由擺線到螺線的橋樑
國中教師組數學科第二名

高雄市立德國中　　作　者：林江河

一、研究動機

1.電視廣告上，有一種兒童“科學樂園”遊戲，是由許多個齒輪巧妙的結合，而由其中某一齒輪的轉動，帶動整個遊戲，非常有趣！因此，我開始嘗試以兩個硬幣之相切滾動作實驗，研究其軌跡之成因與其變化。

2.在一次偶然的機會，在文具行裡發現一種由兩圓相內切滾動的繪圖工具，頗爲新奇，可以繪出各式對稱、美妙的圖形，至於如何形成有所茫然，在好奇心的驅使下，再次引起對其深入探討的動機！

二、研究目的

1.對擺線、內擺線與外擺線之探討與分析。

2.對弧形的分佈作合理的解釋。

三、研究過程

1.先由一圓之滾動實驗，觀察圓周上一定點P之軌跡成因，發現擺線之存在。

2.由兩圓之外切滾動實驗，發現外擺線之軌跡及規律。

3.由兩個圓之內切滾動實驗，發現內擺線之軌跡及規律。

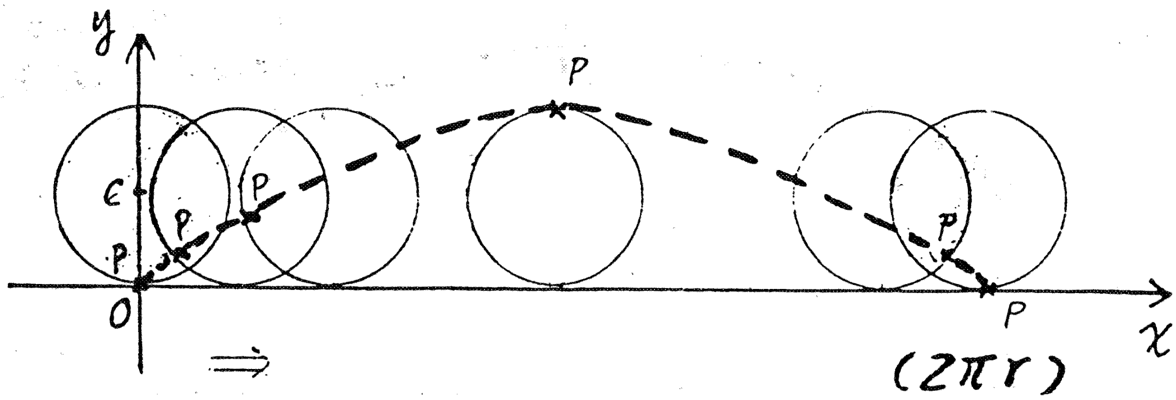
4.由內擺線之改良設計，發現阿基米德螺線之另一種解釋方式。

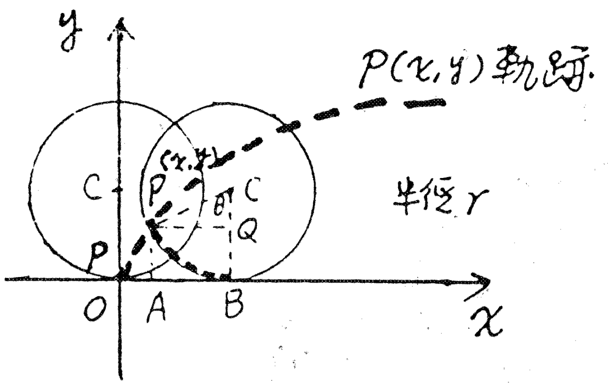
四、處理方式

實驗㈠：

用透明紙剪下半徑爲 r 之圓若干個，並在圓周上註記一點P，使其在x軸上相切滾動，按轉動角度 θ 之變化，觀察P點之軌

跡如下圖：





假設P點置於原點處開始向右滾動，轉動 θ 角時，P點位置變為（x，y）（如圖）且

$\overline{OB} = \overline{PB} = \gamma\theta$　並可得

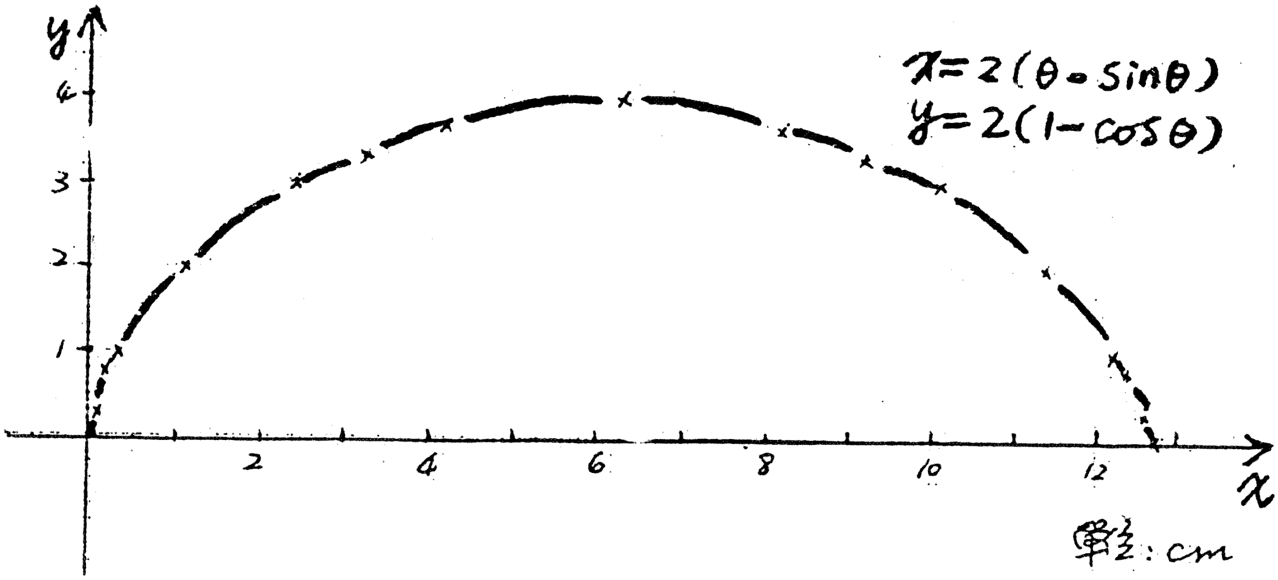
$x = \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{AB} = \gamma\theta - r\sin\theta = r(\theta - \sin\theta)$

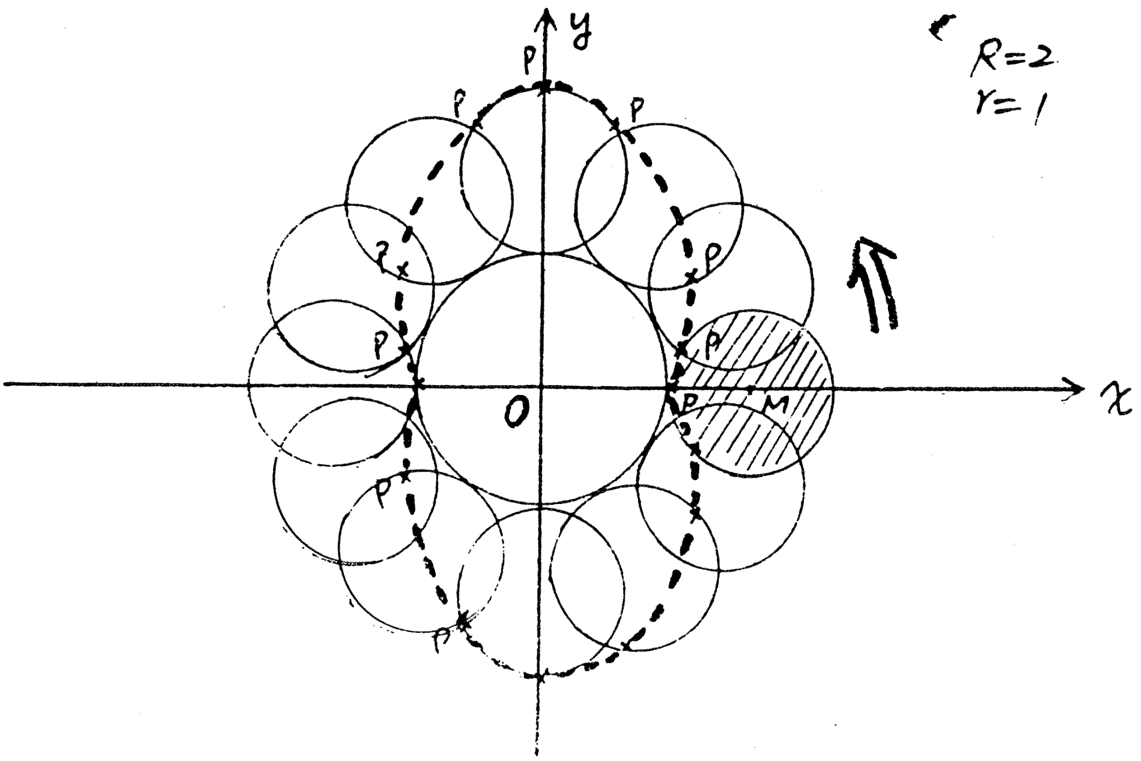
$y = \overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{BC} - \overline{CQ} = = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta)$

以上公式，令 r ＝ 2 代入，得一數據，並圖示

結論㈠：由圖示中，我們清楚的了解，此種擺線的形成，週期是 2π，最高點的位置在 $\theta = \pi$ 時，而且當 θ 由 0° 至 2π 一週後，點P的軌跡長恰等於圓周長 $2\pi r$。

實驗㈡：置一定圓圓心於O，半徑R，並用透明紙剪下半徑為r之圓若干個，在圓周上註記一點P，使其由x軸上出發，依逆時鐘方向沿定圓作外切滾動，觀察P點之軌跡：



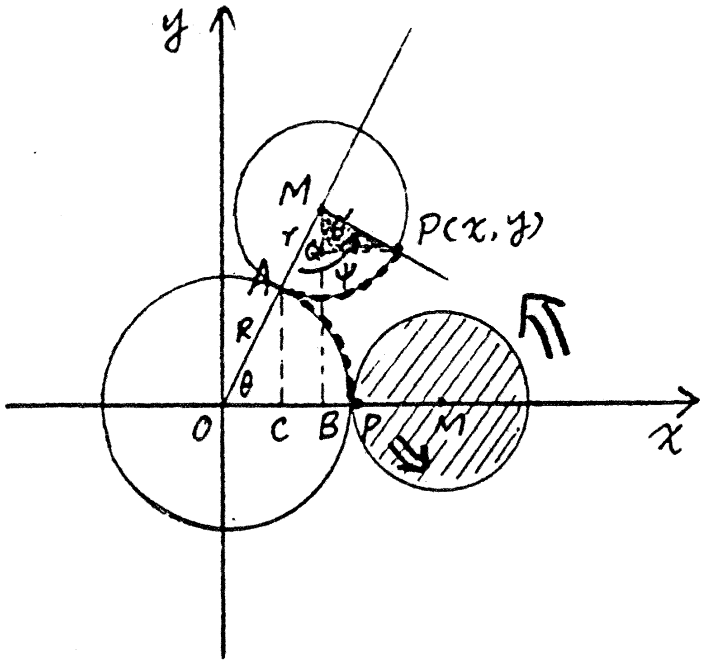


假設小圓半徑 r ，當半徑轉動 θ 角後，點 p 位置爲（ x ， y ）並設

(1)當半徑旋轉 θ 角時，小圓半徑旋轉 φ 角（如圖示）

$\because\ \theta R=\varphi r$

$$\varphi=\frac{\theta R}{r} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(i)}$$

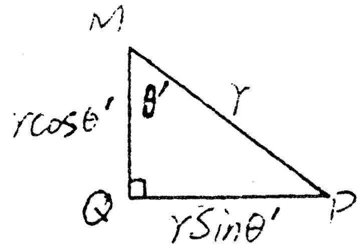


(2)動點 p ，令$\angle PMB=\theta'$

而$\angle OMB=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

$$\therefore \theta'=\psi-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\psi+\theta-\frac{\pi}{2}$$

（i）式代入：



$$\theta'=\frac{\theta R}{r}+\theta-\frac{\pi}{2}$$

$$=\theta\left(\frac{R}{r}+1\right)-\frac{\pi}{2}$$

$$=\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta-\frac{\pi}{2}$$

則點 p（x，y）之位置：

$$x=\overline{OB}+\overline{PQ}=(R+r)\cos\theta+r\sin\theta'$$

$$=(R+r)\cos\theta-r\cos\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta$$

$$y=\overline{BM}-\overline{MQ}=(R+r)\sin\theta-r\cos\theta'$$

$$=(R+r)\sin\theta - r\sin\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta$$

其中

$$\sin\theta' = \sin\left[\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta - \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right)\right]$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta$$

$$\cos\theta' = \cos\left[\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta - \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \cos\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right)\right]$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right)$$

$$= \sin\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta$$

再分別以 $\begin{cases} R=2 \\ r=1 \end{cases}$ $\begin{cases} R=3 \\ r=1 \end{cases}$ $\begin{cases} R=1 \\ r=1 \end{cases}$

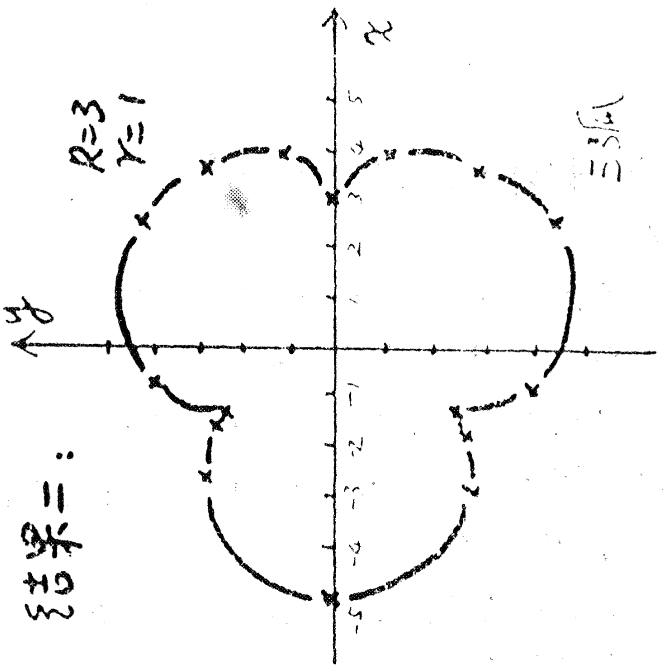
代入P（x，y）之軌跡中，得到下列一數據，並予圖示：

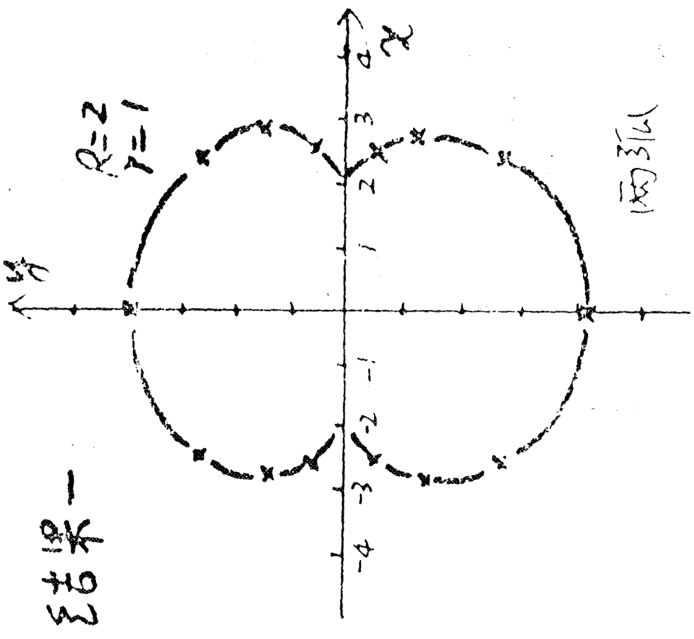
其中　$\sqrt{3} \doteqdot 1.732$　$\sqrt{2} \doteqdot 1.414$ 計

$\begin{cases} R=2 \\ r=1 \end{cases}$　軌跡是 $\begin{cases} x = 3\cos\theta - \cos 3\theta \\ y = 3\sin\theta - \sin 3\theta \end{cases}$

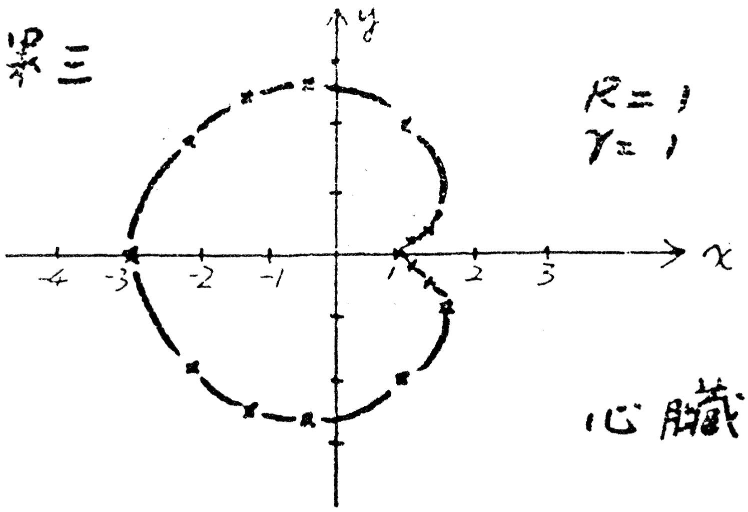
$\begin{cases} R=3 \\ r=1 \end{cases}$　軌跡是 $\begin{cases} x = 4\cos\theta - \cos 4\theta \\ y = 4\sin\theta - \sin 4\theta \end{cases}$

$\begin{cases} R=1 \\ r=1 \end{cases}$　軌跡是 $\begin{cases} x = 2\cos\theta - \cos 2\theta \\ y = 2\sin\theta - \sin 2\theta \end{cases}$





結果三



心臟線 (一弧)

由以上作圖結果，此種外擺線之弧瓣數目恰等於R／r 數（為什麼）？

結論(二)：(1)當定圓圓周 $2\pi R$ 為外圈圓周 $2\pi r$ 之整數倍 (k) 時 $\Rightarrow 2\pi R=(k)\,2\pi r \quad \Rightarrow k=R/r$

則此種外擺線便有R／r 個弧瓣

(2)根據此一原理，若R／r 為一有理數 p／q 時，即 $q\cdot R=P\cdot r$

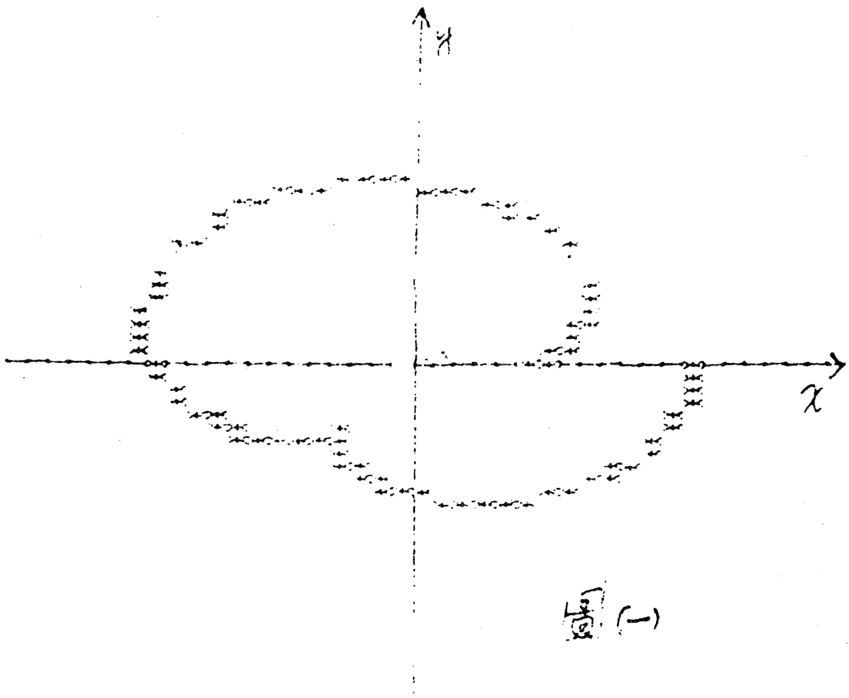
則 p 點的位置必經繞定圓 q 圈後，會再重回原位，（如下圖）

$$\left\{\begin{array}{ll} R=3 & \text{代入} \\ \\ r=2 & \text{代入} \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x=(R+r)\cos\theta-r\cos\left(\dfrac{R+r}{r}\right)\theta \\ \\ y=(R+r)\sin\theta-r\sin\left(\dfrac{R+r}{r}\right)\theta \end{array}\right. \text{中}$$

得 $x=5\cos\theta-2\cos\dfrac{5}{2}\theta$

$y=5\sin\theta-2\sin\dfrac{5}{2}\theta$

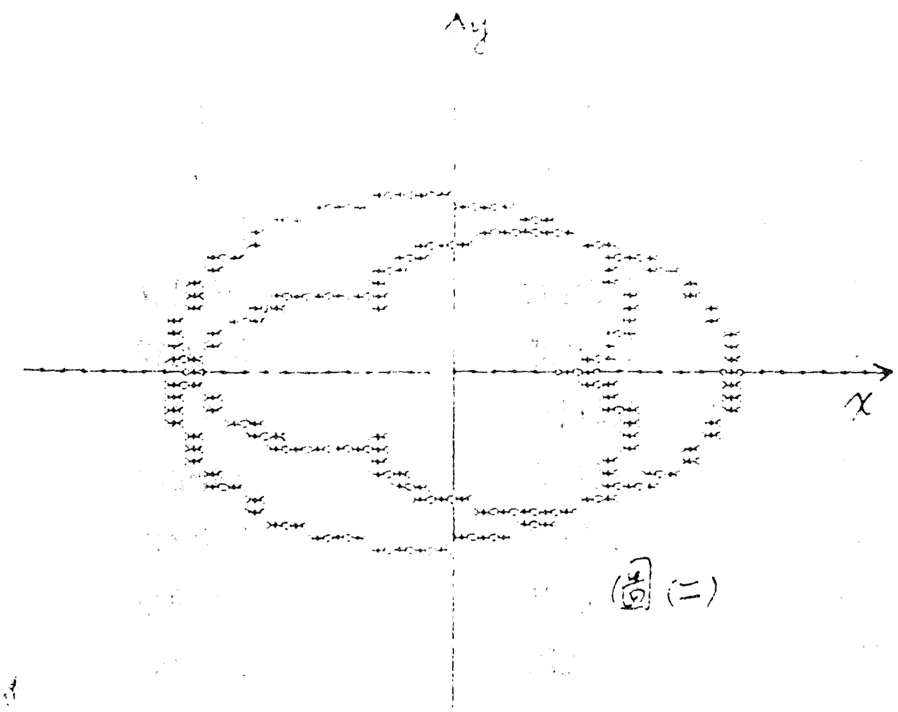
第一圈　$0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ 如圖(一)



θ	x	y
:	:	:
0	3	0
30	3.81249	.568147
60	4.23205	3.33012
90	1.41422	6.41421
120	− 3.49999	6.06219
150	− 6.26198	1.98238
180	− 5.00001	− 1.99999
210	− 2.39829	− 3.01764
240	− 1.5	− 2.59808
270	− 1.41422	− 3.58577
300	.767918	− 5.33012
330	4.84772	− 4.43188
360	7	0
390	4.84781	4.43182

420	.767995	5.33014
450	−1.4142	3.58581
480	−1.49999	2.59808
510	−2.39824	3.01764
540	−4.99996	2.00005
570	−6.26199	−1.98228
600	−3.50008	−6.06213
630	1.41413	−6.41425
660	4.23203	−3.3302
690	3.81251	−.568184
720	3	0

繞兩圈（ $0° \leq \theta \leq 720°$ ）後，即成圖㈡



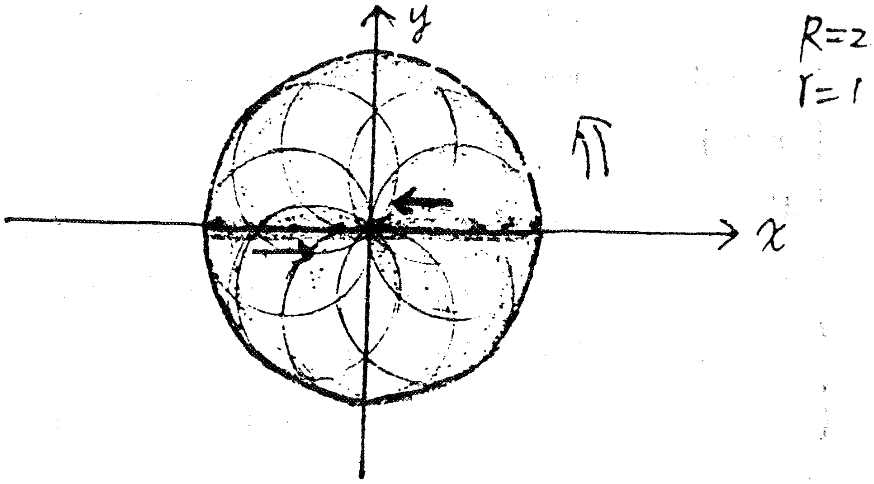
圖(二)

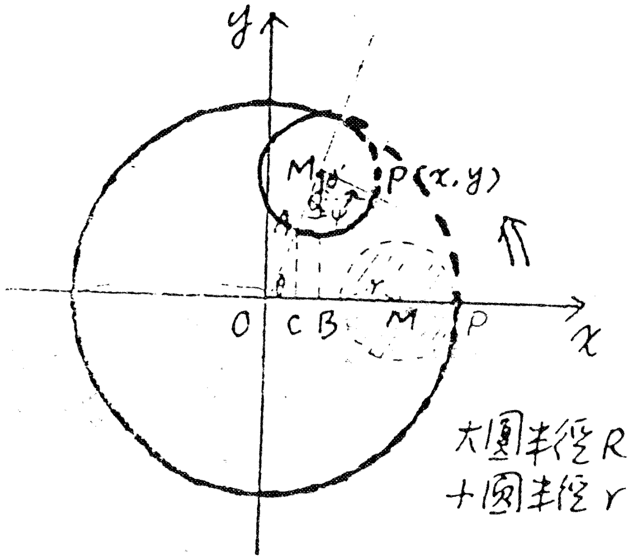
因此R／r＝3／2 ，此種曲線確實必經繞定固x，2圈後便可成一封閉形。

(3)如果R／r 爲一無理數，則點p位置不管繞定圓多少圈亦無法回至原位。

實驗㈢：如實驗㈡之作法，改將小圓（半徑r）置於定圓內，

作內切滾動，並使由 x 軸上出發觀察點 p 之軌跡：





則P（x，y）之變化，

$\theta R=(\pi-\psi)r$

$\therefore \psi=\pi-\dfrac{\theta R}{r}$

又 $\theta'=\psi-\dfrac{\pi}{2}+\theta$ 代入

$\theta'=\pi-\dfrac{\theta R}{r}-\dfrac{\pi}{2}+\theta$

$=\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{R-r}{r}\right)\theta$

公式：$x=\overline{OB}+\overline{PQ}=(R-r)\cos\theta$

$+r\sin\theta'$

$y=\overline{BM}-\overline{MQ}=(R-r)\sin\theta$

$-r\cos\theta'$

$$\therefore \begin{cases} x=(R-r)\cos\theta+r\cos\left(\dfrac{S-r}{r}\right)\theta \\ y=(R-r)\sin\theta-r\sin\left(\dfrac{R-r}{r}\right)\theta \end{cases}$$

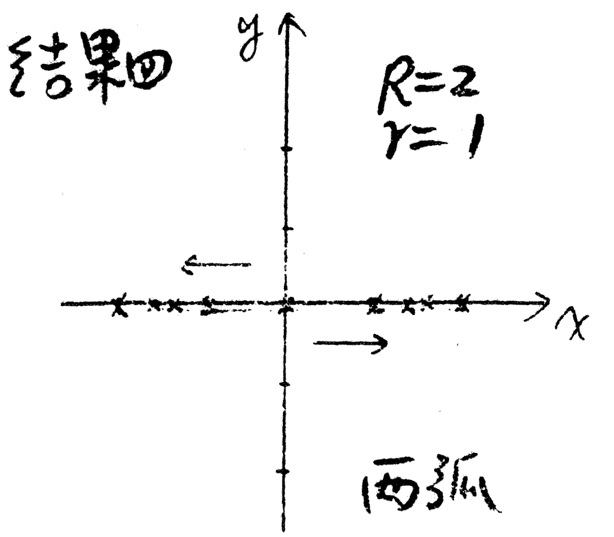
上式中分別以 $\begin{cases} R = 2 \\ r = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} R = 3 \\ r = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} R = 4 \\ r = 1 \end{cases}$ 代入得

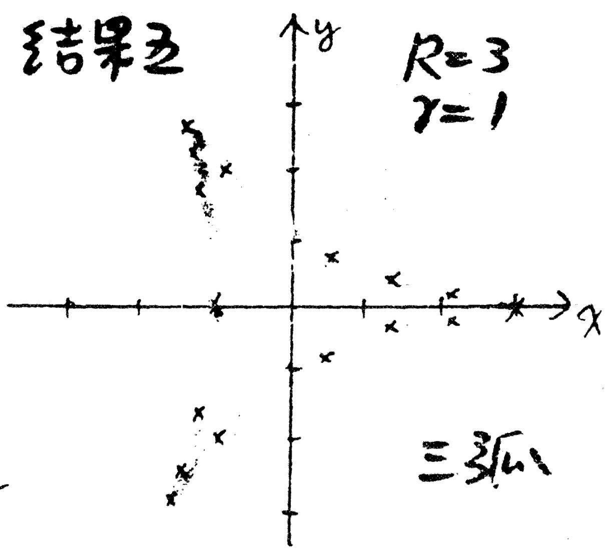
$\begin{cases} R = 2 \\ r = 1 \end{cases}$ 軌跡是：$\begin{cases} x = \cos\theta + \cos\theta \\ y = 0 \end{cases}$

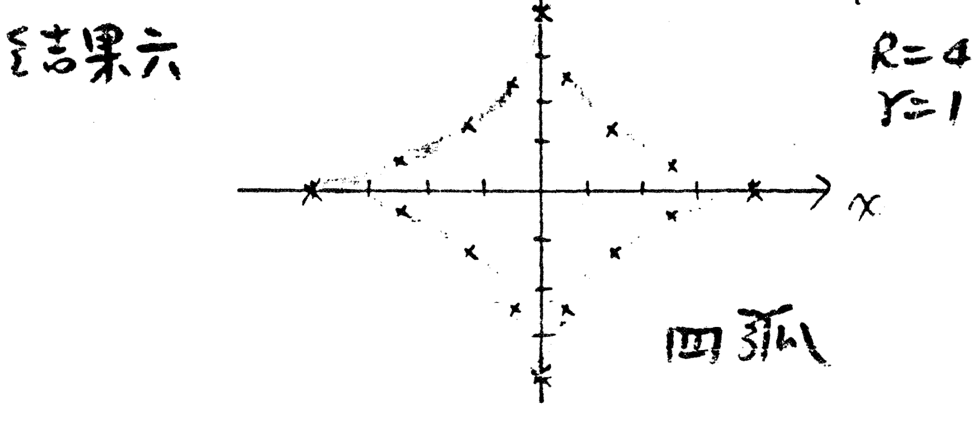
$\begin{cases} R = 3 \\ r = 1 \end{cases}$ 軌跡是：$\begin{cases} x = 2\cos\theta + \cos 2\theta \\ y = 2\sin\theta - \sin 2\theta \end{cases}$

$\begin{cases} R = 4 \\ r = 1 \end{cases}$ 軌跡是：$\begin{cases} x = 3\cos\theta + \cos 3\theta \\ y = 3\sin\theta - \sin 3\theta \end{cases}$

描出軌跡圖示如下：







由以上作圖結果，發現此種內擺線的弧瓣數目亦等於R/r 數。(為什麼？)

結論(三)：(1)當定圓圓周長$2\pi R$為小圓周長$2\pi r$之整數倍(m)時$\Rightarrow 2\pi R=(m)\,2\pi r \quad \Rightarrow m=R/r$

則此種內擺線，便有R/r 個弧瓣。

(2)根據此一原理，若R/r為一有理數P/q時，即

$q\cdot R=P\cdot r$

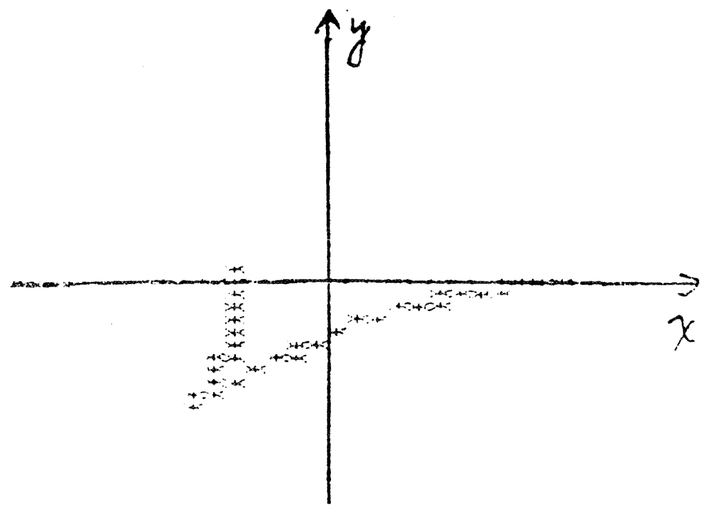
則點p之位置必經繞定圓q圈後，再回至原位如下圖：

令 $\begin{cases} R=3 \\ r=2 \end{cases}$ 代入公式中

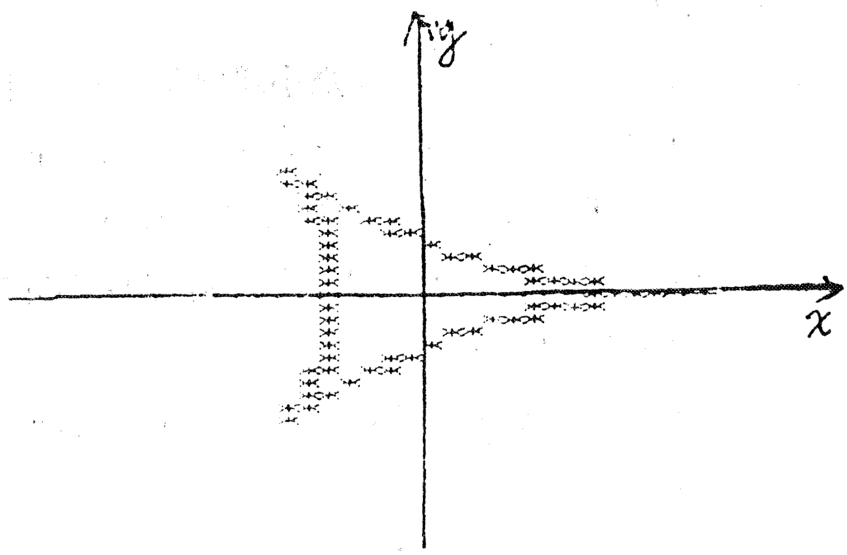
$$\begin{cases} x=(R-r)\cos\theta+r\cos\left(\dfrac{R-r}{r}\right)\theta \\ y=(R-r)\sin\theta-r\sin\left(\dfrac{R-r}{r}\right)\theta \end{cases}$$

得 $\begin{cases} x=\cos\theta+2\cos\dfrac{1}{2}\theta \\ y=\sin\theta-2\sin\dfrac{1}{2}\theta \end{cases}$

第一圈$0\leq\theta\leq 360^\circ$圖示：



繞兩圈（ $0^\circ \le \theta \le 720^\circ$ ）後，圖示：



數據：

θ	x	y
:	:	:
0	3	ϕ
30	2.79788	−.0176381
60	2.23205	−.133974
90	1.41422	−.414213
120	.500003	−.866023
150	−.348384	−1.43185
180	−.999998	−2
210	−1.38366	−2.43185
240	−1.5	−2.59808
270	−1.41421	−2.41422
300	−1.23205	−1.86603
330	−1.06583	−1.01765
360	−1	−1.04862E-05
390	−1.06583	1.01763
420	−1.23205	1.86602
450	−1.41421	2.41421

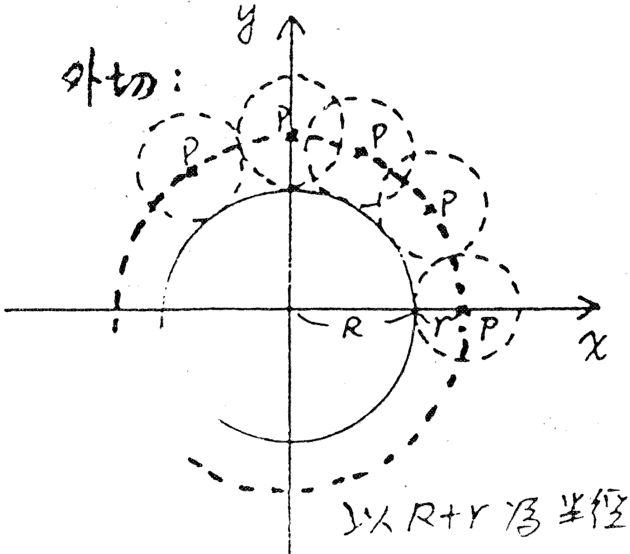
480	−1.5	2.59808
510	−1.38367	2.43186
540	−1.00001	2.00001
570	−.3484	1.43186
600	.499985	.866035
630	1.4142	.414221
660	2.23204	.133979
690	2.79787	.0176392
720	3	0

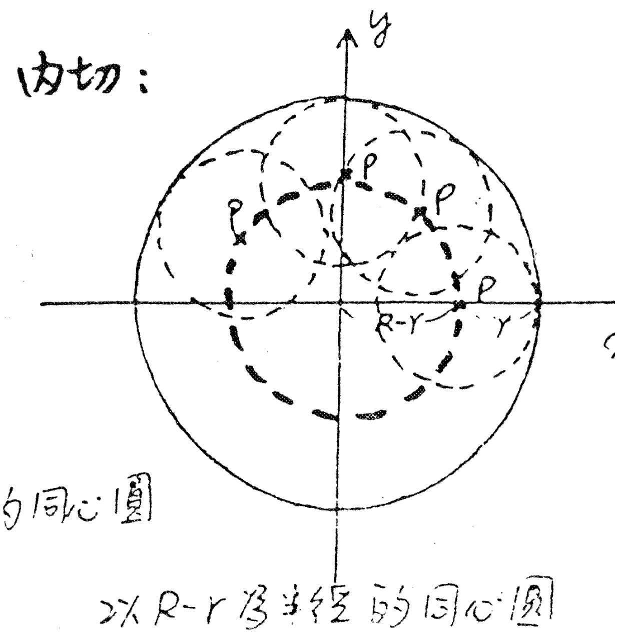
因此$R/r = 3/2$，此種曲線確實必在繞定圓兩圈後，可回復至原位。

(3)如果R/r 為一無理數，則點P必亦無法回至原位，（不論小圓內切滾動多少圈）。

五、推廣與歸納

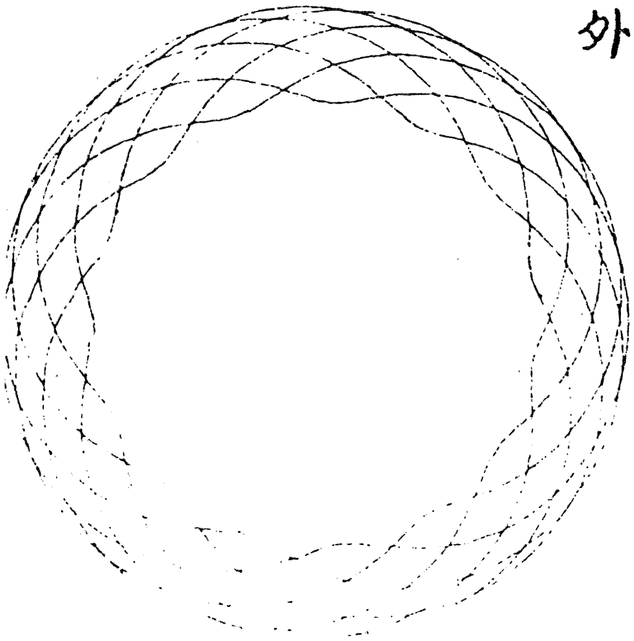
推廣一：上述之外擺線與內擺線之動點P係在圓周上；如果將P點改取在轉動圓之圓心，則點P（即小圓圓心）的軌跡，即是

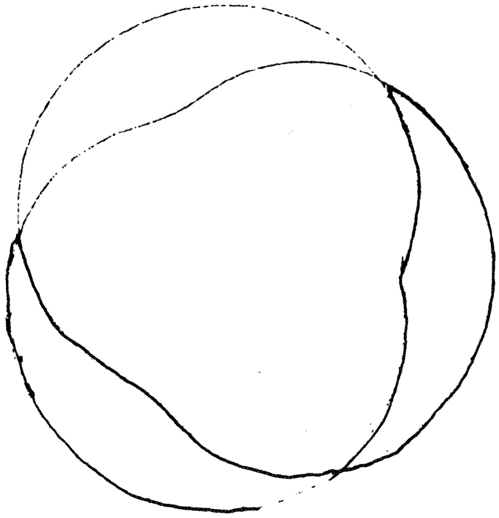


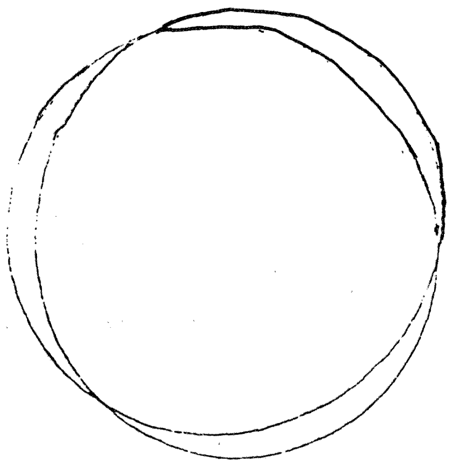


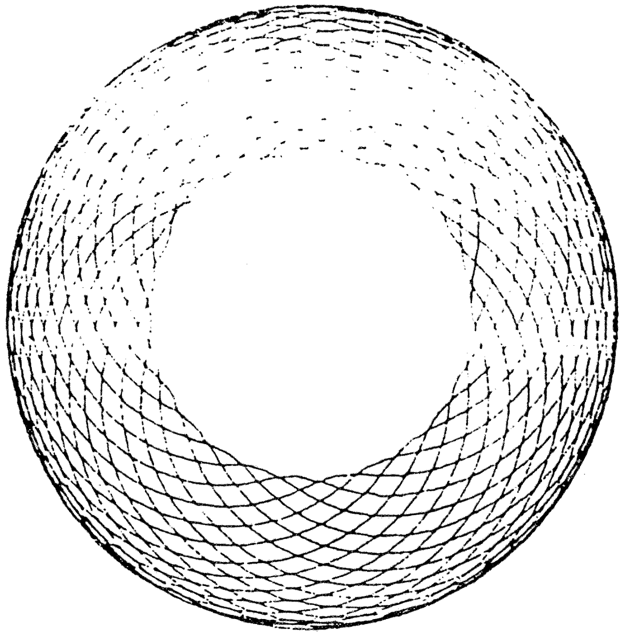
推廣二：若P點取在轉動圓之內部任一點（異於圓心），則形成更多美妙的軌跡，如下

外切滾動情況：

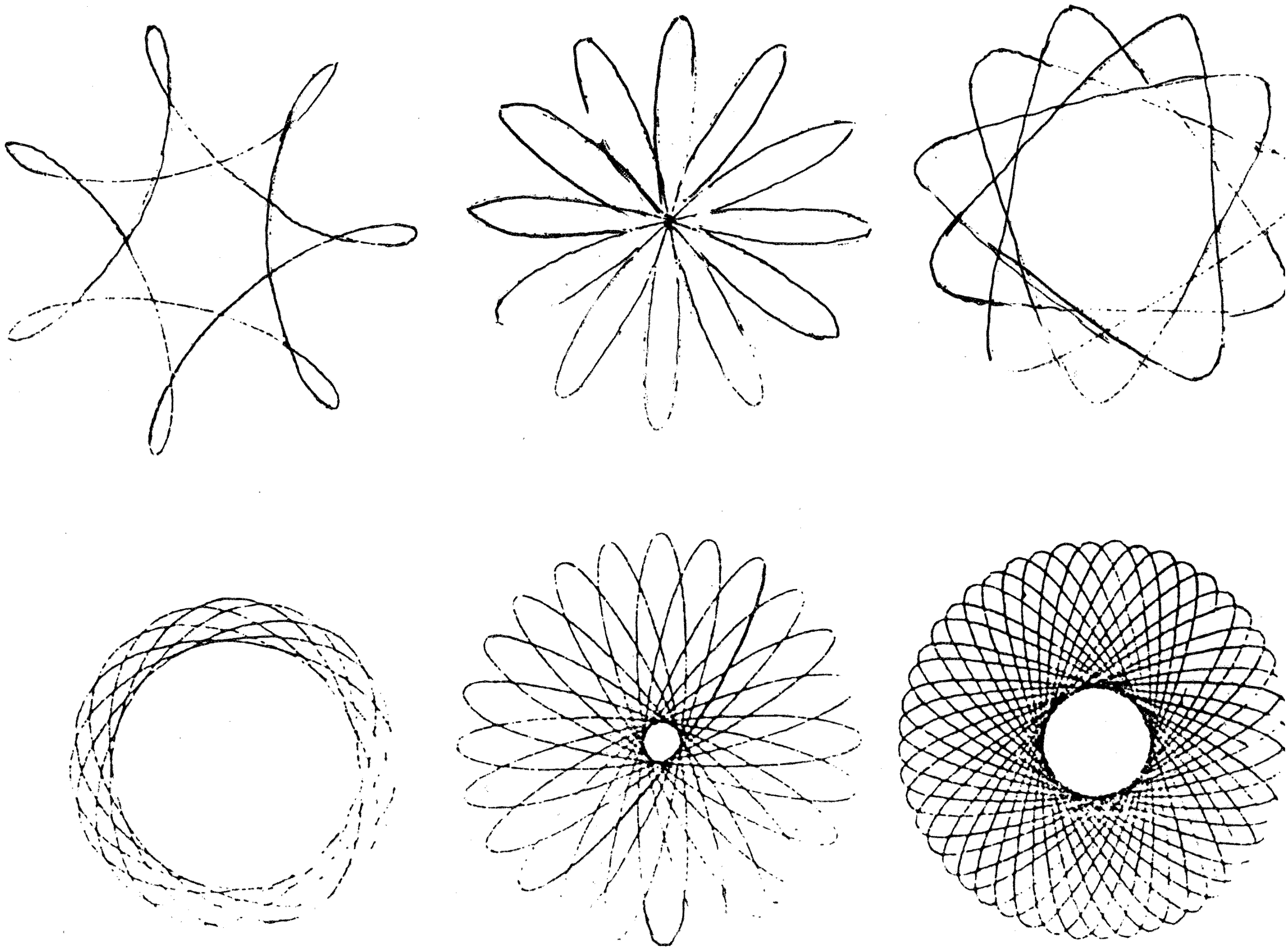








內切滾動情況：



至於其成因在補充資料中有詳細討論

六、發展部份

由兩圓相內切滾動的原理來觀察阿氏螺線的形成。

1.設計：

(1)先在直角坐標系中，作一定圓X，圓心0，並在圓周上標出 A_1，A_2，A_3，A_4，……，A_{18} 諸點，分別代表 $20°$，$40°$，$60°$，$80°$，……$360°$ 等方向角。

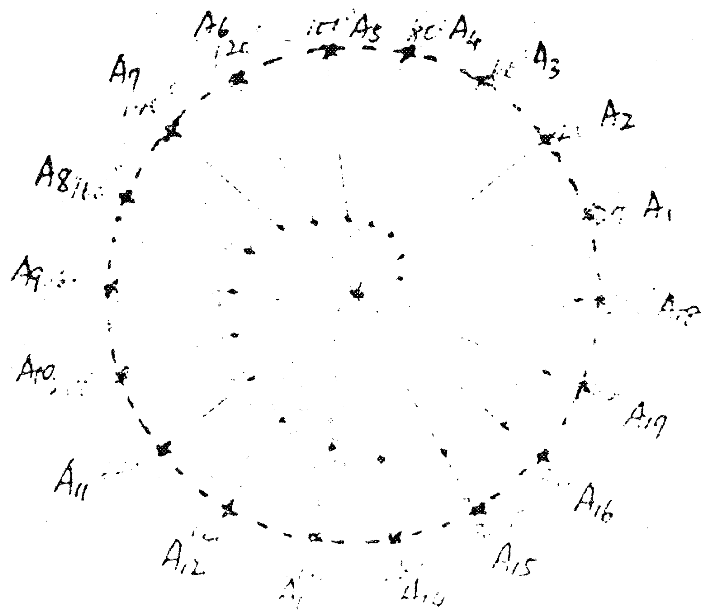
(2)以透明紙剪下大小不等的圓若干個，半徑為 a，$a=10-0.5n$，$n=1,2,3,\cdots\cdots,18$

(3)諸圓族置於直角坐標中

$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$，圓心 (h,k)

半徑a　$0<a<10$

諸圓（h，k）以每秒20°轉動與定圓×相內切，切點分別爲A_1，A_2，A_3，……，A_{18} 即按下表操作



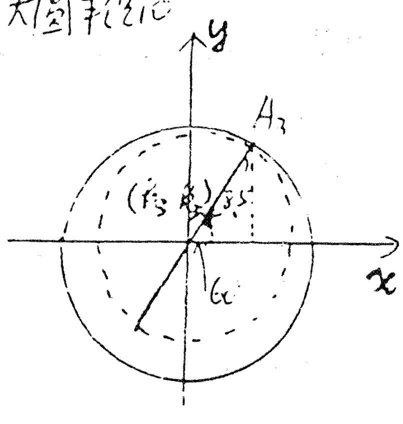
則可知圓心（h，k）在圓內部以每秒0.5 cm　之速度遠離0點（作等速運動）可求t sec後

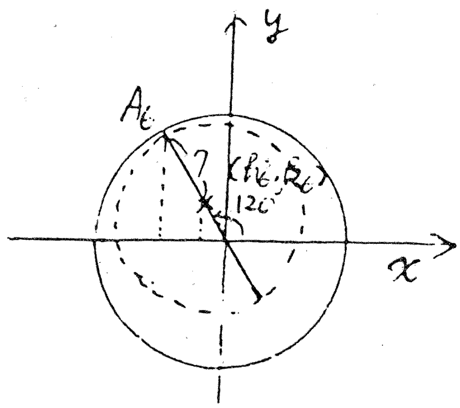
圓心（h，k）之位置，並予描出圓心（h，k）之軌跡得一螺線的第一層（如圖）

2.驗證：此種曲線是阿氏螺線嗎？

先找出當t秒時，圓心（h_t，k_t）之位置

太圓於原心





$t=3$ 時　$\theta = 60° = \dfrac{\pi}{3}$

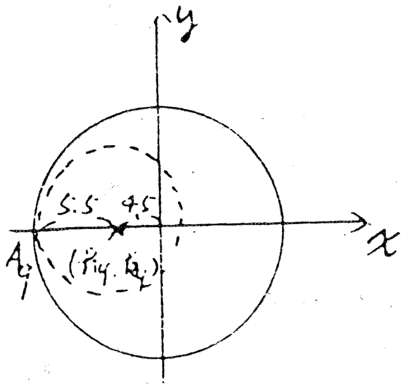
$r = 8.5 \quad 10 - 8.5 = 1.5$

(h_3, k_3)

$= (1.5\cos 60°,$

$\quad 1.5\sin 60°)$

$= \left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$



$t=6$ 時，$\theta = 120° = \dfrac{2\pi}{3}$

$r = 7 \quad 10 - 7 = 3$

(h_6, k_6)

$= (3\cos 120°,$

$\quad 3\sin 120°)$

$= \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$t=9$ 時，$\theta = 180° = \pi$

$r = 5.5$ ，1

$10 - 5.5 = 4.5$

(h_9, k_9)

$= \left(-\dfrac{9}{2}, 0\right)$

改在極坐標中，視 (h_t, k_t) 爲 (r_t, θ_t) 則

$t=3$ 時，$(h_3, k_3) = \left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$，

$r_3 = 10 - 8.5 = 1.5$

$$\Rightarrow \frac{r_3}{\theta_3} = \frac{1.5}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{\pi} = \frac{9}{2\pi}$$

$t=6$ 時，$(h_6, k_6) = \left(\dfrac{-3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，

$r_6 = 10 - 7 = 3$

$$\Rightarrow \frac{r_6}{\theta_6} = \frac{3}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{9}{2\pi}$$

$t = 9$ 時，$(h_9, k_9) = (-\frac{9}{2}, 0)$

$r_9 = 10 - 5.5 = 4.5$

$\Rightarrow \frac{r_9}{\theta_9} = \frac{4.5}{\pi} = \frac{9}{2\pi}$

⋮ ⋮

⋮ ⋮

因此 $\frac{r_t}{\theta_t}$ 為一常數 $\frac{9}{2\pi}$ $\Rightarrow r = N\theta$，其中 $N = \frac{9}{2\pi}$

故此種曲線確為一螺線

由以上驗證，對於數學上阿氏螺線之形成，我們可以藉着兩圓之相內切滾動，圓心之軌跡來探討，必可更加清晰明瞭！

若欲求此螺線的第二層：

則將定圓X之半徑放大一倍（圓心仍在原點），轉動圓之半徑 a（$10 < a < 20$），如上法相內切，轉動角度，與轉動速率不變，則可得此螺線的第二圈。

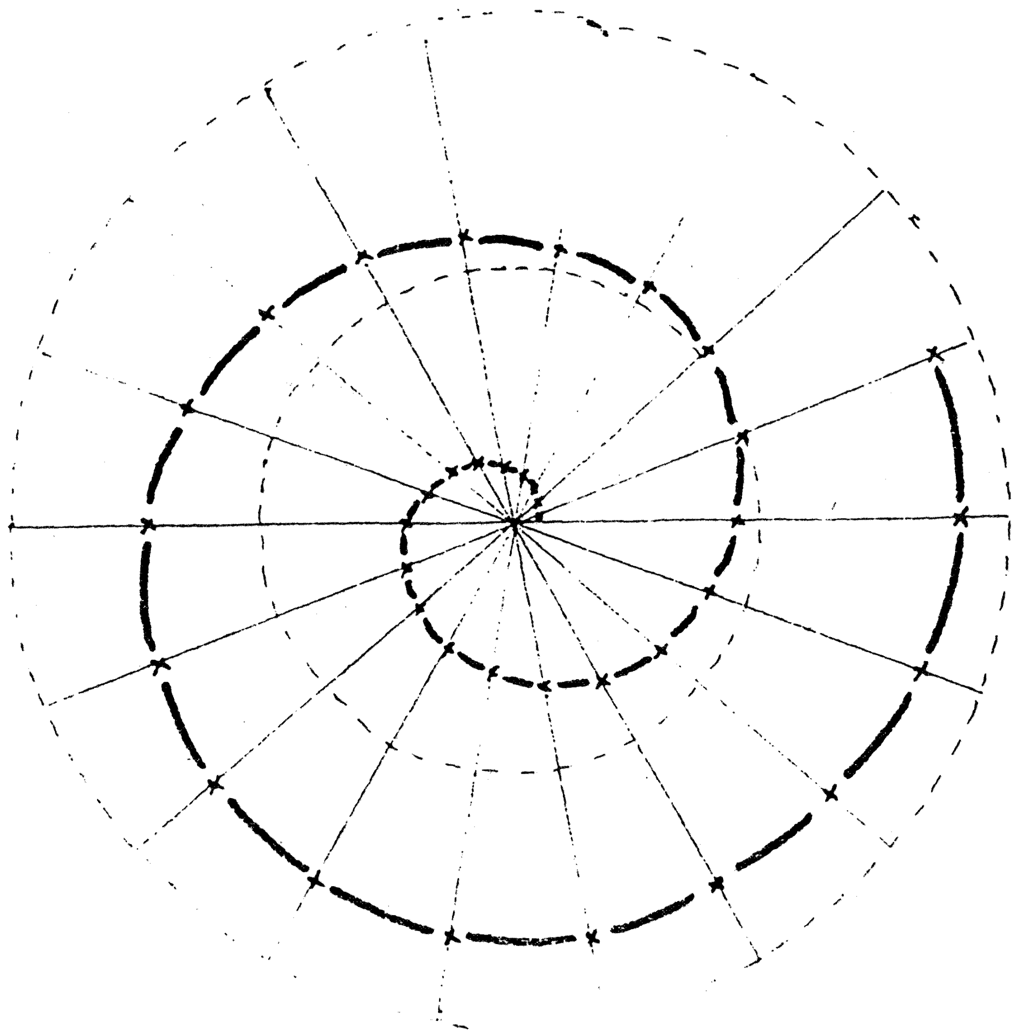
而且與前一圈之間隔為9 cm

因為 $r = N\theta$，$N = \frac{9}{2\pi}$

第一圈 $r_1 = N\theta$

第二圈 $r_2 = N(\theta + 2\pi) = N\theta + 2\pi N$

$\therefore r_2 - r_1 = 2\pi N = 2\pi \cdot \frac{9}{2\pi} = 9$ （如下圖所示）



七、參考資料

洪萬生等譯　簡明數學百科全書（九章出版社 67.11.17 ）
吳千甲編著　數學系統摘要（建宏出版社 70.9 再版）
黃奕章著　　銳角的三角函數（新光書店 63.8 ）

八、補充資料

本主題所研究的兩圓外切，內切滾動的結果中，可以歸納出一個通式。若大圓的半徑（R），小圓的半徑（r），動點P與小圓圓心的距離爲（c），則點P的軌跡通式：

外切：$\begin{cases} x = (R+r)\cos\theta - c\cdot\cos\left(\dfrac{R+r}{r}\right)\theta \\ y = (R+r)\sin\theta - c\cdot\sin\left(\dfrac{R+r}{r}\right)\theta \end{cases}$

內切：$\begin{cases} x = (R-r)\cos\theta + C\cdot\cos\left(\dfrac{R-r}{r}\right)\theta \\ y = (R-r)\sin\theta - C\cdot\sin\left(\dfrac{R-r}{r}\right)\theta \end{cases}$

1. 當 $C=0$ 時，則動點P的軌跡，即形成一個（$R+r$）為半徑或（$R-r$）為半徑的同心圓。（如推廣一所示）
2. 當 $C=r$ 時，則動點P的軌跡，即本主題實驗二、三所示的內切滾動與外切滾動的軌跡。
3. 當 $0<C<r$ 時，則動點P落在小圓的內部（異於圓心）的一點，其軌跡即如推廣二所示的美妙圖形。
4. 當 $C>r$ 時，則動點P落在小圓的外部，其軌跡如下圖中所表示，並與 $0<C<r$ 作一比較，略為相仿。

※但是不論動點P的位置如何改變，若 R/r 為一有理數 p/q 時，則動點P必經繞大圓（半徑R）q圈後，即形成一封閉形。

評語：對擺線和螺線之間之關聯變化有清楚的分析。