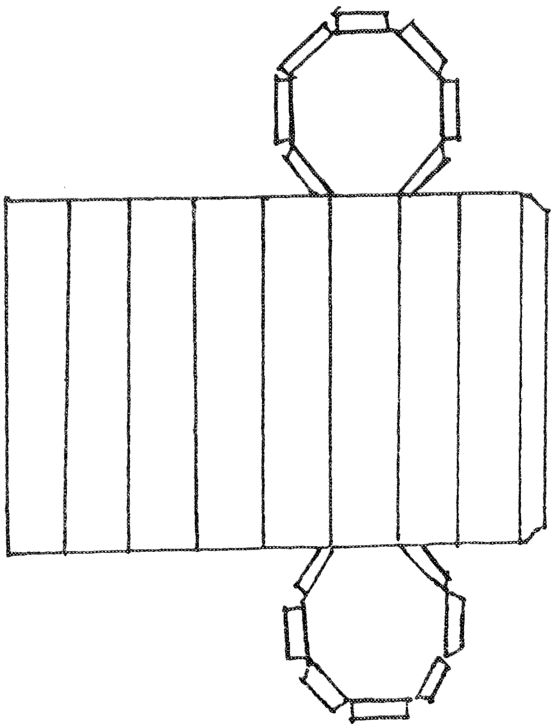


(8)正八角柱之製作，打好如右圖在模型紙上即可製成正八角柱亦可由此而推出正八角柱之表面積（設正八角柱邊長為 a 單位高 b 單位）則表面積

$$= a \times b \times 8 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times$$

$$\frac{a}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \times$$

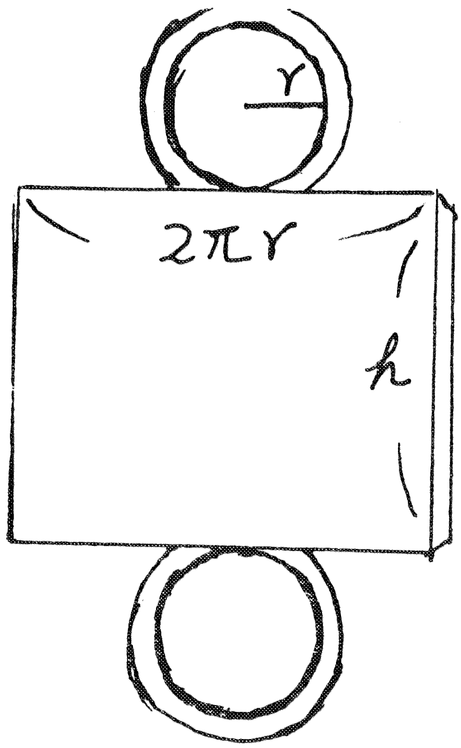
$$\frac{a}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \times \frac{1}{2} \times 8 \times 2$$



⑼圓柱體之製作：打好了右圖之稿在模型紙上即可動手製作圓柱體，亦可從此圓中推出表面積公式（設圓之半徑爲 r 單位，柱高 h 單位），表面積

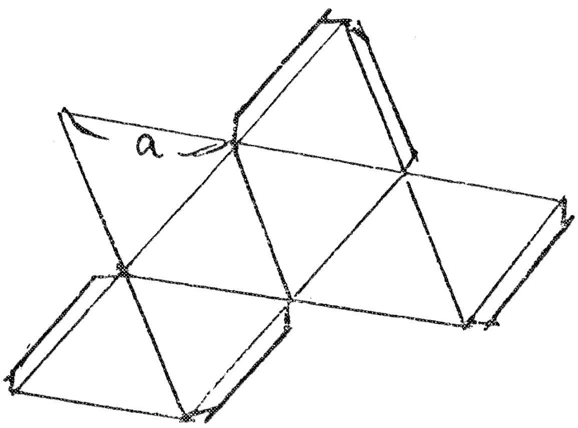
$= 2\pi r \times h + (\pi r^2) \times 2 = 2\pi r \times h + (\pi r^2) \times 2$

$= 2\pi r(h + r)$ （平方單位）



⑽正八面體製作，如右圖先打在模型紙上即可製成正八面體亦可推出表面積，設正三角形邊長爲 a 單位，則表面積

$= a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a \times \frac{1}{2} 8 = 2\sqrt{3}\, a^2$ （平方單位）

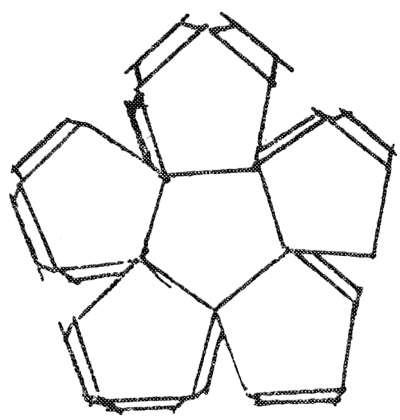


⑪正十二面體之製作：

從兩個六個正五邊形即可製成正十二面體亦可明顯讓學生瞭解正十二面體之表面積的由來。（設正五邊形之邊長爲 a 單位）則正十二面體之表面積

$$=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\times\frac{a}{2}\times a\times\frac{1}{2}\times 5\times 12$$

$$=15\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\,a^2 \quad（平方單位）$$

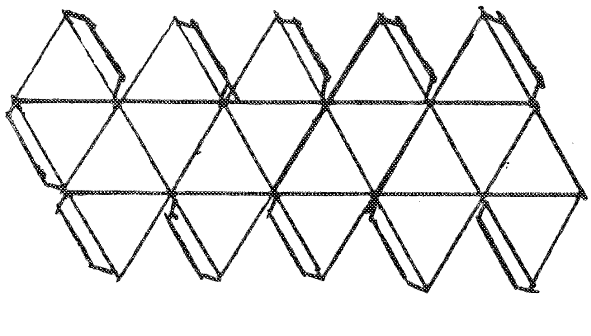


⑫正二十面體之製作：

由二十個正三角形圍成了正二十面體之封閉區域即可推出表面積（設正三角形邊長爲 a 單位）則表面積

$$=a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{1}{2}\times 20$$

$$=5\sqrt{3}\,a^2 \quad（平方單位）$$



由於以上實際之操作，加深同學對於表面積探討的興趣，進而從製作經驗中解決“死背，死啃”表面積公式的惡習，而得知活用，爲數學上不可缺失之一環，也可以培養學生思考啓發潛在推想能力。

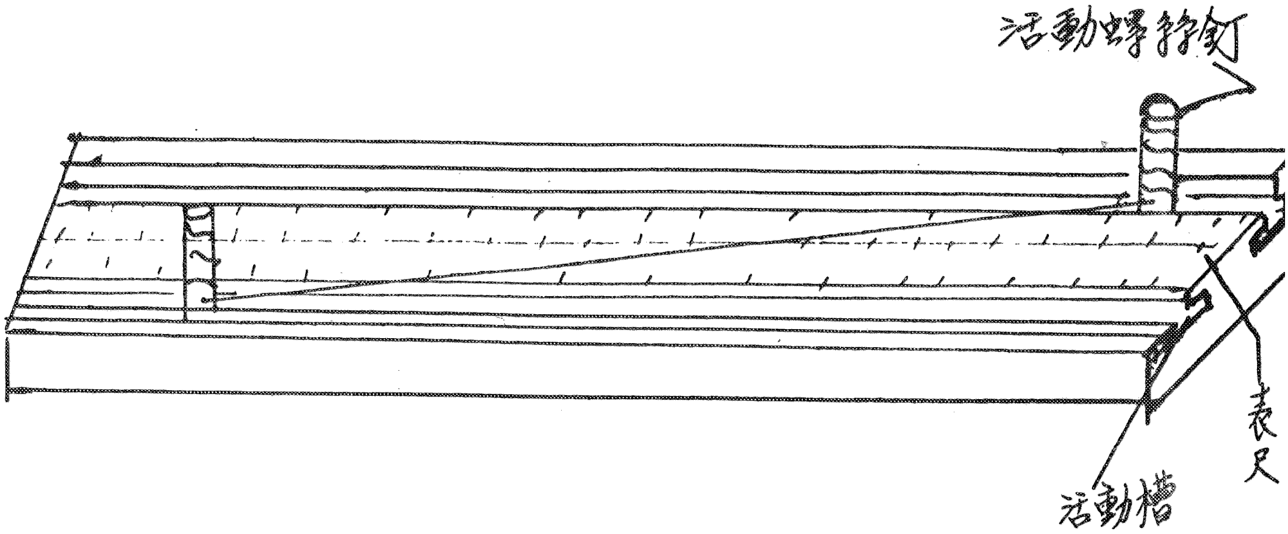
2.針對計算錯誤——製作加法尺及乘除法盤

(1)從統計表上得知加法之疏忽亦不在少數故製作輔助教具是刻不容緩，而加法上錯誤往往需在別人之查對下才能發覺，經

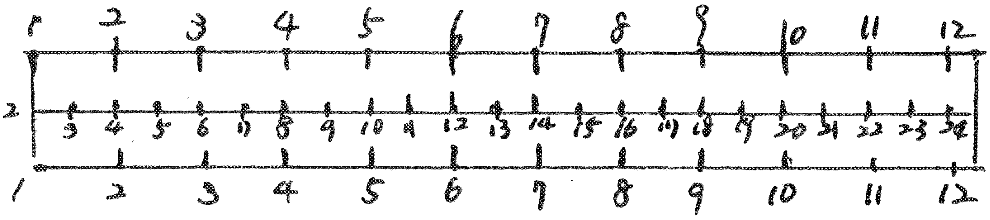
常錯誤同學有礙於尊嚴又難於啓口，如何以簡便方法自察是一個值得探討的問題，利用計算機固然是方便，但不見得每個家庭買得起，因此，此教具之製作仍有它存在價值和意義。

①製作材料（木條乙隻，米達尺，繩，螺絲釘二隻，吸卡紙）

②圖形結構



③表尺上面之刻度



中線之刻度爲外側刻度2倍，其理由三平行線且距離相等，中線爲兩外側之平均值（算術平均數）即

$$M = \frac{a + b}{2} \qquad a + b = 2M$$

即 $a + b$ 爲中間刻度之2倍由此而得知。

④使用方法，將螺絲釘移到所求之定位，螺絲上之連線與中線交點爲所求之和。

⑵乘除法盤之製作：

乘除法爲所有計算上必經之過程，如何計算，才能正確迅速

獲得結論爲學者日日夜夜所期待，而從第一次學習評量上得知乘除法之錯誤亦不在少數，如何解決困難，仍爲當今執教者首務之急，製作輔助教具是不可缺失。

①製作材料：透明壓克力、量角器、吸卡紙、計算機。

②圖形結構：

③表尺之刻度固定盤與活動盤之表尺均相同以

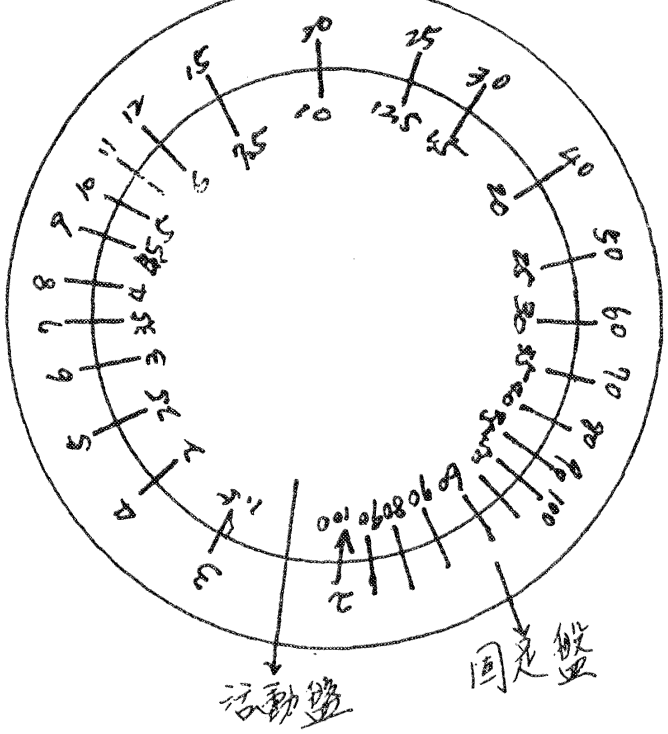
$180° \times \log 1 = 0°$　　作爲 1 之刻度

$180° \times \log 2$　　作爲 2 之刻度

$180° \times \log 3$　　作爲 3 之刻度

$180° \times \log 4$　　作爲 4 之刻度

$180° \times \log 5$　　作爲 5 之刻度



$180° \times \log 9$　　作爲 9 之刻度

$180° \times \log 10$　　作爲 10 之刻度

$180° \times \log 20$　　作爲 20 之刻度

$180° \times \log 30$　　作爲 30 之刻度

$180° \times \log 40$　　作爲 40 之刻度

$180° \times \log 50$　　作爲 50 之刻度

$180^{\circ}\times\log 90$ 作爲 90 之刻度

$180^{\circ}\times\log 100$ 作爲 100 之刻度

其理由是乘法實際與對數有關，數字愈大距離愈近，表尺上角度是由指數來度量，實際表尺所標的數爲眞數。

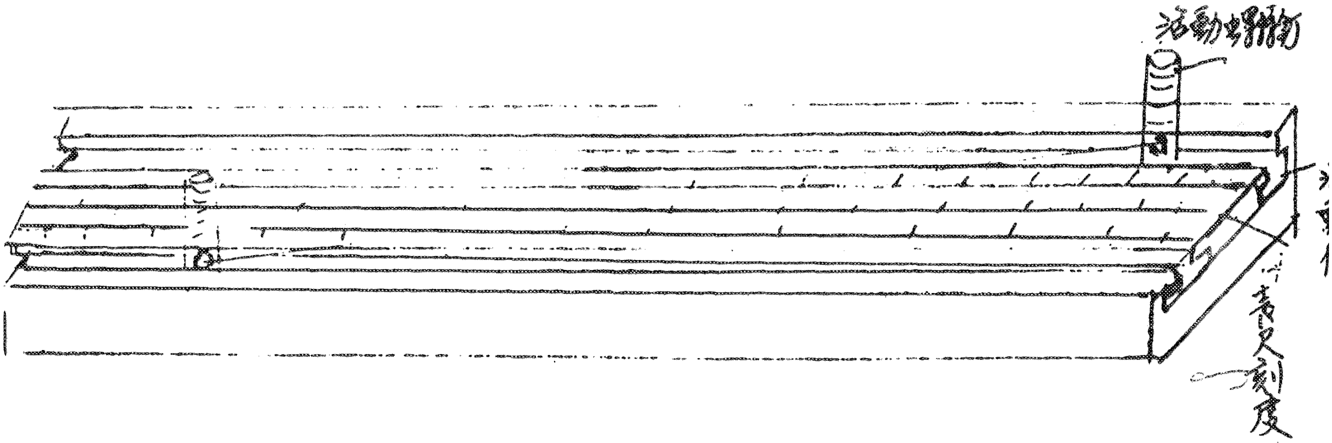
④使用方法只要將活動盤上之標箭對準固定盤之數，即得固定盤上眞數，乘上活動盤的標數，得出固定盤上的數。

⑤有了乘法計算任何體積即可迅速正確得出解答，（且可利用來算除法）

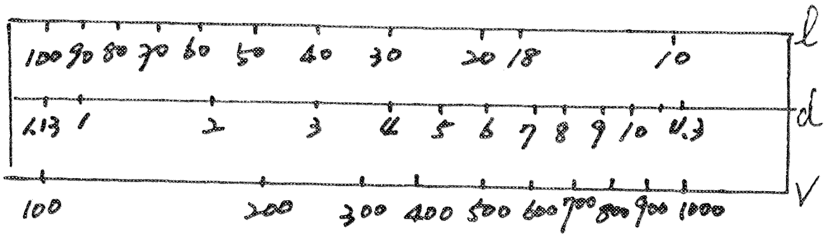
3.圓柱體體積，知體積及高，而運算出直徑又該如何？且在第一次評量測驗上，錯誤同學是佔絕大部份，亦知此種運算難度係數特別高，爲解決此一問題，特想出圓柱體積計算尺。

(1)製作材料（木條乙隻、米達尺、吸卡紙、計算機）

(2)圖形結構



(3)表尺刻度分爲三種在外側分別爲高及體積而中線爲直徑



①ℓ 表尺之製作

$75\ \text{cm}\times\log\ 10=0$

$75\ \text{cm}\times\log\ 20=22.57724967$

$75\ cm \times \log 30 = 35.7840941$

$75\ cm \times \log 40 = 45.15449935$

$75\ cm \times \log 50 = 52.42275032$

$75\ cm \times \log 60 = 58.36134378$

$75\ cm \times \log 70 = 63.382353$

$75\ cm \times \log 80 = 67.73174902$

$75\ cm \times \log 90 = 71.56818821$

$75\ cm \times \log 100 = 75$

②直徑（D）之表尺刻度

a $75 \times \log 1 = 0$ 作爲1.13之刻度

b $75 \times \log 2 - 75 \times \log 1.13 = 18.8963606$

作爲 2.0之刻度

c $75 \times \log 3 - 75 \times \log 1.13 = 31.80311049$

作爲 3.0之刻度

d $75 \times \log 4 - 75 \times \log 1.13 = 41.17360989$

作爲 4.0之刻度

e $75 \times \log 5 - 75 \times \log 1.13 = 48.44186672$

作爲 5.0之刻度

f $75 \times \log 6 - 75 \times \log 1.13 = 54.38046017$

作爲 6.0之刻度

g $75 \times \log 7 - 75 \times \log 1.13 = 59.40164639$

作爲 7.0之刻度

h $75 \times \log 8 - 75 \times \log 1.13 = 63.75086541$

作爲 8.0之刻度

i $75 \times \log 9 - 75 \times \log 1.13 = 67.65935211$

作爲 9.0之刻度

j $75 \times \log 10 - 75 \times \log 1.13 = 71.01911639$

作爲 10.0之刻度

k $75 \times \log 11 - 75 \times \log 1.13 = 74.12356777$

作爲 11.0之刻度

l $75\times\log 11.3-75\times\log 1.13=75$

作爲 11.3之刻度

③V（體積之刻度尺）

a $75\times\log 1=0$ 作爲 100之刻度

b $75\times\log 2=22.57724967$ 作爲 200之刻度

c $75\times\log 3=35.7840941$ 作爲 300之刻度

d $75\times\log 4=45.15449935$ 作爲 400之刻度

e $75\times\log 5=52.42275033$ 作爲 500之刻度

f $75\times\log 6=58.36134378$ 作爲 600之刻度

g $75\times\log 7=63.392353$ 作爲 700之刻度

h $75\times\log 8=67.73174902$ 作爲 800之刻度

i $75\times\log 9=68.2934075$ 作爲 900之刻度

j $75\times\log 10=75$ 作爲 1000之刻度

④$V=\pi r^2\times\ell \quad \therefore r^2=\frac{v}{\pi\ell}$ ，$(\frac{1}{2}d)^2=\frac{V}{\pi\ell}$

$\frac{d^2}{4}=\frac{V}{\pi\ell} \quad d^2=\frac{4V}{\pi\ell} \quad d=\sqrt{\frac{4\pi}{\pi\ell}}$

兩邊同取對數

$$\log d=\log\sqrt{\frac{4V}{\pi\ell}}=\frac{1}{2}\log\frac{4V}{\pi\ell}$$

$$=\frac{1}{2}(\log 4V-\log\pi\ell)$$

故知，當ℓ、V之刻如上述情形則與中線交點即爲兩外側對數差之平均值。

⑤使用方法，將螺絲移到已知之體積，高之數值，與中綫交點即爲直徑，或已知直徑，高亦可求出體積，不僅方便且正確在學習輔導上效果特佳。

4.二年級之第二次學習評量上，顯著顯示對於開於繁雜之步驟，

爲之失去信心，爲此激發對於開方之研究，開方之探討，以期達到開方之突破（此件曾參加第二十全國中小學科展國中數學科學生組佳作由本人指導）

(1)開方過程中來探討

①開平方之原理 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

（a，b爲正數）

$\sqrt{a^2+2ab+b^2}=\sqrt{(a+b)^2}=a+b$

	$a \quad b$
	$a^2+2ab+b^2$
a	a^2
$2a+b$	$+2ab+b^2$
	$2ab+b^2$
	0

例

	0.53
	0.2809
5	25
$2\times50+3$	309
$=103$	309
	0

例

	2. 4 3
	5.9749
2	4
$20\times2+4$	1 90
$=44$	1 76
$240\times2+3$	1449
$=483$	1449
	0

②開立方之原理 $a^3+3a^2b+3ab+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

$\sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}=\sqrt[3]{(a+b)^3}=a+b$

故 $a^3+3a^2b+3ab+b^3$ 三位一撇，首項開 a^3 得 a 其次，開第二項為 $b(3a^2+3ab+b^2)$ 數之開方即由此而得

例

	2. 9 2 4
	25. 000′ 000′ 000
22	8
$3a^2: 3\times(20)^2=1200$	17 000
$3ab: 3\times20\times9=540$	
$b^2: 9^2=81$	
1821	16 389
$3a^2: 3\times(290)^2=252300$	611 000
$3ab: 3\times290\times2=1740$	
$b^2: 2^2=4$	
254044	508 088
$3a^2: 3\times(2920)^2=25579200$	102 912 000
$3ab: 3\times(2920)\times4=35040$	
$b^2: 4^2=16$	
25614256	102 457 024
	454 976

例

	8 5
	614′125
8^2	512
$3a^2: 3\times80=19200$	102 125
$3ab: 3\times80\times50=1200$	
$b^2: 5^2=25$	102 125
20425	0

此種繁雜冗長之運算，往往由於演算上的疏忽或筆誤，以致全功盡棄而無理數之方根本爲近似值，故通常我們只求近似值。

(2)迫近法之發現爲此在教學中得一經驗，數之方根由下表可知其範圍

數	1-4	4-9	9-16	16-25
平方根值之範圍	1.0-2.0	2.0-3.0	3.0-4.0	4.0-5.0
數	1-8	8-27	27-64	64-25
立方根值之範圍	1.0-2.0	2.0-3.0	0.0-4.0	4.0-5.0

①故開方時可先推出首項而第二項不難發現是利用剩餘之數除以2倍首項也就是 $2ab+b^2 \div 2a$ 即得近似值，故將一數開方可先將此數分成兩部份x，y，一爲完全平方數即 $x=a^2$ 而其餘之數y，再將 $y \div 2a = b$

$$\sqrt{x+y}=\sqrt{a^2+y}\doteqdot\sqrt{(a+b)^2}=a+b$$

例

$$\sqrt{1}=\sqrt{1+0}\doteqdot\sqrt{(1+\frac{0}{2.1})^2}=1+0=1$$

$$\sqrt{2}=\sqrt{1+1}\doteqdot\sqrt{(1+\frac{1}{2.1})^2}=1+0.5=1.5$$

$$\sqrt{3}=\sqrt{4-1}\doteqdot\sqrt{(2-\frac{1}{2.2})^2}=2-\frac{1}{4}=1.75$$

$$\sqrt{4}=\sqrt{4+0}\doteqdot\sqrt{(2+\frac{0}{2.2})^2}=2+0=2$$

$$\sqrt{5}=\sqrt{4+1}\doteqdot\sqrt{(2+\frac{1}{2.2})^2}=2+\frac{1}{4}=2.25$$

$$\sqrt{6}=\sqrt{4+2}\doteqdot\sqrt{(2+\frac{2}{2.2})^2}=2+\frac{1}{2}=2.5$$

$$\sqrt{7}=\sqrt{9-2}\doteqdot\sqrt{(3-\frac{2}{2.3})^2}=3-\frac{1}{3}=2.666$$

（詳如附表六）

由此可知 $\sqrt{a^2+2ab+b^2}=\sqrt{\left(a+\dfrac{2ab+b}{2a}\right)^2}$

$=a+\dfrac{2ab+b^2}{2a}$（但須 $a>\dfrac{2ab+b^2}{2a}$ ）

②而開立方道理亦與開平方相同將一數化爲完全立方（即 $x=a^3$）其餘數除以 $3a^2$ 即化爲

$\sqrt[3]{x+y}\doteqdot\sqrt[3]{\left(a+\dfrac{y}{3a^2}\right)^3}$

$=a+\dfrac{y}{3a^2}$

例 $\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1+0}$

$\doteqdot\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{0}{3.1^2}\right)^2}$

$=1+0=1$

$\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{1^3+1}$

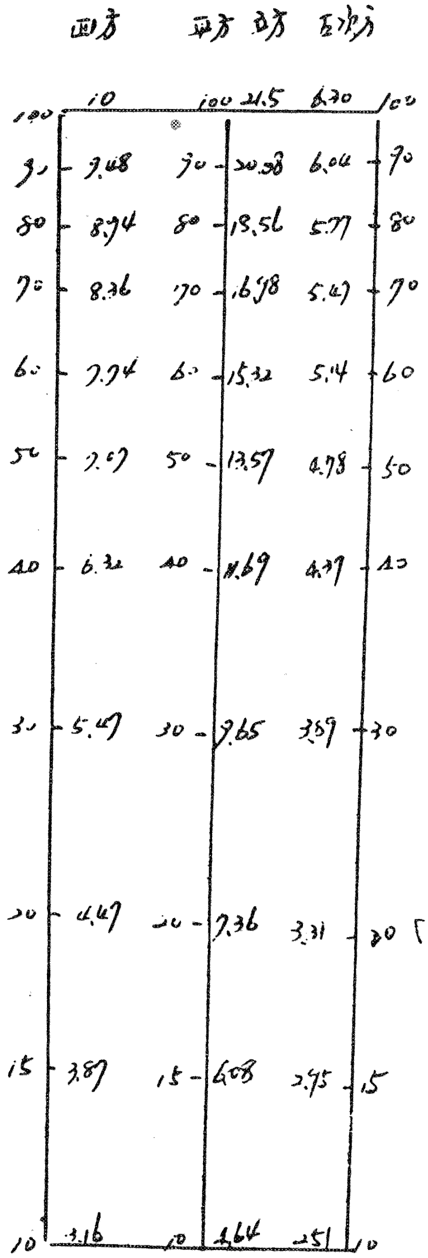
$\doteqdot\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{1}{3.1^2}\right)^3}$

$=1+\dfrac{1}{3}=1.3333$

此種迫近法之開方法平均準確度在千分位，當可說相當準確此種二分迫近法當可啓發學生對開方深一層認識。

③在測對數值時發現了 log 的值愈大彼此間的距離愈小，且距離與 $y=\log x$ 有關以全長 75 cm尺而言。

（詳如附表七）



$75 \times \log 10 = 75$

$75 \times \log 9 = 71.56818821$

$75 \times \log 8 = 67.73174902$

$75 \times \log 7 = 63.382353$

$75 \times \log 6 = 58.36134378$

$75 \times \log 5 = 52.42275032$

$75 \times \log 4 = 45.15449935$

$75 \times \log 3 = 35.7840941$

$75 \times \log 2 = 22.57724967$

$75 \times \log 1 = 0$

利用此種關係製作尺的邊緣刻度而中綫上刻度依平方、立方、四次方、五次方……而異其刻度分別以

$\sqrt{10 \times 10}$，$\sqrt[3]{10 \times 10}$，$\sqrt[4]{10 \times 10}$，$\sqrt[5]{10 \times 10}$……

來製作，經過多次實驗發現兩數相乘開方其值即落於對角綫與中綫之交點刻度上此種道理爲

$$x = ab \quad \log x = \log ab = \frac{1}{2} \log ab$$

$$= \frac{1}{2} (\log a + \log b)$$

立方根亦同　因 $X^3 = ab$　$X = 3\ ab$

$$\log x = \frac{1}{3} \log ab = \frac{1}{3} (\log a + \log b)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} (\log a + \log b)$$

$$= \frac{1}{2} \log a^{\frac{2}{3}} + \log b^{\frac{2}{3}}$$

無可置疑循此一原理當可推至任何數之 n 次方根

a 製作材料（木條乙隻，米達尺，吸卡紙，壓克力，計算機）

b 表尺上面之刻度，如上(3)圖形

c 使用方法要求一數之開方根先將此數分解爲兩數之相乘積，再將活動尺對準此二數；則與中綫交點之處即爲平方根，立方根，四次方根，五次方根。

d 遇質數時可先化爲如下

$$\sqrt{69} = \sqrt{\frac{69 \times 100}{10}}$$

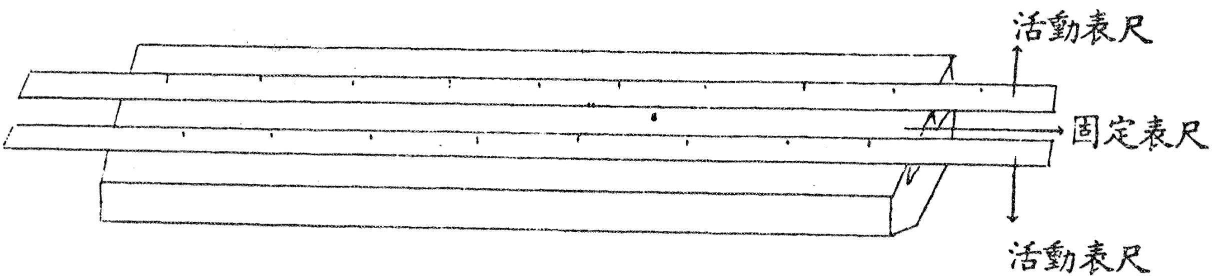
$$\sqrt[3]{69} = \sqrt[3]{\frac{69 \times 64}{4}}$$

此一補助教具可帶給學生莫大方便。

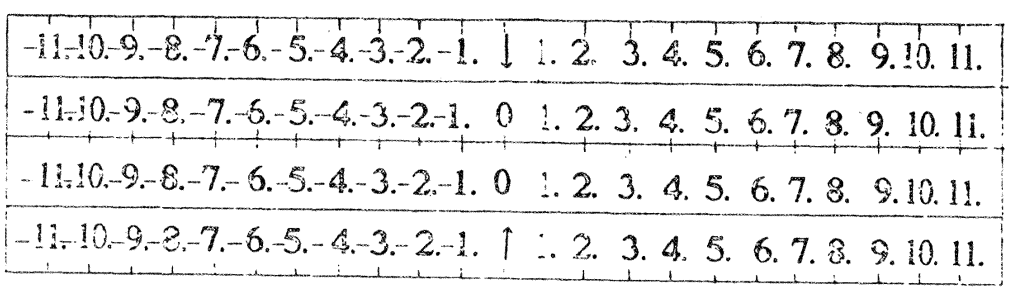
5.爲了加深二年級同學對於數綫功能之認識及一年級同學對於有號數加減及移動情況製作“揭開兩點間之奧秘尺”。

(1)製作材料：①木材　②吸卡級　③米達尺

(2)圓形結構



(3)表尺之刻度　原點右方爲正向　原點左方爲負向



(4)使用方法可稱心如意拉動活動尺即可表示數綫動及說明兩點間距離並說明正負數之加減。

6.函數可說充滿了宇宙各個角落，而如何去教學生認識、體會更是執教者當務之急，爲了讓學生能夠接受其學術價值並認識理論與實際的運用，特製作此教具。

(1)製作材料：壓克力、吸卡級

(2)圓形結構

f (x , y) =		x +		y
x				
y				
f (x , y)				

(3)使用說明：在此Table教具中，f (x , y) 代表x , y之函數若x表購買蘋果的個數，y表裝帶禮盒個數，若每禮盒只能裝 12 個則 f (x , y) 即表顧客應付出之錢，就以商場上之交來說明Table使用，生意興隆陸續顧客前來光顧「他要12個」、「他要24個」……由於每人所購買的數未必相同，偶而把錢算錯也是再所難免。

「怎樣才不致於算錯？」此乃吾人常想的問題，同時依照傳統生意作風，盛裝禮盒免費贈送則開支也是十分可觀，如何把禮盒成本加進一併計算呢？於是我們不妨設定一方程式來代替，假設蘋果每個 15 元，禮盒成本 8 元，則有 $f(x, y) = 15x + 8y$。

從此式中可以明顯的看出 x , y 代表之數隨顧客的須要而有所改變，而 f (x , y) 代表合計金額，其值也隨著 x , y 而改變，因此 x , y , f (x , y) 均爲「變數」，而每個蘋果與禮盒成本是固定的數，所以稱爲定數或常數，若以此式爲例說明：所謂「變數」就是時時刻刻都在變化，而定數則是一定值，同時以下表供同學參考其變化的情形

f (x , y) = 15 x + 8 y						
x	12	24	36	------	------	------
y	1	2	3	------	------	------
f (x , y)	188	376	564	------	------	------

①在第一列x爲12表買蘋果12個，y爲1表禮盒1只所須付款188元。

②在第二列x爲24，y爲2所須付款376元。

如果某數隨着變數的變化而改變時此二數就有函數的關係存在，根據上述之說明，蘋果、禮盒的個數與合計金額三者間即形成函數關係。

但我們必須注意的一點就是所謂「定數」只是在某一前題下如此，就以賣蘋果而言，蘋果、禮盒時因物價之波動而時有漲跌，f (x , y) = 15 x + 8 y 就不適用了。因此爲了適應實際上的需要，15 x換成ax，8 y改用by代替，於是f (x , y) = ax + by（a表每個蘋果價格，b表每個盒子價格）。

f (x , y) = ax + by 因變數　定數 自變數　定數 自變數	隨著某數的變化，而他數也隨著變化時，此二數都是變數，也就是說此二數間「有函數關係存在」

故此教具當可加深同學對於二元一次函數之認識與了解。

7.從第一次學習評量上充份顯示低學習成就同學對於幾何邏輯推理幾乎無法接納，而數學教育領域裡甚少有突破性的解法，大部份默守成規，依前人解題之方式，模仿學習，而他（她們）反應缺乏靈敏，必須步步牽引，然而依舊茫然不明究竟做起練習總是束手無措不說話用，就是消化課本之內容已是汗流浹背，而捨棄教材設計，未免過意不去。

而如何在平面幾何上設計簡單，敍述實驗之折摺方法，對於難接受理論證明者，實爲一大福音，雖然它並不具有嚴密理論之重要，但對於智商稍低之同學有相當之助益。

(1)教材設計分爲①摺疊　②旋轉　③翻轉

①摺　　疊

例a 經過圓心而垂直於弦必平分此弦以及此弦所對的弧。

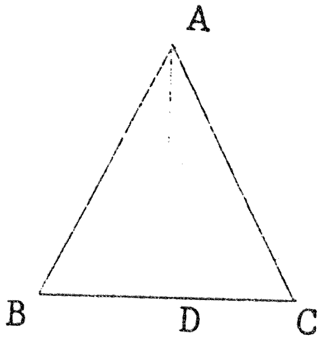
操作方法：以L綫爲軸翻轉對摺，則D與D重合，M與M重疊，B點必落在A點上。

$\overline{AD} = \overline{DB}$ ，$\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$（如圖一）

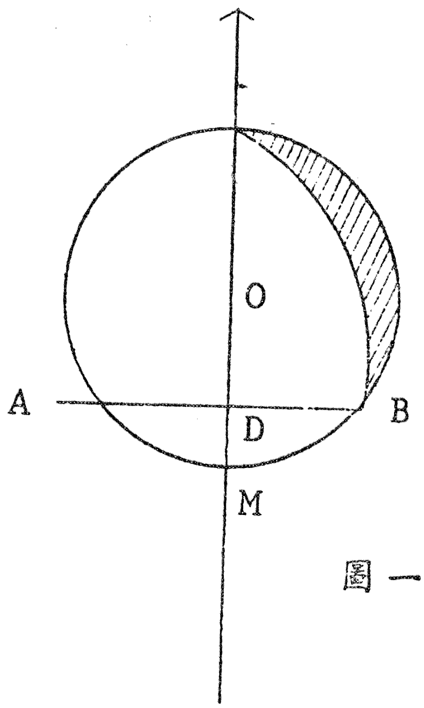
b 等腰△之兩底角相等

操作方法：在△ABC上作∠A之角平分綫 $\overrightarrow{AD}$ 以L爲基軸翻轉對摺，則△ACD與△ABD完全重合

$\therefore \angle B = \angle C$　（如圖二）



圖二



圖一

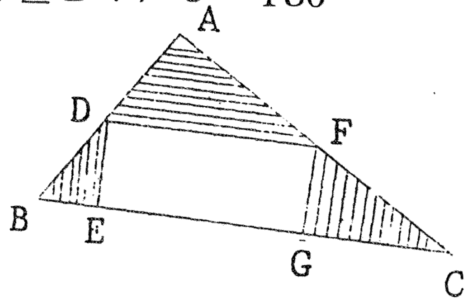
c 三角形三內角和爲 180°

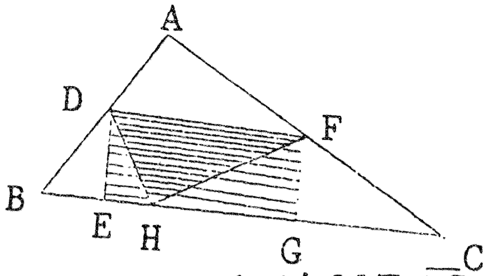
操作方法：(a)在△ABC中取 $\overline{AB}$ 中點D，$\overline{AC}$ 之中點F，作 $\overline{DE} - \overline{BC}$ ，$\overline{GF} \perp \overline{BC}$

(b)以 $\overline{DF}$ ，$\overline{DE}$ ，$\overline{FG}$ 分別爲軸翻轉

△ADF，△DBE，△GFC 則點A，B，C聚於一點H。

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$



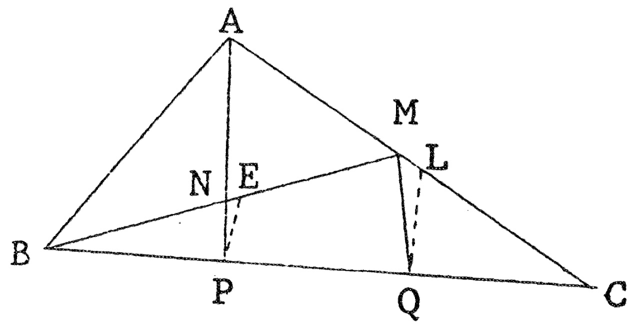


d 已知M爲$\overline{AC}$之中點，N爲$\overline{BM}$之中點，$\overline{MQ} \mathbin{/\!/} \overline{AP}$ 求證$\overline{BP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$

(a)操作方法過Q作一綫$\overline{LQ} \perp \overline{PC}$，$\overline{EP} \perp \overline{BC}$

(b)以$\overline{EP}$，$\overline{LQ}$ 爲基軸對摺即C點落在P點上，B點落在Q點上。

$\overline{BP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$



e 已知角平分綫$\overline{BP}$與$\overline{CP}$交於P，$\overline{DE} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$

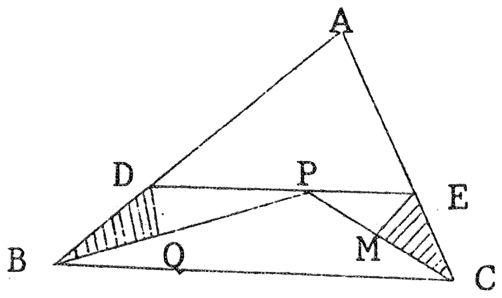
求證$\overline{DE} = \overline{BD} + \overline{EC}$

操作方法(a)過D點作$\overline{DQ} \perp \overline{BP}$，$\overline{EM} \perp \overline{PC}$

(b)以$\overline{EM}$，$\overline{DQ}$爲基軸翻轉摺疊△BDQ，△CME 即C點落在P點，B點亦落在B點。

(c)故$\overline{BD} = \overline{DP}$　　$\overline{EC} = \overline{EP}$

$\overline{EC} + \overline{BD} = \overline{DE}$

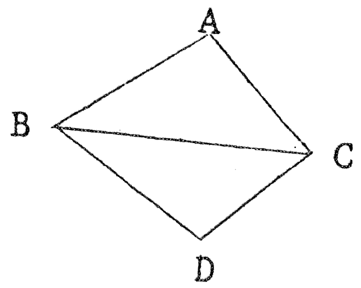


f 已知△ABC，△BCD中$\overline{AB}=\overline{BD}$，$\overline{AC}=\overline{DC}$

$\overline{BC}=\overline{BC}$　求證△ABC≅△BCD

操作方法：以$\overline{BC}$爲基綫翻摺△ABC 則與△BDC 重合

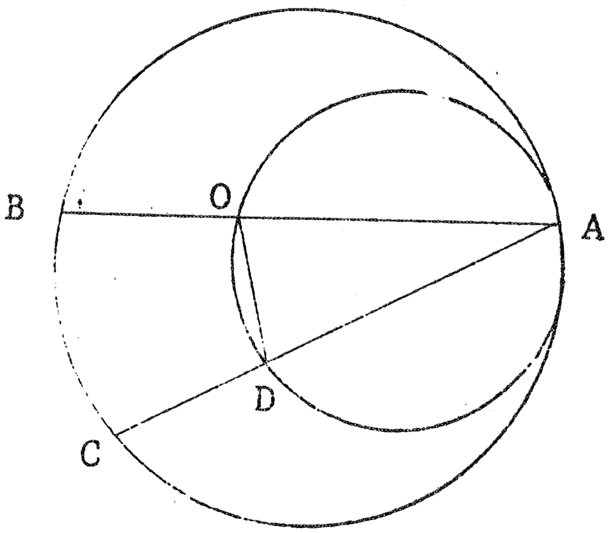
∴△ABC≅△BCD



g 已知$\overline{AB}$爲直徑，以$\overline{OA}$爲直徑作圓，求證過A點的一弦一定爲小圓所平分

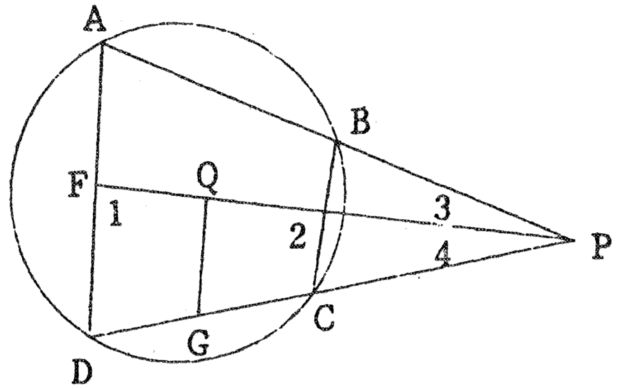
操作方法：以$\overline{OD}$爲固定軸翻轉△ODA即與$\overline{CD}$重合

∴$\overline{AD}=\overline{CD}$



h 已知ABCD爲圓內接四邊形$\overline{AB}$，$\overline{CD}$相交於P作∠P之角平分綫求證∠1＝∠2

操作方法：取 $\overline{EF}$，$\overline{DC}$ 之中點G，Q以 $\overline{GQ}$ 爲固定軸翻轉四邊形QGCE則∠2與∠1重合 ∴∠1＝∠2



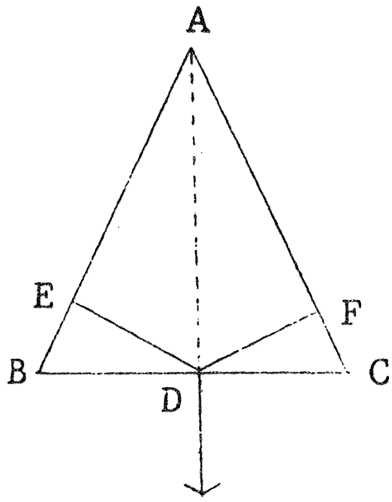
i 已知D爲 $\overline{BC}$ 之中點

$\overline{DE} \perp \overline{AB}$，$\overline{DF} \perp \overline{AC}$，DE＝DF

求證△ABC 爲等腰△

操作方法：以 $\overrightarrow{DA}$ 爲基綫翻轉對折則∠B與∠C完全吻合

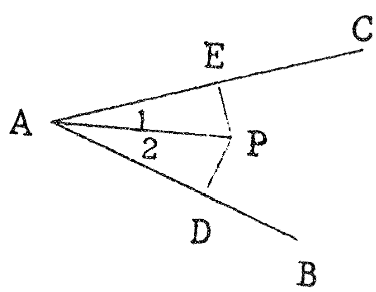
∴△ABC爲等腰△。



j 已知 $\overline{OP} \perp \overline{AB}$，$\overline{PE} \perp \overline{AC}$ $\overline{PD}＝\overline{PE}$

求證∠1＝∠2

操作方法(a)以 $\overline{PA}$ 爲基綫對折則 $\overline{AD}$ 與 $\overline{AE}$ 重合，故∠1＝∠2

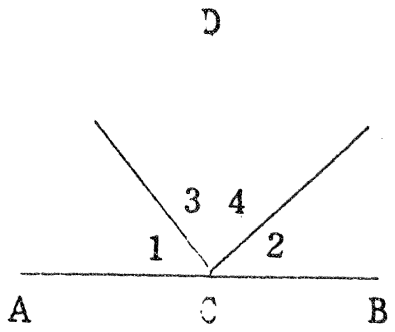


k $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ $\angle 1 = \angle 2$

求證$\angle 3 = \angle 4$

操作方法(a)以$\overline{DC}$ 爲固定軸翻轉$\angle 3$ 即得證$\angle 3$與$\angle 4$重合

$\therefore \angle 3 = \angle 4$

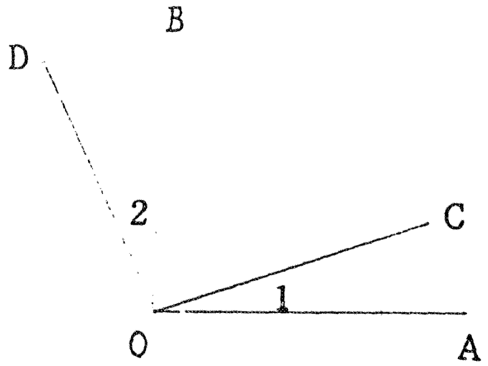


①旋轉

a 已知$\overline{OA} \perp \overline{OB}$ $\angle 1 = \angle 2$ 求證$\overline{OD} \perp \overline{OC}$

操作方法(a)以O爲定點旋轉$\angle$DOB 則與$\angle$COA 重合

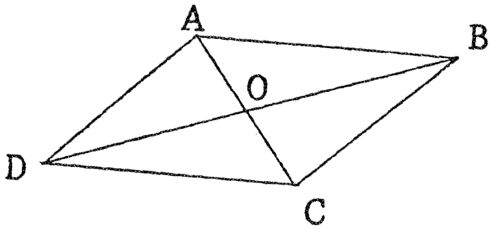
$\because \overline{OA} \perp \overline{OB}$ $\therefore \overline{OD} \perp \overline{OC}$



b 已知ABCD爲一 求證$\overline{AO} = \overline{OC}$, $\overline{OD} = \overline{OB}$

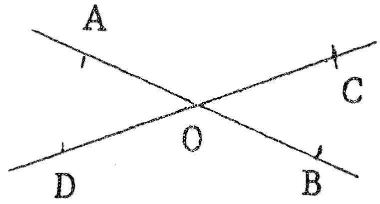
操作方法(a)以O爲定點旋轉$\triangle$AOD與$\triangle$COB重合

$\therefore \overline{OD} = \overline{OB}$ $\overline{AO} = \overline{OC}$



c 已知二直綫相交對頂角相等

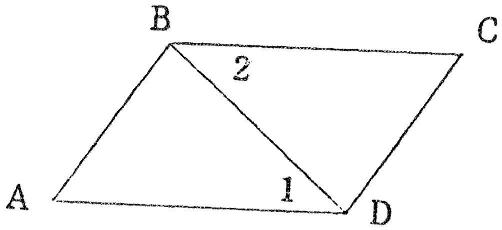
操作方法(a)以O爲基點旋轉$\angle$AOC 使完全落在$\angle$DOB 上即$\angle$AOC $= \angle$DOB



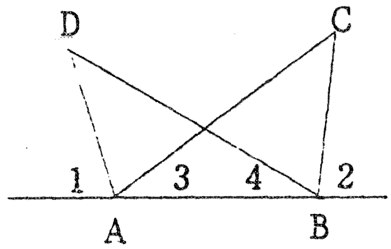
d 已知$\overline{AD}=\overline{BC}$　$\angle 1=\angle 2$　求證$\angle A=\angle C$

操作方法(a)以$\overline{BD}$爲基線翻轉，$\triangle BAD$ 使D點落在B點上，A點落在C點上則$\angle A$與$\angle C$完全吻合。

(b)即$\angle C=\angle A$



e 已知$\angle 1=\angle 2$　$\angle 3=\angle 4$　求證$\overline{AC}=\overline{BD}$



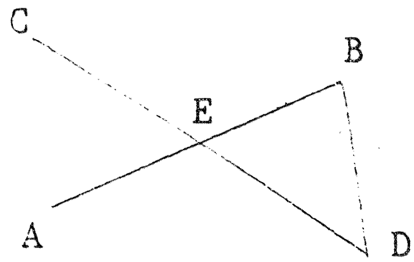
操作方法(a)把$\triangle ACB$ 翻轉使A點落在B點上，C點落在D點上而B點落在A點上

$\therefore ABC \cong \triangle BAD$　即$\overline{AC}=\overline{BD}$

f $\overline{AB}$與$\overline{CD}$相交於E，$\overline{AE}$

$\overline{AE}=\overline{BE}$，$\overline{CE}=\overline{DE}$

求證$\angle A=\angle B$



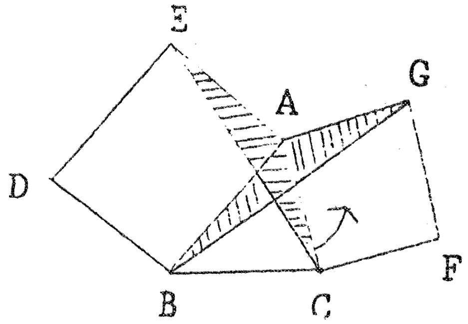
操作方法(a)翻轉$\triangle AEC$ 使之與$\triangle DBE$ 重合　則$\angle A=\angle B$

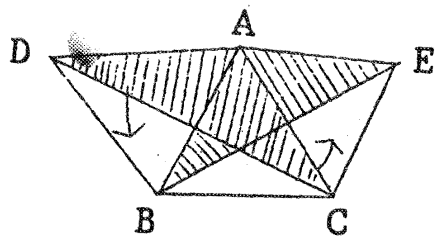
h 已知ABDE，ACFG 爲正方形　求證$\overline{EC}=\overline{BG}$

操作方法(a)以A爲基點將△EAC旋轉90°

(b)則△AEC完全重合△ABG

(c)∴ $\overline{EC}=\overline{BG}$





i 已知△ADB，△ACE爲正△　求證$\overline{DC}=\overline{BE}$

操作方法(a)以A爲基點將△ADC旋轉60°

(b)則△ADC重合於△ABE

(c)∴ $\overline{DC}=\overline{BE}$

七、結　　果

1.對於簡易操作之教具在教學上極爲需要，它能加深同學對於學理上的認識更能達到教學效果。

2.學習低成就之同學，從學習評量測驗上得悉幾乎無法接受如何設計一套簡易翻轉操作之證明，實爲刻不容緩。

3.利用開方尺開方即可迅速正確得到結論（若能刻畫出精確刻度）我們今後運算上有莫大的助益。

4.製作模型進而推出表面積之公式可培養學生思考能力；進而啓發創新思考。

5.有系統的介紹函數在教學上實爲重要，並認識應用之道理更是教學上不可缺少的一環。

6.加法尺，乘除法盤，及圓柱體體積運算尺，在初學過程中極爲需要之輔助教具，它當能幫助同學突破學習障礙以達到教學目的。

7.揭開兩點間的奧秘可充份表達數綫移動情況，有號數加減之效

果實爲執教者不可缺乏之教具。

8.本作品的價值如何，有待評審先生與參觀者的評估及獨到的見解，不吝指教更使本人由衷的感激。

評語：製作簡易數學教具，幫助有障礙學生學習，使這些學生有成就感，並作成此實驗教學之統計；熱心教學，殊值鼓勵。